事象と確率

目次

本スライドの内容

このスライドは，次の書籍の第 1 章「事象と確率」の内容に基づく．

- 『ガイダンス 確率統計：基礎から学び本質の理解へ』，発行：サイエンス社，ISBN：978-4-7819-1526-5.

書籍に関する最新の情報は，以下の URL から入手することができます．

https://www.saiensu.co.jp

この URL は，サイエンス社が運営しているホームページです．

概要

偶然性に支配される現象を記述するためには，確率は欠かすことのできない概念である．このスライドでは，確率の基本的な性質を明らかにし，条件付き確率，事象の独立性やベイズの定理について解説する．

用語 (1)

1 個のさいころを投げるとき，出る目の数は $1, 2, 3, 4, 5, 6$ のうちのどれかであるが，どの目が出るかは偶然によって決まる．このさいころの例のように，同じ状態のもとで繰り返すことができ，その結果が偶然によって決まる実験や観察などを試行という．試行の結果起こる事柄を事象といい，試行の結果起こり得る個々の結果を根元事象 (または標本点) という．つまり，根元事象とは，観測されうる事象の最小単位である．事象は $A, B, C, \cdots$ などの大文字の記号で表し，根元事象は $\omega, \omega', \cdots$ などの小文字の記号で表す．すべての根元事象を集めた集合は標本空間 (または全事象) といい，$\Omega = \{\omega, \omega', \cdots\}$ と表す．このとき，事象は，ある条件をみたす根元事象の集まりである，つまり標本空間 Ω の部分集合である，と捉えることができる．根元事象を 1 つも含まないものを $\emptyset$ で表し，この $\emptyset$ を空事象とよび，$\emptyset$ も形式的に事象とみなす．

用語 (2)

このように，事象は集合の言葉を用いて表すことになる．たとえば，1 から 10 までの偶数全体の集合 A の表記には，

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

のように，要素を書き並べて表す外延的記法と，

$$A = \{2n \mid n = 1, 2, 3, 4, 5\}$$

のように，要素の条件を述べて表す内包的記法がある．外延的記法は何が集合の要素かわかりやすいのが利点なのに対し，内包的記法は集合の性質がわかりやすいのが利点である．この 1 から 10 までの偶数全体の集合 A において，2 が A の要素であることを，2 が A に属するといい，$2 \in A$ と表記する．一方で，3 は A の要素ではないので，この場合は $3 \notin A$ と表記する．

用語 (3)

次に，実数すべてからなる集合を $\mathbb{R}$ や $(-\infty, \infty)$ と表記し，その部分集合である区間を

$$[a, b] = \{x \mid a \le x \le b\},\ (a, b] = \{x \mid a < x \le b\},$$
$$[a, b) = \{x \mid a \le x < b\},\ (a, b) = \{x \mid a < x < b\},$$
$$(-\infty, a] = \{x \mid x \le a\},\ (a, \infty) = \{x \mid a < x\}$$

などの記号を用いて表記する．

用語 (4)

集合 A と B の直積集合とは，A から 1 つ要素 x を取り出し，B からも 1 つ要素 y を取り出して，組にした (x, y) を要素として持つ新たな集合のことを指す．集合 A と B の直積集合は

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ \ y \in B\}$$

と表記する．座標平面上の点は実数 x, y を用いて (x, y) で表されるため，座標平面は $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ の直積集合 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ とみなせる．なお，$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ は，別の記号 $\mathbb{R}^2$ で表記することも多い．また，$[a, b] \times [c, d]$ は座標平面上の長方形を表す．他にも，座標平面上の単位円板 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ を考えるとき，D 内の第 1 象限 A は

$$A = \{(x, y) \mid (x, y) \in D,\ \ x > 0,\ \ y > 0\},$$
$$A = \{(x, y) \in D \mid x > 0,\ \ y > 0\}$$

