

大西琢朗 『証明論的意味論と双側面説』

への問題提起・コメント

山田 竹志

東京大学大学院

2012/05/17

論数哲ワークショップ

大西論文の立場を再構成しながら，
問題に感じた点（Q1，Q2，...）を挙げてゆく

1．意味論とは何か

ダメットの古典論理批判とは何だったか

2．双側面的PTSとは何か

妥当性の説明としてふさわしいか

3．反映原理の扱いについて

サンビンらの立場は循環しているか

1 . 意味論とは何か

意味論（意味理論）とは：

言語表現（の形式）の働きを説明するもの

← その言語表現の様々な側面のうち中心的なものを記述し，
他の側面をそこから派生させる． ... [A]

← その言語表現が文なら，その文が（ある文脈において）
いかにして真ないし偽に決定されるかを記述し，
文以外の表現なら，その表現が現れる文の真偽の決定に
その表現がどう貢献するかを記述し，
他の側面をそこから派生させる． ... [B]

真理条件的意味論は [B] まで認める

- 次のような結果を出力する
(p は既に振る舞いの分かっている言語で書かれる)

$$S \text{ is true (in a model } \mathcal{M}) \Leftrightarrow p$$

- 推論が妥当であるということは
「前提を真にするすべてのモデルで結論が真」と説明される
- 推論が非妥当であれば、「前提を真にするが結論を真にしないモデルが存在する」(反例モデル)

証明論的意味論は [B] を認めない

つまり中心的性質を真偽 (の決定される仕方) とは考えない

ダメットの真理条件意味論批判

- 二値原理（すべての言明は真ないし偽に確定している）を満たすような真理概念を用いる限り，文の真理条件は，それが成立しているときにはいつでも我々にそう認識できるようなものではない（ p は原理的には認識可能な条件であるべき）
- 二値原理を満たす真理概念を意味論で使用する事への批判
特定の意味論の支持に基づいてはいない
- 意味論において二値原理が受け入れられなければ
本当に「古典論理」は正当化不可能か議論の余地がある

「使用説という適切な方針に基づいて構築された意味論が，古典論理を批判するものなのだとすれば，それは，古典論理を支える二値原理と，二値原理に従う真理概念を用いる真理条件的意味理論に対する決定的な反駁になる。」(p. 2)

「ダメットの構成主義的PTSの目論見は，自然演繹においては古典論理の否定が保存的でないこと [...] に基づいて，古典論理を批判することであった [...] ダメットの目論見のためには [...] 「自然演繹こそが唯一無二の正しいフォーマットだ」と示す議論が必要である。」(p. 45)

Q1 これは誤解だろう

ダメットの論証は，特定の意味論の支持に基づかない
ある特定の意味論が「唯一無二の正しいフォーマット」だと示す
というのはそもそも無理ではないか？

2 . 双側面的PTSとは何か

- 証明論的意味論の精神：
証明に関わる側面を「中心的な側面」と考える
(「 t proves S 」「 S is inferred from S' 」)
- 本論の根本的指針：
シーケント計算の推論規則が「中心的な側面」を与える

主張 1 : 複数結論シーケントは「ポジション」への制約を表す

$$X_0, \dots, X_n \vdash Y_0, \dots, Y_m \Leftrightarrow$$

X_i のすべてを主張し, Y_j のすべてを拒絶することは間違い

X_i のすべてが検証され, Y_j のすべてが反証されることはない

X_i がすべて検証されたならば, Y_j のすべてを反証することは不可能

Y_j がすべて反証されたならば, X_i のすべてを検証することは不可能

- Q2 これは一見，例えば「 $X_0, \dots, X_n \vdash A$ 」というシーケントを， $X_0 \wedge \dots \wedge X_n \rightarrow \neg\neg A$ と読め，
 と言っているようにも聞こえる
 （だとすると二重否定解釈のヴァリエーション？）
- 主張 / 拒絶，検証 / 反証の内実は完全にオープンであり，
 主張と拒絶は完全に独立に与えうると考えられているように思われる

 「ある文が検証不可能であるとわかっているならば，それだけで，その文を用いた主張は間違っていると言ってよい[...]．それは，反証の（不）可能性とは関係ない．反証の（不）可能性は，拒絶という行為の正しさ・間違いだけに関係する。」(p. 79)．
- とりわけ，カットと同一律は自明ではないとされる

「カットは対偶の形で考えるとわかりやすい：

$$X \not\vdash Y \Rightarrow X \not\vdash A, Y \text{ or } X, A \not\vdash Y$$

すなわち，ある整合的なポジション $[X : Y]$ のもとでは，任意の命題 A について，それが主張可能である ($[X, A : Y]$) か，拒絶可能である ($[X : A, Y]$) かのいずれかである (p. 73)

Q3 これは直観主義的には誤り．カットの対偶は正しくは

$$X \not\vdash Y \Rightarrow \text{not } (X \vdash A, Y \text{ and } X, A \vdash Y)$$

であり，次を意味する：ある整合的なポジションの下では，任意の命題 A について，それが主張不可能かつ拒絶不可能だとは言えない

.....他には非構成的推論は見つからなかった

主張 2 : シークエント計算における任意の規則の組み合わせが意味付与的と認められる

- シークエントの左右の導入則は : 「単に与えられたシークエントからより複雑な文を含むシークエントを組み立てるだけの , 言わば記号の結合法を定めているだけ」(p. 96) .
- tonk 規則から破滅的な帰結が生じるのは , tonk を含む文にカットを適用するときだけ
- 背景 : シークエントの双側面的読みにおいては , カットと同一律が自明でなくなる

双側面的PTSの仕組み

- シークエント計算の左右の導入則が共に結合子の「中心的側面」を与えていると捉える
そこから他の（シークエント間の）推論が派生させられる
（シークエント計算を仮定付きの証明体系として使う）
- とりわけ，カットと同一律が派生させられる
（カット除去定理と同一律除去（還元）定理）
- シークエント計算の証明そのものが妥当性の「意味論的説明」である，という立場
反例構成の役には立たない

.....論理的妥当性の解釈と言えるだろうか？

Q4 シークエントはどんなときに文が
検証不可能・反証不可能であることを述べている

(例えば $X, A \vdash Y$ は「 X の検証と Y の反証が与えられているとき,
 A は検証不可能である」と述べているとみなせる)

どんなときに検証・反証できるかは述べない

.....しかし論理とはまさに検証・反証のためのものでは？

Q5 カット除去定理によって派生させられるカットは,
前提が既に証明されているものだけではないか

3 . 反映原理について

- 反映原理：論理定項はシーケント・レベルの語彙に対する命題レベルでの反映 (p. 53)
- シーケントの規則は「定義規則」と「定義規則の逆と同値な規則」(反映規則) の組み合わせであることが示せる
- 反映規則の「正当化」～ カットの還元
反映規則の「検証」～ 同一律の還元 (この事実を利用して , 安定性と一意性の関係が与えられる)

.....しかし、「定義方程式が論理結合子の意味を与え、その意味の観点から論理法則が正当化される」という考えは否定される。

結合子○の反映規則の正当化

← 結合子○に関する同一律

← 結合子○の反映規則の検証

← 結合子○に関するカット

← 結合子○の反映規則の正当化

← ...

Q6 しかし，ここでカットや同一律が
反映規則の検証や正当化を前提していると考えるのは，
カットや同一律が自明ではないようなシーケントの読みを
採用しているからに過ぎないのではないか？