『数学の原理』(1903) における多としてのクラス*

山田 竹志

近年のラッセル研究においては[(1)]，1903 年に公刊された『数学の原理』(Russell 1937)[(2)]以降のラッセルの論理思想の変遷を，存在の一義性[(3)]を保持しつつ，タイプの区別を利用してパラドクスを回避するような枠組みを求めた過程として理解するのがスタンダードな解釈となっている．この解釈の下では，『数学の原理』におけるタイプの区別は，その後のいわゆる「無クラス理論 (no-class theory)」とは異なり，存在論そのものの中にタイプの違いという存在論的身分の違いを持ち込んでしまっているために，ラッセル自身の目的からすればそれ自身非常に居心地の悪い考えだったということになり，それゆえラッセルにとっては失敗作だったものとみなされ，詳しく研究されることが少ないように思われる．しかしながら，タイプの区別まで含めた『数学の原理』のクラス理論は，ラッセル自身によるパラドクスへの取り組みの最初に位置するものであり，その固有の特徴が後の議論にどう影響しているか（していないか）はより注意深く検討する必要がある．また，(1) 存在の一義性という考えへの強い傾向を持つとされるラッセルが，いかにしてタイプに対する実在論的な解釈を与えることができたのか，(2) その解釈――これは，本論でも触れる「一と多の区別」によって与えられる――はどのようなものだったのか，(3) タイプの区別へと導くような区別（すなわち「一と多の区別」）を予め内在させた仕方でクラスの理論を考えたのはなぜなのか，といった問いは，それ自身として興味深い問いだと言えるだろう．

本論は，こうした問いに答えるための予備考察として，『数学の原理』における多としてのクラスという観念[(4)]の内実の解明を目指したものである．第 1 節では，『数学の原理』の存在論の基礎的部分の説明も兼ねて，「いかなる存在者も論理的主語にできる」という考えを説明する．この説明に基づき，第 2 節では『数学の原理』においてクラスという観念がそもそも必要とされた理由を考察する．第 3 節では，『数学の原理』におけ

---

* 本論は始め，『数学の原理』付論 A におけるラッセルのフレーゲ論へのコメンタリーとして企画されたが，『数学の原理』の基本的な枠組みを説明している内に枚数が増え，結果的に全く別のテーマを持つ原稿が出来上がってしまった．この間，荒磯敏文，岩沢宏和，峯島宏次の三氏には，一向に話が前進しない草稿に辛抱強く付き合って検討していただき，本論において何を論じるべきかを考える上で大いに助けていただいた．記して謝意を表する．

(1) 筆者がここで念頭に置いているのは，とりわけ Hylton (1980, 1990), Landini (1998) などの仕事である．戸田山 (2003, 2007) は Landini の仕事に対する見通しよいサーヴェイを与えている．

(2) 本論では，『数学の原理』への参照は節番号により，§ 付き数字という形式で行う．また断りなしに付けられた § 付き数字は全てこの著作への参照である．

(3) ここでは，「存在の一義性」という（少々問題含みの）言葉を，「タイプの区別との間で緊張を生じるようなラッセル哲学の側面」という程度の意味で，他に簡潔な用語が見当たらないために便宜上用いているに過ぎないことをお断りしておく．詳しい説明は省くが，この側面の中核をなすのは，以下の第 1 節で説明される「いかなる存在者も論理的主語にできる」という考えである (Hylton (1980) を参照されたい)．なお，ラッセル自身は「存在の一義性 (the univocity of being)」という言葉を用いてはいないが，Cocchiarella (1980) が「存在には一つの種類しかない」という『数学の原理』の叙述 (§427) を引いて，ラッセルに「存在の一義性」という考えを帰している．なお，ここでの「スタンダードな解釈」のまとめ方は，戸田山 (2003) の叙述を踏襲している．

(4) 本論では，英語で “notion” という言葉が用いられるような場面では常に，「概念」の代わりに「観念」という言葉を用いる．これは，『数学の原理』の存在論においてテクニカルタームとして現れる「概念 (concept)」との混同を避けるためである．なお，「観念」という言葉には，心的表象という意味合いが込められることが多いが，ここではそのような含みはないことに注意されたい．

るクラス理論の中核に位置する「数的連言」について説明し，この観念と論理的主語の観念，クラスが必要とされた理由，上で触れた一と多の区別といったものとの関連について，不十分ながら第 4 節で論じる．

1　論理的主語としての存在者

『数学の原理』の存在論において，最も基礎的なカテゴリーは**項**（term）（ないし**存在者**（entity））である[5]．これは次のように特徴づけられる．「思考の対象になりうるもの，あるいは，真であれ偽であれ何らかの命題に現れうるもの，あるいは，一つとして数えられるもの，何であれこうしたものを，私は項と呼ぶ」（§47）．（ただし本論では，この「項」という用語と後で出てくる「命題の項」という用語の混同を避けるため，ラッセルが「項」と同義だとしている（ibid.）「存在者」という語を用いることにする．）例えば “Socrates is human” という文において，“Socrates”, “is”, “human” という三つの語はそれぞれ特定の存在者（すなわち，Socrates, is, human[6]）を指し示す（indicate）とされる．この文全体もまた，これらの三つの存在者を構成要素として持つ複合的な存在者，すなわち命題を指し示す[7]とされる．このように，存在者というカテゴリーは非常に広範なカテゴリーとして立てられている．

他方でラッセルは，こうした存在者が命題の中で果たす役割の違いを**命題の項**（term of a proposition）[8]という観念に訴えて捉えようとしている（§48）．命題の項という観念は，次のように特徴づけられている．「ある命題の中に現れ，かつその命題がそれについてのものであるところの主語とみなされうる項［= 存在者］（それはいくつあってもよい）[9]を，私は［その］命題の項と言うことにする．命題の項に特徴的なこととして，その内どの一つに関しても，それを他のいかなる存在者で置き換えても命題が得られることに変わりはない，ということがある」（ibid.）．（なお，命題の項は，それが「その命題がそれについてのものであるところの主語とみなされうる存在者」であることから，しばしば「命題の**論理的主語**（logical subject）」とも言い換えられている．）ラッセルは，この第一文に現れる「について（about）」という観念については説明を与えていないし，実際この観念の内実を明らかにすることは難しそうである．しかし，第二文で「命題の項に特徴的」だと言われていることはもう少し明確である．ラッセルは次のように説明している（ibid.）[10]．例えば

---

(5) 後で述べるように，このカテゴリーは最も包括的なカテゴリーというわけではなく，より包括的なカテゴリーとして**対象**（object）がある．しかし，項でない対象は項を構成要素として形成されるという点で，やはり項の観念は基礎的である．