などの表記の仕方がある．

例 1.1.1

2 枚の硬貨を同時に投げるとき，4 つの根元事象を

$$\omega_1 = (\text{表}, \text{表}),\ \omega_2 = (\text{表}, \text{裏}),\ \omega_3 = (\text{裏}, \text{表}),\ \omega_4 = (\text{裏}, \text{裏})$$

と表し，標本空間を $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ と定める．たとえば，「少なくとも表が 1 枚現れる事象」は，Ω の部分集合として $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ と表せる．なお，Ω のすべての事象は次の 16 個の集合である．

$$\begin{aligned}
&\emptyset,\ \{\omega_1\},\ \{\omega_2\},\ \{\omega_3\},\ \{\omega_4\},\\
&\{\omega_1, \omega_2\},\ \{\omega_1, \omega_3\},\ \{\omega_1, \omega_4\},\ \{\omega_2, \omega_3\},\ \{\omega_2, \omega_4\},\ \{\omega_3, \omega_4\},\\
&\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\},\ \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\},\ \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\},\ \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\},\ \Omega.
\end{aligned}$$

用語 (5)

一般に事象 A, B において，

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ または } \omega \in B\}$$

を A と B の和事象といい，A または B が起こることを意味する．

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ かつ } \omega \in B\}$$

を A と B の積事象といい，A と B が同時に起こることを意味する．なお，3 つ以上の事象の場合も，同様に和事象と積事象を考えることができる．

$$A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$$

を A の余事象といい，A が起こらないことを意味する．別の言い方をすると，余事象 A^c は，A 以外が起こることを意味する．

用語 (6)

また $A \cap B^c$ を差事象といい，$A \setminus B$ という記号で表す．差事象 $A \setminus B$ は，A は起こるが B は起こらないことを意味する．

$A \cap B = \emptyset$ (空事象) のとき，A と B が同時に起こることがないことを意味しており，A と B は (互いに) 排反または (互いに) 素であるという．A と B が排反のとき，$A \cup B$ を，$A + B$ という別の記号で表すこともある．

A に含まれる根元事象 ω が必ず B にも含まれるとき，つまり「$\omega \in A$ なら $\omega \in B$」が成り立つとき，A は B の部分事象であるといい，$A \subset B$ または $B \supset A$ と表す．

$A \subset B$ かつ $B \subset A$ が成り立つとき，A と B は等しいといい，$A = B$ と表す．

用語 (7)

事象の無限列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ に対して，少なくとも 1 つの A_n が起こる事象 (和事象) を $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ と表し，すべての A_n が起こる事象 (積事象) を $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ と表す．この和事象と積事象をそれぞれ内包的記法で表すと

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_i \text{ となる自然数 } i \geq 1 \text{ が存在 }\},$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \text{任意の自然数 } i \geq 1 \text{ に対して} \omega \in A_i \text{ が成立 }\}$$

である．また，$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ が (互いに) 排反であるとは，$i \neq j$ なら $A_i \cap A_j = \emptyset$ が成立することをいい，この場合は $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ を，$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ や $A_1 + A_2 + A_3 + \cdots$ という別の記号で表すこともある．なお，以上で説明した表記方法は，事象だけでなく一般の集合の演算に対しても用いられる．

例 1.1.3

A, B, C を 3 つの事象とする.

1. $A \cup B \cup C$ は「3 つの中のどれかが起こる」ことを意味する.
2. $A \cap B \cap C^c + A \cap B^c \cap C + A^c \cap B \cap C$ は「2 つだけが起こる」ことを意味する.
3. $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ は「2 つは起こる」ことを意味する.
4. $(A \cap B \cap C)^c$ は「全部は起こらない」ことを意味する.