(6) 本論では，このように英語の表現を引用符なしで用いることによって，その英語表現が表す対象に言及することにしている．これは『数学の原理』におけるラッセル自身のイタリックの使用に対応させたつもりであり，それゆえ『数学の原理』からの引用においても，ラッセルがイタリックを用いているところでは原則的に英語表現を訳さず引用符なしで用いることにしている．イタリックそのものを用いない理由は，この後の註 (11) で説明する．なお，ラッセルの考えが日本語を土台にした場合にどこまで応用できるかという点は興味深い問題であるが，本論ではその問題に立ち入るのを避け，例には専ら英語の表現を用いている．

(7) 命題（proposition）という観念は，「何であれ，真であるか偽であるようなもの」と特徴づけられている（§13）．また，文の命題に対する関係に言及する際，ラッセルは「指し示す」の代わりに専ら「表現する（express）」といった言い回しを用いている．しかし，命題を存在者の一つとして考えているという点は，「あらゆる項（存在者）」の上を走る変項が取りうる値の一つとして命題が考えられている点から明らかである．（この結果，例えば条件文の「ならば」に当たる実質含意（material implication）という関係は，命題に限らずあらゆる存在者に対して定義されている．§§41, 83 などを参照.）

(8) 「命題における項（term in a proposition）」という表現も同じ意味で用いられるが，本論では一貫して「命題の項」を用いる．

(9) ここでラッセルの言う「その命題がそれについてのものであるところの主語とみなされうる存在者」は，必ずしも文法的な主語である必要はない．例えば A is greater than B という命題において，A と B は共に（ラッセルの意味で）この命題の主語とみなされうる．（§48 を参照.）

(10) ただし，ラッセル自身の元の記述では，*is* is human や *human* is human といった命題の代わりに，humanity is human といった命題が用いられている．すなわち，“humanity” と “human” は同じ存在者を指し示すという前提の下で，本論が説明しているような趣旨のことを述べているのである．しかし，§49 では本論のように形容詞を（イタリックで）主語の位置に置いた文を用いて議論がなされている．

Socrates is human という命題について言うと，この命題の構成要素の一つである Socrates を他の存在者で置き換えたとき，どんな存在者で置き換えても，偽な命題にはなるかもしれないが，いずれにせよ命題が得られることには変わりがない．（例えば *is* is human や *human* is human は[11]，それぞれ is ないし human という存在者が人間だと主張する，偽な命題である．）他方，is を例えば Socrates で置き換えてしまうと，明らかにいかなる命題も生じない（存在者の寄せ集めしか生じない）し，human を Socrates で置き換えたときも，ラッセルによれば，「この命題における is の意味」を変えない限りは[12]命題を生じない（ibid.）．かくして，Socrates is human という命題について言えば，Socrates だけがこの命題の項であり，is および human はこの命題の項ではない，というわけである．

しかしここで，命題の項という観念は，あくまで個々の命題に相対的な観念である，ということに注意しなければならない．もちろん，この観念の特徴づけからすれば，ある存在者が命題の項かどうかを問題にするときには，ある特定の命題が与えられているとして，その命題の項かどうかを問題にするわけだから，これはある意味では自明なのだが，それだけではない．ある存在者がある命題の項ではなかったとしても，その存在者は別の命題の項となりうる，すなわち「あらゆる命題のあらゆる構成要素は，［…］論理的主語［= 命題の項］にすることが可能でなければならない」（§52）ということが，『数学の原理』では強調されているのである[13]．例えば（前段落の説明において既に前提されていたことだが） is は，Socrates is human という命題の項ではないが，*is* is human という命題の項にはなっているとされるのである．

しかしこのときには，動詞や形容詞の指し示す存在者そのものが，（例えば）Socrates is human の Socrates に代入可能であり，それゆえ命題の項となりうる，ということが前提されている．これは多少の不自然さを伴う考えである．というのも，例えば “*is* is human” という文に対する我々の理解において，“*is*” と “is” が果たす役割には明白な違いがあるように思われるからである．（それゆえ，例えば is が人間であると言うためには，“is is human” という表現を用いるわけにはゆかず（この表現は文とはみなしがたいだろう），本論で用いているイタリックのような，何らかの細工を必要とするのである．）もしこの違いを，これらの表現の指し示す存在者の違いとして受け取るならば，結局，動詞や形容詞の指し示す存在者そのものが Socrates is human の Socrates に代入可能だというわけではないし，その結果それらは命題の項にはなりえない，ということになるだろう．しかしラッセルは，このような帰結は自己矛盾を含むとして拒否する．というのも，ある存在者がいかなる命題の項にもなりえない，と主張するためには，結局のところその存在者を命題の項として持つ命題を用いなければならず（例えば *is* cannot be made a logical subject という命題において，is はこの命題

---

(11) 名詞以外の表現が指し示す存在者に言及するためのイタリックの使用は，『数学の原理』においてしばしば見られるものであり，ここでのイタリックの使用はこれにならっている．このようなイタリックの使用は，本論の地の文における英語表現の使用と同様，通常とは異なる仕方でその言語表現が用いられていることを示していると思われる（この違いがどういう違いなのかは，二段落後に論じる）．さて，先ほど註 (6) で述べた通り，本論は原則的にラッセルのイタリックの使用を，引用符なしの英語表現の使用によって置き換えている．しかし本論のような措置を取っても，ある文の中でイタリックが用いられ，しかもその文が表す命題に言及する場合には，やはりイタリックの使用は避けられないのである．『数学の原理』本文においてこの問題は，命題に言及する際にはイタリックの代わりに引用符を使用するという措置を取ることによって回避されている．しかし筆者としては，『数学の原理』が本来命題を存在者の一種とみなす枠組みであることに鑑みて，命題への言及と他の存在者への言及に別の道具立てを用いることは望ましくないと判断し，現行の措置を取ることにした．

(12) 「is という語はひどく多義的であり，その様々な意味を混同しないように，よく注意する必要がある．ここには，（1）“A is” におけるように，存在（Being）を主張する際の意味，（2）同一性という意味，（3）［例えば］“A is human” における，述定という意味，（4）“A is a-man”［の中の “is” ］の意味という，同一性によく似た意味，といったものがある」（§64n）．この区別を適用すると，Socrates is human における is は（3）の意味での is でなければならず，Socrates is Socrates という命題における is は（2）の意味での is でなければならない．

(13) ただし，この文言そのものは最終的には守られないことになる．後で見るように，数的連言は論理的主語ではないとされるが，命題の構成要素でないとは言えない．

の項である)，それゆえこの主張は自己矛盾に陥るからである（§49)．そしてラッセルは，先に触れたような“*is* is human” における “*is*” と “is” の違いを，それらが別の存在者を指し示すこととしてではなく，それらが共通に指し示す存在者が，命題の他の構成要素との間に持つ関係の違いとして理解するのである（ibid.)．

『数学の原理』において，存在者の全体は，命題の中に現れる際に常に命題の項となる Socrates のような存在者，すなわち**事物**（thing）と，ある命題の中では命題の項とならないが，別の命題においては命題の項となる human や is のような存在者，すなわち**概念**（concept）という二つの種類に分類されている（§48)．そして，概念が命題の中に現れる仕方については，命題の項として現れない場合は「概念として（as such）現れる」と言われ，命題の項として現れる場合には「項として（as term）現れる」と言われる（§49)．しかし，事物であれ概念であれ，例えば A is human という形の命題の A（この命題の項）に代入することができ，かくしてそれを命題の項として持つ命題を形成でき，その真偽を問うことができる，という点では変わりがない．この意味で我々は，事物についても概念についても同じことを問うことができるのである．この点が，ラッセルの存在論がタイプの区別との間に緊張を生じさせる原因や，後で触れる一と多の区別が導入された際生じる問題と，関連しているのである．

2　内包と外延

『数学の原理』においてクラスという観念が必要とされた理由を理解するには，まず『数学の原理』における概念の内包性について理解する必要がある．これをより具体的に述べるため，まず概念の分類について述べることから始めよう．存在者が事物と概念に分類されることは既に述べたが，概念はそれが概念として現れる命題の種類に応じてさらに分類される．すなわち概念は，それが概念として現れる真な命題において，一つの存在者に述定される（predicated of）ないし帰される（attached to）存在者である**述語**（predicate)[14]および**クラス概念**（class-concept）と，二つ以上の存在者を関係づける（relate）ないしそれらの間に成立する（hold between）と主張される存在者である**関係**（relation）に区別される[15]．（なお，述語とは Socrates is human に現れる human のような存在者であり，クラス概念とは Socrates is a man に現れる man のような存在者である．ラッセルはこの後者の命題を Socrates, is-a, man という三つの存在者から構成されているとみなす[16]のだが，この命題における man も命題の項ではない仕方で（すなわち「概念として」）現れており，このように is-a と共に命題に現れる存在者を「クラス概念」と呼ぶのである（§58)．つまり述語とクラス概念は，概念として現れるときに is を伴うか is-a を伴うかという違いを持つのだが，ラッセルはこの違いを「おそらく言葉の上でのみ」（ibid.）の違い（すなわち，“man” と “human” は言葉としては違うが同じ存在者を指し示す）だろうと言っている．）

さて，概念が概念として現れるときには，その概念は存在者を分類する原理として働く．すなわち，それが

[14] 念のために言っておけば，ここでの述語とは言語表現ではなく，言語表現が指し示す存在者である．

[15] 本論のここでの説明は定義を意図したものではない（すなわち，「述定される」や「関係づける」を述語や関係よりも基礎的な概念と考えているわけではない)．ラッセル自身は §48 において，述語とクラス概念は形容詞の指し示す存在者として，関係は動詞の指し示す存在者として説明しているが，ラッセルによるこの特徴づけにも例外が多いし，また結局のところ関係の一般観念は定義不可能観念の一つとみなされている（§§1, 106)．

[16] ただし，“Socrates is a man” という文は，本文で示した命題の他に Socrates is a-man という命題を指し示す場合もあるとされる（§57n)．この後者の読みにおいては，“a man” は表示概念を指し示すものとされ（註 (24) を参照)，“is” は「同一性と非常に類似した関係」を指し示すとされる（§64n)．しかし本論の議論においては “is-a” 読みだけを考えておけば十分である．また，このように動詞と不定冠詞を一つの単位とみなす考えは，“is” 以外には適用されず（つまり，have-a や love-a といった存在者はない)，“is” 以外の動詞の目的語の場所での不定冠詞には “a-man” 読みしか存在しない．なお，このように is-a を一つの存在者とみなす考えはペアノに由来しており，ペアノ自身はこの存在者をクラスにおける成員関係として解釈している（§69 を参照)．

述語・クラス概念であれば，任意の存在者についてその概念が述定されるかどうかが問いうるし，それが関係であれば，任意の複数の存在者についてその概念がそれらを関係づけるかどうかが問いうるのである．そして一般に，何かを分類する原理に対しては，その原理そのものを外延的に個別化するか，それとも内包的に個別化するかという対立が生じる．すなわち概念の場合であれば，同じ範囲の存在者に述定される・同じ組み合わせの存在者を関係づける概念を，同一視する（外延的な捉え方）かしない（内包的な捉え方）か，という対立である．ここでラッセルは概念に対して，明確に内包的な捉え方を取る[(17)]．

> ［述語について：］一般に，与えられた［範囲の］項に対して帰されるが他の項には帰されないような述語はたくさんある．(§66)
> ［クラス概念について：］二つの概念の外延が等しくとも，それらが同一であるとは限らない．man と featherless biped は決して同一ではないし，even prime と integer next after 1 も同一ではない．(§24)
> ［関係について：］ここで採用されている関係の内包的な捉え方からは，二つの関係は同一でなくとも同じ外延を持ちうる，という帰結が出てくる．(§28)

しかし，数学の分析という『数学の原理』の目的にとっては，外延的に個別化されるような分類原理，すなわち，「要素（term）[(18)]が与えられれば確定する」（§§24, 66）ような存在者[(19)]もまた必要だとラッセルは考えた．「**クラス**（class）」はまさにそうしたものを指すための言葉として用いられるのである[(20)]．

まずラッセルによれば，このような外延的に個別化される存在者としてのクラスは，我々が数学をする上で不可欠なものである．例えば初等的な組み合わせの問題（例えば「5 つのものから 3 つのものを取り出す組み合わせはいくつあるか？」）において，「組み合わせ」とは，それが何を要素として含むかによって個別化される（すなわち外延的に個別化される）ような分類原理に他ならない．それゆえこれは，クラス概念や述語としては解釈できず，クラスとして解釈せざるをえないものである（§§24, 488）．

また，『数学の原理』におけるいくつかの決定的な論点は，各々のクラス概念にある一定の仕方で対応したクラスの存在を前提している．すなわち，与えられたクラス概念 a に対し，分類原理としてはそれと同じ働

(17) ラッセル自身としてはむしろ，述語やクラス概念が内包的に捉えられるのは当然であり，外延的に捉えるか内包的に捉えるかが問題になるのはクラスと関係であると考えていたようだ．しかしいずれにしても，概念は一般に内包的に捉えられ，外延的に捉えられる存在者の必要性からクラスが取り上げられる，という枠組みはラッセル自身の叙述から明らかである．（それにも関わらず，クラスの内包的捉え方をラッセルが問題にするのは，ペアノをはじめ当時の論理学者の間で，クラスの観念と述語やクラス概念の観念が混同されていると彼が見ていたからである（例えば §§66, 69 を参照）．関係についての外延的捉え方を問題にしたのも，これと別ではあるが，やはり歴史的な事情による（§98）．）