例 1.1.4

一般に，事象 A, B, C に対し，次の 5 つの関係式が成り立つ．

(1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (分配法則 1)

(2) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (分配法則 2)

(3) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
(ド・モルガンの法則)

(4) $(A^c)^c = A, \quad A \subset B \iff A^c \supset B^c$

(5) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

注意 1.1.1

このスライドでは，事象とは，「試行の結果起こる事柄」であり，かつ標本空間 Ω の部分集合であると説明した．しかし，「確率 P を与える対象としての事象」を考察する場合，「一定の条件をみたす Ω の部分集合の集まり」(完全加法族) に着目し，「この完全加法族に属する Ω の部分集合が事象である」と，数学的に厳密に捉えなおす必要がある．その理由として，「Ω の部分集合がすべて事象である」と誤解すると，確率が当然みたすべき性質と両立できずに論理的に破綻する可能性があることが挙げられる．しかし，このスライドで解説する話題であれば，「事象とは試行の結果起こる事柄である」と直観的に捉えた方が初学者には理解しやすいと考えられるため，このスライドでは完全加法族の概念は持ち出さずに議論を進める．

1 つの試行において，ある事象 A が起こることが期待される割合を，事象 A の確率といい，この割合を $P(A)$ で表す．このように，事象を 1 つ与えると実数が得られるため，確率は「事象を変数とする実数値関数」とみなせる．しかし，確率は，事象を変数とする関数であれば何でも良いわけではなく，3 つの条件をみたす関数でなければならない．その 3 条件とは

- (P1) 確率は 0 以上かつ 1 以下の値を取り得る
- (P2) ある事象が同時には起こり得ない複数の事象に分割されるとき，分割前の事象の確率は，分割されたそれぞれの事象の確率の和になる
- (P3) 標本空間の確率は 1 であり，空事象の確率は 0

である．以上の内容を数学的に言い換えると次頁のとおりである．

定義 1.2.1 (確率の公理)

定義 1.2.1 (確率の公理)

Ω を標本空間とする．各事象 A に対して，実数値 $P(A)$ を 1 つ対応させる関数 P が次の 3 条件 (P1), (P2), (P3) をみたすとき，関数 P を Ω 上の確率とよび，標本空間 Ω と関数 P の組 (Ω, P) を確率空間という．

(P1) 任意の事象 A に対して $0 \leq P(A) \leq 1$

(P2) 事象の列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ が互いに排反ならば

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad (\text{完全加法性})$$

(P3) 標本空間に対して $P(\Omega) = 1$ であり，空事象に対して $P(\emptyset) = 0$

注意 1.2.3

(P2') $A \cap B = \emptyset$ ならば $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (加法性)

[証明] $A_1 = A,\ A_2 = B,\ A_n = \emptyset\ (n \geq 3)$ とおけば，$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ も互いに排反であり，$A \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ と表せる．したがって，(P2) より，式変形

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \\
&= P(A) + P(B) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots = P(A) + P(B)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

注意 1.2.3

(P2") 事象 $A_1, \ldots, A_n$ が互いに排反なら

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

[証明] $A = A_1$, $B = \bigcup_{i=2}^{n} A_i$ とおくと，関係式

$$A \cup B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad A \cap B = \bigcup_{i=2}^{n} (A_1 \cap A_i) = \bigcup_{i=2}^{n} \emptyset = \emptyset$$

が成り立つ．したがって，(P2') より，次式が成り立つ．

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = P(A_1) + P\left(\bigcup_{i=2}^{n} A_i\right).$$

同様の議論を $n-2$ 回繰り返すことで，(P2") が得られる．

例 1.2.2

標本空間 Ω が長さ (1 次元)，面積 (2 次元)，体積 (3 次元) を持つとき，事象 A の幾何的確率 $P(A)$ を

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad (\text{事象 } A \text{ の大きさの } \Omega \text{ の大きさに対する割合})$$

と定義し，$P(\cdot)$ を Ω 上の幾何的確率とよぶ．ここで，$|\cdot|$ は事象の大きさ，つまり 1 次元なら長さ，2 次元なら面積，3 次元なら体積を表す．長さ，面積，体積の性質より，$P(\cdot)$ は加法性をみたす．なお，$P(\cdot)$ は完全加法性をみたすことも知られている．たとえば 2 次元の幾何的確率は，「ルーレットやダーツなどの試行の結果として起こる事象の確率」を計算するときに利用する．