(18) §66 の原文は “a class must be definite when its terms are given” である．このように，“term” という語が “term of a class” という形式の中で現れる場合には，本論では「要素」と訳すことにしている．

(19) 実際には，以下で述べる論点に対応する箇所において，ラッセルは「存在者」や「項」という表現を用いてはいない．これは，次節で触れるように，ラッセルがクラスとして第一に提示するものは（『数学の原理』の意味での）存在者ではないからである．しかし，以下で述べる論点が本来は存在者によって満たされることが望ましい，という点については，内容から言って明らかであるし，ラッセル自身がそう思っていたことも §488 の叙述から窺える．むしろ，ラッセルが存在者という言葉を用いずにこうした論点を述べ，こうした論点を満たす上で存在者であることがどれくらい重要なのかを表立って問題にしなかったことは，議論として不十分であったと思われる．

(20) 以下では二つの点で事態を単純化している．（1）概念の内，クラス概念と述語に話を限定する．詳細は省くが，関係の場合にはクラスの代わりに「対（couple）のクラス」を考えれば十分である．（なお，現代の集合論において一般的な，対の観念を集合の観念に還元する方法（$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$）は当時まだ発明されていない．）（2）クラスは一般的に言えば，述語やクラス概念だけでなく**命題関数**（propositional function）によって定義されるが，『数学の原理』における命題関数の理論はクラスの理論に輪をかけて錯綜しかつ不完全であり，現在の筆者の力量と紙幅の都合から本論に組み込むことはできなかった．それゆえ本論の議論はクラス一般ではなく，述語やクラス概念によって定義されるクラスに限定されることになるが，それでも『数学の原理』におけるクラスの理論の大部分はこれでカバーできるのである．（ただしパラドクスに関する議論だけは例外である．第 4 節を参照．）

きをする（クラスとその要素の関係を $\in$ と書くなら，任意の x について x is an $a \Leftrightarrow x \in A$ を満たす）クラス A の存在，言い換えれば，与えられたクラス概念の外延を与えるクラスの存在を前提している．そうした決定的な論点の第一は，我々には無限クラスを扱うことができるという論点である．先ほどの例で出てきた「組み合わせ」の場合，要素を枚挙することによって一つの組み合わせを定義することができたが，この枚挙という方法が無限クラスを定義するのに使えないことは明らかであろう．しかし，もし各々のクラス概念に対してその外延を与えるクラスが上記の仕方で対応付けられているならば，クラス概念を用いて無限クラスを定義することができるのである（§§60, 72）．

そして第二に，ラッセルが与えた基数（cardinal number）の定義は，相等（equal）なクラス概念（クラス概念 a, b について「x のすべての値について，x is an a は x is a b を含意しかつ含意される」が成り立つとき，a, b は「相等」と呼ばれる）に対応する同一の存在者としてのクラスが存在する，ということに決定的に依存している．このことは，『数学の原理』第十一章における，ペアノの「抽象による定義（the definition by abstraction）」の改良を論じたくだり（§§109–111）から見て取れる．（ラッセル自身の議論は，抽象による基数の定義について論じたものだが，この議論は一般的に通用する構造を持っているので，ここでは一般的に論じることにする．）ラッセルの説明によれば，ペアノは，一般に関係 R が反射性・対称性・推移性を持っていると示されれば（現代的に言うと，R が同値関係であると示されれば），互いに関係 R に立つもの同士の間には何らかの共通の性質があることが示されたことになると考えていた（§109）．すなわち実質的には，この共通性質を値とする関数 f を

$$xRy \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(y) \tag{1}$$

によって定義することができると考えていたわけである．ラッセルはこれに対して，互いに関係 R に立つもの同士の間に共通性質があるということは否定しないが，その共通性質が唯一存在することはこれだけでは示されていないため，定義されるべき関数の値を一意に決定していないと批判した．例えば任意の x について，stand in R to x という述語[21]は，x と R 関係に立つものの全てかつそれのみに述定されるため，それらの共通性質（しかもその中で最も自然に出てくるもの）と言うことができる．しかし，$x \neq y$ なる y について xRy が成立していれば，stand in R to y は，stand in R to x とは異なる述語であるが，やはり x と R 関係に立つものの共通性質の一例になる（というのも，xRy が成り立つとき，任意の a について $aRx \Leftrightarrow aRy$ だからである）．こうした一連の共通性質が与えられたときに，なるべく一般に通用するような仕方で $f(x)$ の値を指定してやるにはどうすればよいのか，という問題に対する答えとして，ラッセルはクラスの外延性を利用するのである．すなわち，xRy が成立するときには，stand in R to y と stand in R to x は相等であり，それゆえこれらの述語の外延を与えるクラスは同一である．そこで一般に，$f(x)$ の値を stand in R to x という述語の外延を与えるクラスとして与えれば，先ほどの (1) を満たす関数 f の定義が得られる，というわけである．

[21] 「与えられた項に対して与えられた関係を持つことは述語であり，それゆえこの項に対してこの関係を持つ項の全てはクラスを形成する，とされるべきである」(§96)．この述語に対応するクラス概念は，おそらく term which stands in R to x であろうと思われるが，ここでは叙述を簡潔にするため述語について議論する．「外延を与える」や「相等」という観念を述語に対してどう拡張すればよいかは自明であろう．

3　数的連言としてのクラス

さてラッセルによれば，各々のクラス概念に上のような仕方で対応する何かがあるはずだ，というところまでは「明らか」である．「二つのクラス概念が相等であるとき，何らかの同一性が伴っている（some identity is involved）ことは明らかである．なぜなら我々は，それらが同じ要素を持つ，と言うからである」(§69)．しかしラッセルは，こうした「何か」の存在が明らかだからと言って，単にそういう存在者を措定して済ませる，という道は取らなかった．何をしたかというと，日常言語の言い回しの中に，こうした存在者を指し示すような表現を探し求めたのである．

ところが，ここには少々ややこしい事情がある．ラッセルがこの要求を満たすものとして第一に提示するものは，『数学の原理』の意味での「存在者」ではないとされているのである．ラッセルの提示するものがいかなる意味で存在者でないのか，そして存在者でなくとも前節に述べたような役割を果たしうるのか，ということは次節に回すとして，ここでは差し当たり，「存在者」という語を用いたくなる場面では，より広い意味を持つとされる「対象」という語（註 (5) を参照）を用いる，というラッセルの方策にならっておくこととしよう．

ラッセルが注目したのは，“A and B and ...” という言い回しであった．ただし，この言い回しが常にクラスを指し示すと考えたわけではない．例えば， Brown and Jones are two という命題と，Brown and Jones are paying court to Miss Smith という命題とを比較してみよう（§59)．前者の命題は，Brown is two and Jones is two と同値ではない（つまり，Brown についての命題と Jones についての命題に分解することができない）が，後者の命題は Brown is paying court to Miss Smith and Jones is paying court to Miss Smith という命題と同値である（つまり，Brown についての命題と Jones についての命題に分解できる）(ibid.)．ラッセルはこの違いを，“Brown and Jones” が指し示す対象の違い(22)として捉え，前者の命題における Brown and Jones のような結合体を「**数的連言**（numerical conjunction)」，後者の命題における Brown and Jones のような結合体を「**命題的連言**（propositional conjunction)」と呼んで区別した（ibid.)．そしてラッセルは，この数的連言こそクラスに他ならないとするのである（§§59, 71)(23)．

では，クラス概念とクラスの対応付けに関してはどうだろうか．これについては**表示**（denoting）という観念（第五章）が活用される(24)．すなわち，クラス概念を指し示す表現（例えば）“man” の複数形 “men” や，

(22) この違いを「“and” の意味の違い」と言うことには解釈上問題がある．というのも，ラッセルに従えば，“and” だけで何らかの存在者を指し示すという考えには問題があるからである．§71 を参照．

(23) ただし，ラッセルの議論の仕方はもう少し（不必要に）込み入っている．すなわちラッセルは，まず §59 において数的連言という観念を本文のような仕方で導入し，§60 においてこれが all men のような表示概念の表示する対象であると述べ，§67 でこの対象のことを暫定的に「クラス」と呼ぶ．その上で，§71 において**集まり**（collection）という観念を導入し，これを「“A and B” や “A and B and C” や何であれ確定した要素の枚挙によって伝達されるもの」として説明する．そして，A and B are two に関して本文に述べた事実に再び言及しながら，“and” が「ある確定した独特の種類の結合を表現している」と述べた（ibid.）上で，「and によって示される結合ということで意味されているものについて言えば，これは我々が前に数的連言と呼んだものと区別できない」とし，その帰結として，集まりはクラス（と暫定的に呼ばれたもの）に他ならないとしている（ibid.）のである．しかし筆者としては，集まりと数的連言を区別することにポイントがあるとは思えない．この込み入った議論のポイントとは，要するに「要素の枚挙によって伝達されるもの」が A and B are two という命題における A and B という形で見出されるという点だ，というのが本論の解釈である．

(24) 表示に関するより詳しい解説としては，飯田 (1987)，第 3.1 節を参照．なお，この飯田の解説に述べられている通り，表示概念には本文に挙げたものの他に，every man, any man, a man, some man, the man といったものがあり，これらは現在ならば量化子を用いて説明されることの説明に用いられていた．しかしこの他にも，表示の観念は『数学の原理』の目指す数学の分析において，いくつかの積極的な役割が与えられており，本文で述べた，クラス（特に無限クラス）について語る方法の一つを与えること，というのはその一つである．この他に，定義の理論を与えることという役割もあり（§§31, 63)，その際には the man のような表示概念が問題となる．

さらにそこから作られる “all men” といった句[25]は，**表示概念**（denoting concept）を指し示し，この表示概念を構成要素として持つ命題を指し示す文を形成する．しかし表示概念については，「それがある命題に現われているとき，この命題はその概念についての命題ではなく，この概念とある特別な仕方で結び付けられた[対象][26]についての命題となる」（§56）ということが成り立つ．ここで問題にしている all men や men の場合であれば，これらの概念と「ある特別の仕方で結び付けられた対象」とは数的連言のことであり（§60 を参照），「ある特別な仕方での結び付き」とは「all men はこの数的連言を表示する（denote）」と言い表される特別な論理的関係，すなわち表示である．こうして，個々のクラス概念に対し，そのクラス概念の述定される存在者から成る数的連言という対象が対応づけられるのである．

さて，ラッセルはあまり言葉を費やして論じてはいない点だが，all men という概念が数的連言を表示するという主張は以下のように動機づけられよう．A_1 and A_2 and ... and A_n という形の対象を論理的主語としているが，A_1, A_2 等々のそれぞれについての命題の連言と同値にならないような命題としては，Brown and Jones are two のように数を主張する命題の他にも（ラッセルが挙げている例ではないが），Brown and Jones are friends や Brown and Jones share the room といった命題が挙げられる．ここで例えば，Brown と Jones がある会社の従業員（employee）であり，しかも他にこの会社の従業員はいないとすれば，これらの命題の Brown and Jones を all employees of the company で置き換えても同値な命題が得られる．（それぞれ，all employees of the company are two, all employees of the company are friends, all employees of the company share the room となる．）従ってこうした事例では “Brown and Jones” と “all employees of the company” のいずれを用いても，同じものについての命題を指し示す文が形成できると言える．もちろん，こうした置き換えは，“all u’s” における “u” の指し示すクラス概念が，（十分少ない）有限個の存在者に対して述定される場合にしか可能ではない．しかし，ともかく数的連言と表示概念の間にはこうした系統的な関係がある．そして要素が枚挙できない場合（要素の数が多すぎる場合や，無限にある場合）であっても，要素が枚挙できないということは現実的な制約に過ぎない（ラッセルの表現では，「心理学的な」（§71）制約に過ぎない）のだから，数的連言と表示概念の間には同様の関係があると考えられよう，というのがここで説明した表示の理論とクラスの理論の根本的なアイデアである．

ただし，このような置き換えは，数的連言だけでなく命題的連言に関しても可能である．（すなわち，Brown and Jones are paying court to Miss Smith という命題は，all employees of the company are paying court to Miss Smith と同値である．）ラッセル自身は，「私は all を常に集合的（collective）に用い，分配的（distributive）な意味は every に限定することにする．つまり，私は “every man is mortal” とは言うが，“all men are mortal” とは言わないことにする」（§48n）として，命題的連言を表示するような all men を人為的に排除するという方策を採っている．しかし，日常言語の分析として見た場合には，“all” と “and” の系統的な関係は，and が数的連言の形成に用いられているか命題的連言の形成に用いられているかにはよらないとし，“all” が集合的な意味を持つか分配的な意味を持つかは，“all u’s” を用いて何を主張するか（ラッセルよりも広い意味での「述語」）に依存するのだ，と考えた方が自然であろう．このように考えた場合，ラッセ

(25) 飯田 (1987) の解説では，本文に挙げた men が取り上げられてはいないが，『数学の原理』§72 において「少なくとも複数形の非常にありふれた用法の一つに従えば」 “men” は “all men” と同義だとされており，また §56 にも men が例として出てくる．なお，ラッセルに従えばここでは「クラス概念 man から表示概念 men, all men が形成される」という言い方は許されず，「クラス概念を指し示す表現から表示句が形成される」という言い方をせざるをえない．というのも，ラッセルによれば，all men や men は man を構成要素として含まない（all men は man とそれ以外の要素に分析されるわけではない）からである（§72）．