例題 1.2.2

例題 1.2.2

標本空間を $\Omega = \{1, 2, 3\}$ とする．次の (1), (2), (3) の P のうち，Ω 上の確率ではないものをすべて選び，その理由を答えよ．

(1) $P(\emptyset) = 0,\ P(\{1\}) = \dfrac{1}{3},\ P(\{2\}) = \dfrac{1}{3},$
$P(\{1,2\}) = \dfrac{2}{3},\ P(\{2,3\}) = \dfrac{1}{2},\ P(\Omega) = 1.$

(2) $P(\emptyset) = 0,\ P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dfrac{1}{2},\ P(\{3\}) = 0,$
$P(\{1,2\}) = P(\{1,3\}) = P(\{2,3\}) = \dfrac{1}{2},\ P(\Omega) = 1.$

(3) $P(\emptyset) = 0,\ P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dfrac{1}{2},\ P(\{3\}) = 0,$
$P(\{1,2\}) = 1,\ P(\{1,3\}) = P(\{2,3\}) = \dfrac{1}{2},\ P(\Omega) = 1.$

例題 1.2.2

[解答]　まず，(1) の P は Ω 上の確率ではない．なぜなら

$$1 = P(\Omega) = P(\{1\} \cup \{2,3\}) \neq P(\{1\}) + P(\{2,3\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

となり，この P は加法性をみたさないためである．次に，(2) の P も Ω 上の確率ではない．なぜなら

$$\frac{1}{2} = P(\{1,2\}) = P(\{1\} \cup \{2\}) \neq P(\{1\}) + P(\{2\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

となり，この P も加法性をみたさないためである．なお，(3) の P は Ω 上の確率である．

定理 1.2.1 (確率の基本公式)

確率の公理を用いると，次の「確率の基本公式」を証明することができる．

定理 1.2.1 (確率の基本公式)

(Ω, P) は確率空間とする．次が成り立つ．

(P4) 事象 A, B が $A \subset B$ のとき $P(A) \leq P(B)$

(P5) 事象 A に対して，$P(A^c) = 1 - P(A)$

(P6) 事象 A, B に対して，

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(P7) 事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に対して，

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

例題 1.2.3

例題 1.2.3

(Ω, P) は確率空間とする．事象 A, B が $P(A) = 1/5$, $P(A \cap B) = 1/7$ をみたすとき，$P(A^c \cup B)$ を求めよ．

[解答]　$A^c \cup B = A^c \cup (A \cap B)$ と表すと，A^c と $A \cap B$ は互いに排反である．したがって，P の加法性と (P5) より，$P(A^c \cup B)$ は次のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
P(A^c \cup B) &= P(A^c) + P(A \cap B) \\
&= 1 - P(A) + P(A \cap B) = \frac{33}{35}.
\end{aligned}
$$

定義 1.3.1

定義 1.3.1

(Ω, P) は確率空間とし，$P(A) > 0$ となる事象 A を考える．このとき，事象 A が起こったときに事象 B が起こる確率を

$$P_A(B) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

で表し，この $P_A(B)$ を「A が起こったときの B の条件付き確率」とよぶ．なお，$P_A(B)$ は $P(B|A)$ とも表す．

例 1.3.1

1 枚の硬貨を 5 回続けて投げる試行を考える．「少なくとも 2 回以上表が出た」ことが事前にわかっているとき，「ちょうど 3 回表が出た確率」を計算したい．そのためにまず，事象 A と B を次のように定める．

$$A = \{\text{ 少なくとも 2 回以上表が出る }\}, \quad B = \{3 \text{ 回表が出る }\}.$$

このとき，$P(A)$ と $P(B)$ は次のように計算できる．

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1+5}{2^5} = \frac{13}{16}, \quad P(B) = \frac{{}_5C_3}{2^5} = \frac{5}{16}.$$

この計算結果と，$A \cap B = B$ より，求める確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{5}{13}.$$