(26) 原文では，ここは「項（a term）」となっているが，内容上これは筆のすべりとしか考えられない．表示句が表示するのは，一般には項（存在者）ではなく対象である，という点は，『数学の原理』第五章の記述の内この箇所を除く至るところから明らかである．

ルの数的連言という観念が数学の分析に役立つかどうかは，数学において集合的な意味での “all” を必要とする場面がどれほどあるかによるだろう，と思われるかもしれない．しかし，こうした考え方自体の是非はともかく，ラッセルはそのように考えなかった．ラッセルにとっては，日常言語はあくまで，哲学的区別を見出す際に「我々の教師ではないが，我々の案内人として捉えられる」(§46) ものであり，日常言語の分析そのものが関心の的になっていたわけではなかった．ラッセルの目的にとっては，(1) 日常言語の中に A, B それぞれについての主張に還元されないような A and B についての主張が見出され，それゆえ，単なる A と B の並置ではなく，ある統一性を持ったものとしての A and B という対象の存在に一応の証拠があること，(2) クラス概念が与えられれば，その外延を与えるクラスについて語るための概念的資源が既に日常言語の中に実現されていること，こうしたことが示されれば十分だったのである．

4 一と多の区別

さて，数的連言は現在「集合 (set)」と呼ばれているものといくつかの点において異なっている[27]のだが，ここで注目したいのはこれが「存在者」ではないという点である．この根拠となっているのは，本論冒頭で触れた一と多の区別である[28]．『数学の原理』においてこの区別は，専ら**多としてのクラス** (class as many) と**一としてのクラス** (class as one) の区別との関連で論じられている．まずこの後者の区別を見ておこう．

ラッセルは，クラスについて語る我々の語り方に，文法上異なった二つの仕方があることに注目する．すなわち，数的連言について語る際に用いられる表現は，“A and B” であれ，“all men” であれ，英語では文法上複数である (§§62, 74) のに対し，我々は単数形で “a class” とも言う (§74)．ラッセルはこの区別を，一つの対象の現われ方の違い (概念における「項としての現われ」と「概念としての現われ」の違いのように) とはみなさずに，指し示される対象の違いとみなし (ibid.)[29]，複数形の表現に対応する方を「多としてのクラス」，単数形の表現に対応する方を「一としてのクラス」と呼ぶ．多としてのクラスとは要するに数的連言のことに他ならないが，一としてのクラスは数的連言の要素からなる全体 (これは §135 で**集合体** (aggregate) と名づけられている) と同一視される (ibid.)．

他方ラッセルは，こうして区別された多としてのクラスと一としてのクラスの間には，(一対一の) 対応関係があると考えようともしている．しかしこの点に関しては，いわゆる「ラッセルのパラドクス」(『数学の原理』では “the Contradiction” として言及される[30]) への対処と関係するために，『数学の原理』にはいくつかの異なる主張が見られる．(1) 最も強い主張は，「多であるものは一般に，一である全体を形成する」(§71) とか「多としてのクラスが存在する場合にはいつでも，一としてのクラスが見出されなければならな

(27) 本論では取り上げることができないが興味深い点として，要素を持たない数的連言 (空集合に対応) が認められないという点と，唯一の要素からなる数的連言 (シングルトンに対応) がその要素と同一視されるという点が挙げられる．

(28) ただし，存在者とそうでない対象の区別が一般に一と多の区別に根拠を持つとは言えない．例えば “every”, “any”, “a”, “some” によって形成される表示句 (註 (24) を参照) も，存在者ではない対象 (存在者の結合) を表示するとされるが，これらの対象が存在者ではない理由は一と多の区別によっては説明できない．(ついでに言えば，筆者にはこれらが存在者でないとされた理由は分からない．)

(29) ただし，ラッセル自身は「クラスはその要素からなる全体とは異なる (distinct)」(§70) とか，「多としてのクラスと一としてのクラスを同一視することには一定の誘惑がある」が，「多としてのクラスと一としてのクラスの根本的な違い」というものがある (§74)，といった表現を用いている．

(30) 「ラッセルのパラドクス」にはいくつかのバージョンがあり，『数学の原理』の中では述語，命題関数，関係，クラスのそれぞれについて矛盾が導出されているが，ここでは $r = \{x|x \notin x\}$ なるクラスについて $r \in r$ の真偽を考えたときに導出される矛盾のことを考えておけばよい．以下の本文に述べられる「いくつかの異なる主張」との関連について大まかに触れると，(1) の下ではまさに矛盾が導出されるが，(2) と (3) の下では，$x \in r$ の x への r 自体の代入を (r は一としてのクラスにはならない，あるいは r より一つ低いタイプにならないとして) 禁じることで，矛盾の解消が目指される．

い」(§104）というものである．(2）しかし，この「公理」が普遍的に妥当すると考えることがパラドクスの源泉だ（§104）とラッセルは考え，結局，当該のクラスがある特殊な種類の命題関数（ここでは詳しく述べないが，「二次形式（quadratic form)」と呼ばれる命題関数）によって定義される場合には，多としてのクラスのみが認められ，一としてのクラスの存在は否定されるとしている（ibid.)．（また，§70 ではこの主張を先取りして「後で見るように，純粋な集合体という意味での全体の観念は，多としてのクラスという観念が適用できる場合に常に適用可能なわけではない」と言われている．）そしてこの，二次形式的（quadratic）命題関数によって定義される場合を除いて，多としてのクラスの要素は一つの全体を形成する，という立場が，『数学の原理』本編での公式的な立場である（例えば §§135, 139 を参照)．(3）ところが，『数学の原理』付論に至るとさらに，多としてのクラスに対応する単一の存在者などというものはないのだ，とする立場が取られることになる（付論 A, §487 以降，及び付論 B)．

さて，今見たようなパラドクスへの対処との関係を前にすると，そもそも多としてのクラスと一としてのクラスの区別というもの自体が，パラドクスへの対処のために考案された（成功しているかどうかは別として）ものなのではないか，という考えは自然に生じるだろう．しかし，実際のところは，多としてのクラスと一としてのクラスという区別に当たるものは，1900 年までに書かれた（すなわちパラドクスの発見以前に書かれた）草稿 (Russell 1993) 中で既に（“collection” と “whole” の区別という形で）大きく取り上げられていたものなのである．それゆえ，この区別が，パラドクスへの対処に役立つということの他にどのような動機づけを持っていたのか，と問うことは十分正当である．本論の目的にとって重要なのは，そのような動機づけが何だったのかということである．

多としてのクラスと一としてのクラスの区別は，差し当たり，複数と単数という文法的な違いを手がかりにして立てられている．しかし，そもそもこの違いが重視されるのはなぜだろうか．実際のところ，多としてのクラスの別名である「数的連言（a numerical conjunction)」とか「集まり（a collection)」も単数であり，多としてのクラスと一としてのクラスを厳密に区別するならば，こうした表現によっては A and B のような対象に言及することはできないはずだが，ラッセルはこの問題を「それを回避するための手段は存在しないので，指摘はしつつ許容しなければならない文法的困難」(§§71, 130）として素通りしてしまっているのである．ラッセルは確かに「文法は，我々の教師ではないにしても，我々の案内人として捉えられる」(§46）としているが，他方で「文法的な区別が本当の哲学的な違いに対応すると無批判に仮定するわけにはゆかない」(ibid.）のだから，複数と単数という文法的な違いが「本当の哲学的な違い」に対応すると言うための根拠は必要であろう．また，存在者（項）の特徴づけ（本論第 1 節を参照）には「一つとして数えられる」という条件が含まれていたので，この特徴づけを文言通りに適用すれば，確かに数的連言は存在者ではない．しかし，この「一つとして数えられる」ということがどういう重要性を持つのか，ということがまさに問われなければならないのである．

おそらく問題は，論理的主語という観念に関わっている．ラッセルは次のように言う．

> 複数の項 (a plurality of terms) は，それについて数が主張される際の論理的主語 (the logical subject) ではない．(§70n)
> A and B are two といった命題において，論理的主語は存在しない．ここでは A についてでもなく，B についてでもなく，両者から成る全体についてでもなく，厳密に A と B について，かつそれのみについて主張がなされている．すなわち，主張は必ずしも単一の主語についてのものであるとは限らず，多くの主語についてのものでもありうるように思われるのである．(§74)

しかしこれもまた，文法的な違いではないかという印象を受ける．いずれにせよ A and B についても，それについて何かを主張することができるという点で他の存在者との違いがないのであれば，A and B を “the logical subject” と単数で呼ぶことができなくても，大した違いではないのではないか．しかしラッセルは『数学の原理』付論 A において，一としてのクラスを完全に放逐したときに生じる「論理的困難」について次のように述べている．

> もし主語になりうるものは単一の項のみであるなら，この考え［一としてのクラスなどない，とする考え］に対する最大の反論は，u が本質的に多くの項を代理する記号だとすると，我々は誤りに陥る危険をおかすことなしに u を論理的主語にすることはできない，というものである．我々はもはや，クラスのクラスについて語ることはできない，と思われるかもしれない．というのも，そのようなクラスの要素となるべきものは単一の項ではなく，それぞれが多くの項なのである．我々は，多くのもののそれぞれについて述語を主張する，という意味以外に，多について述語を主張することはできない，とも思われよう．ところがここで必要とされているのは，多としての多くのものについての述語の主張であり，多くのものそれぞれについてのものでもなく，多くのものの全てがなす全体（もしあればの話だが）についてのものでもないのである．つまり，クラスのクラスは多くの多（many many’s）だ，というわけであり，その構成要素（constituent）はそれぞれが多でしかなく，いかなる意味でも単一の構成要素にはなりえないようなものだ，というのである．ところが私としては，こうした外見上の論理的困難にもかかわらず，これこそがまさに数を主張するために必要なものだ，と主張せざるを得ないのである．(§489)

この叙述も混沌としてはいるが，一つの問題を取り出すことはできる．すなわち，多としてのクラスが別のクラスの一つの要素であるという事態をどう理解すべきか，という問題である．筆者としては，この点に関して決定的な意見を持つに至っていないが，おそらくここには（『数学の原理』に固有のものであれ，より一般的な含意を持つものであれ）何らかの問題があるのではないかという印象は持つ．差し当たりここでは，ラッセルの考えのあらすじを紹介するに留めておこう．

ラッセルのここでの考えは次のようなものであると思われる．ラッセルは，多としてのクラスとその要素の間の関係を “x is one among u’s” と表現される関係として説明している（§76）．この表現には “one” という表現が含まれており，これを文字通りに取れば[(31)]，多としてのクラスの要素は，それ自体多としてのクラスである場合でも，何らかの意味で一つでなければならない，ということになると思われる．つまり，A and B のような数的連言も，通常の存在者が一つであると言う場合とは別の意味で一つでなければならない．こうしてラッセルは，次のように言う．「one は，クラスについて主張されるときには，項について主張されるときのそれとはいくぶん異なっていると考えられねばならない．すなわち，one の意味には，one term について語る際に適用可能な意味と，one class について語る際に適用可能な意味があり，さらに両方の場合に適用可能な一般的な意味もある」(§490)．さらに，この考えに基づいてラッセルは，存在者，存在者のクラス，存在

(31) しかし，これを文字通りに取るべきなのかは議論の余地がある．『数学の原理』第二章においてラッセルは，ペアノの記号論理学を修正した記号論理学の枠組みを提案しているが，そこではクラスとその要素の関係は定義不可能観念（indefinable）の一つに数えられている（§20）．しかもこの点は，§1 で論理定項（logical constant）を枚挙したときから，§106 において第一部全体のまとめを述べるときまで変わっていない．ただし，ラッセルにとって定義不可能観念は，必ずしも分析不可能な単純観念である必要はなく（例えば，同じく定義不可能観念に数えられている形式含意（formal implication）に関しては，§§42–44, および第七章・第八章において分析が加えられている），他の数学の観念を定義するのに十分なほど単純であればよかったのだから，クラスとその要素の関係に one の観念が含まれていると考えても，この関係が定義不可能観念であるという考えと直ちに矛盾するわけではない．そして，one についてのラッセルの記述を見ていると，ラッセルはまさにそのように考えていたように思われるのである．

者のクラスのクラス，等々がそれぞれ異なる意味で「一つ」であるとし，これらは互いにタイプ（type）を異にする，と主張することになるのである．

しかし，一と多の区別が本当に重大なものであるのなら，ラッセルはそもそもなぜ多としてのクラスなどというものを導入したのだろうか．パラドクスへの対処がその理由とならないことは先に述べた．そして，もしパラドクスに対処する必要をラッセルが感じていなかったとしたら，ラッセルのクラス理論は，各々のクラス概念に対して多としてのクラス（数的連言）が対応し，多としてのクラスには必ず一としてのクラスが対応する，というものになっていたはずである．なぜわざわざ上のような問題を引き起こすような，多としてのクラスという対象を間に挟む理論をラッセルは作ったのだろうか．なぜはじめから，クラス概念に一としてのクラスを対応づける理論を作らなかったのだろうか．実際，本論第 2 節で述べた要請は，多としてのクラスよりも一としてのクラスの方がより望ましい仕方で満たすことができるように思われる．とりわけ，抽象による定義の改良に多としてのクラスが用いられた場合，クラスとして取り出される「共通性質」は，定義の元となる関係 R が適用される対象のクラスであり，一つ上のタイプとなる．例えば基数の場合で言うと，定義の元となる関係は，クラスの間で適用される「等数性（similarity）」という関係であり，定義される基数はクラスのクラスとなる．しかし，そうすると例えば基数のクラスを考えてその要素の数を問題にする場合，その数はクラスのクラスのクラスとなってしまい，存在者のクラスに帰される基数とは別の対象だということになってしまう．これは基数の理論としてはかなり扱いにくいものとなるだろう．従ってここからも，必要なのは多としてのクラスではなく，一としてのクラスであったと言えるように思われる．多としてのクラスはいかにして必要とされたのだろうか．

『数学の原理』においてはいくつか，多（many）や一以外の数（numbers other than one）が述定されるものは数的連言でなければならない，といった趣旨の叙述が見られる（§§71, 130）．また，先にも触れた『数学の原理』の草稿 (Russell 1993) では，集まり（これは数的連言と同一視できる．註 (23) を参照）という観念が，数の帰属される対象という位置づけで登場する．しかしこれは，一としてのクラス以外に多としてのクラスが必要であるとする理由としては不十分である．というのも，この主張はより正確に言えば，「数の主張は，多くの項からなるクラスが算術的に一つ（arithmetically one）になることなく論理的主語となりうるということに依存している」(§132) ということなのであり，かつ，あるクラス u が「算術的に一つ」であるとは，現代的な表記で書けば $u \neq \phi \land \forall x \forall y((x \in u \land y \in u) \to x = y)$ という意味である（§§123, 128）．それゆえ，クラスと要素の関係（$\in$）が適切に定義ないし説明できていれば，一としてのクラスにも多としてのクラスにも同様に数が適用可能なのである．

筆者にはむしろ，多としてのクラスの理論は，一としてのクラスの理論の基礎として捉えられていたのではないかと思われる．多としてのクラス，すなわち数的連言が，限定付きではあれ，日常言語の中にその対応物を見出すことができる（すなわち，要素が十分少ない場合の “A_1 and A_2 and ... and A_n” という表現）という点は既に述べた．一としてのクラスについても，日常言語の中にある意味でその対応物が見出せないわけではない．例えば men の要素から成る全体に言及するための表現として “the human race” があり，soldiers の要素から成る全体に言及するための表現として “the army” がある(32)．しかし問題は，クラス概念が与えられたとき，その外延を与える一としてのクラスの存在が常に保証できるのか，ということである．man というクラス概念に対して the human race という全体が存在し，soldier というクラス概念に対して the army

(32) しかし，これらはおそらく表示句である（§58 を参照）．そうだとすれば，ここで挙げた一としてのクラスには，多としてのクラスにとっての “A and B” と同様の意味での「日常言語の対応物」は存在していないことになるだろう．しかし，一としてのクラス一般についても同じことが言えるかどうかは明らかでない．

という全体が存在する，と言うだけでは，この関係がクラス概念一般に拡張できるのかどうかは全く明らかではない．これに対して，クラス概念と数的連言の間の関係は，前節で見た通り，少なくとも要素が十分少ない場合には完全な対応付けが見出され，この対応付けの系統性から言って，要素が枚挙できない場合への拡張も十分に自然なものだと言えるのである．

もちろんそうは言っても，多としてのクラスと一としてのクラスの間の対応付けをどのように正当化するか，という問題は残る．筆者としては，事情は概ね次のようなものだったのではないかと考える．ラッセルにとって，最も基本的な意味でのクラスとは数的連言のことであった．数的連言は文法的に複数である．しかし，我々は一旦数的連言に言及するための表現を手にしてしまえば，“a class” とか “a numerical conjunction” といった単数形の表現によってそれに言及しようとする，といったことを自然に行ってしまう．もしこうした実践がこれまでのところ大した破綻をきたしてはいないのだとすれば，それはこの実践が「多としてのクラスの要素は常に一つの全体を形成する」という「論理的事実」（§71）によって支えられているからではないか．そのようにラッセルは考えたのだと思われる．ところで既に触れた通り，『数学の原理』におけるラッセルは，パラドクスの教訓をしばしば，多としてのクラスの要素の全ては常に一つの全体を形成するわけではない，という形で表現している（§§104, 488）．上の考えからすればこのことは，本来複数形で語るべきことを単数形で語ってしまうという我々の習慣が矛盾をもたらすことがある，とも表現できよう．

5　結び

かくして，『数学の原理』のクラス理論の概要は次のようにまとめられる．『数学の原理』の議論にとっては，概念という内包的な分類原理のそれぞれに対応するような仕方で外延的な分類原理（クラス）を見出すことが必要であった．表示と数的連言による，多としてのクラスの理論はこの要請にうまく応えるものであった．数的連言自体は多であるが，単数形の表現によって多に言及してしまうという我々の実践の背後にある「論理的事実」として，数的連言の要素は一つの全体を形成するものと考えられた．しかしラッセルのパラドクスを経て，この「論理的事実」はその妥当性に制限が加えられ，『数学の原理』付論においては完全に放棄された．

本論冒頭に挙げた問いの内，「タイプの区別へと導くような区別を予め内在させた仕方でクラスの理論を考えたのはなぜなのか」という問いに対しては，ここから一応の答えが与えられたことになる．すなわち，確かに（ラッセルに従えば）数的連言は多であり，その点でタイプの区別へと導くようなものではあったのだが，他方でこの観念には，クラスという観念に関してラッセルが課していた要請にうまく応えるという利点もあったのである．しかし，一と多の区別そのものを巡る問題に関しては，本論では十分な解明を与えることはできなかった．いずれ別の機会を期したい．

参考文献

Cocchiarella, N. (1980). “The Development of the Theory of Logical Types and the Notion of a Logical Subject in Russell's Early Philosophy”. *Synthese* 45, 71–115.

Hylton, P. (1980). “Russell's Substitutional Theory”. *Synthese* 45, 1–31.

Hylton, P. (1990). *Russell, Idealism and the Emergence of Analytic Philosophy.* Oxford: Oxford University Press.

飯田隆 (1987).『言語哲学大全 I：論理と言語』．勁草書房．

Landini, G. (1998). *Russell's Hidden Substitutional Theory*. Oxford: Oxford University Press.
Russell, B. (1937). *The Principles of Mathematics* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
Russell, B. (1993). "The Principles of Mathematics, Draft of 1899–1900". In G. H. Moore (Ed.), *Toward the "Principles of Mathematics", 1900–02*, Volume 3 of *The Collected Papers of Bertrand Russell*, pp. 9–180. New York: Routledge.
戸田山和久 (2003).「置き換え理論，そしてラッセルの数学の哲学についてまだわかっていないこと」.『科学哲学』36 巻 2 号，1–21.
戸田山和久 (2007).「ラッセル」. 飯田隆（編),『哲学の歴史 第 11 巻：論理・数学・言語』，197–276 ページ. 中央公論新社.