定義 1.3.2，注意 1.3.2

2 つの事象 A, B が独立であるとは，A と B が互いに影響を与えないという意味であり，このことを数学的に表現すると次のとおりである．

定義 1.3.2

(Ω, P) は確率空間とする．事象 A, B が独立であるとは，関係式 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立つことをいう．

注意 1.3.2　事象 A, B が独立であり，かつ $P(A) > 0$ をみたすとき，次式が成り立つ．

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B).$$

したがって，このとき「A が起こったか否か」は B が起こる確率に影響を与えない．

例 1.3.2

(Ω, P) は確率空間とする．事象 A, B が独立ならば，A と B^c，A^c と B，A^c と B^c の 3 つの「事象のペア」のうち，どのペアも独立である．

[証明]　まず，事象 C と D に対して，C は互いに排反な 2 つの事象の和事象として $C = (C \cap D) \cup (C \cap D^c)$ と表せるため，
$P(C \cap D) = P(C)P(D)$ であれば

$$\begin{aligned} & P(C) = P(C \cap D) + P(C \cap D^c) = P(C)P(D) + P(C \cap D^c) \\ \Longrightarrow\quad & P(C \cap D^c) = P(C)(1 - P(D)) = P(C)P(D^c) \end{aligned}$$

が成り立つ．このことは，「一般に，2 つの事象が独立であれば，その一方を余事象に置き換えた事象のペアも独立である」ことを意味する．したがって，A と B の独立性から，A と B^c の独立性や，A^c と B の独立性が得られる．さらに，A と B^c の独立性から，A^c と B^c が独立性が得られる．

例題 1.3.1

例題 1.3.1

1 個のさいころを 1 回投げるとき，A は偶数の目が出る事象，B は 3 以下の目が出る事象，C は 1 または 2 の目が出る事象とする．このとき，A と B は独立でないが，A と C は独立であることを示せ．

[解答]　$P(A) = P(B) = 1/2$，$P(C) = 1/3$ および次の計算結果からわかる．

$$P(A \cap B) = P(\{2 \text{ の目が出る }\}) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4} = P(A)P(B),$$
$$P(A \cap C) = P(\{2 \text{ の目が出る }\}) = \frac{1}{6} = P(A)P(C).$$

定義 1.3.3 (事象の独立)

複数の事象の独立性を定義すると次のとおりである．

定義 1.3.3 (事象の独立)

(Ω, P) は確率空間とする．n 個の事象 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ が独立であるとは，$1 \leq p \leq n$ となる任意の自然数 p と，$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$ をみたす任意の p 個の自然数の組 $(i_1, i_2, \cdots, i_p)$ に対して，関係式

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_p}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_p})$$

が成り立つことをいう．

定義 1.3.3 (事象の独立)

定義 1.3.3 にしたがえば，たとえば 3 つの事象 A, B, C が独立であるとは，次の 4 つの関係式が成り立つことをいう．

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad P(B \cap C) = P(B)P(C),$$
$$P(A \cap C) = P(A)P(C), \quad P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$$

なお，上記の 4 つの関係式のうち，

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

だけが成立しても，A, B, C のどの 2 組も独立でないことがある．逆に，A, B, C のどの 2 組が独立でも，

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

が成り立たないことがある．

例題 1.3.2 (2 人の子供問題)

例題 1.3.2 (2 人の子供問題)

ある夫婦には 2 人の子供がいる．このとき，次の問に答えよ．

(1)： 2 人の子供のうち，1 人目の子供 (上の子) の性別が男とわかったとき，2 人目の子供 (下の子) の性別も男である確率を求めよ．

(2)： 2 人の子供のうち，少なくとも 1 人は男の子がいるとわかったとき，2 人の子供の性別がどちらも男である確率を求めよ．

(3)：2 人の子供のうち，無作為に 1 人を選んで調べた性別が男であったとき，もう 1 人の子供の性別も男である確率を求めよ．

ただし，生まれてくる子供の性別は等しい確率で男女になるとし，兄弟姉妹間での性別は独立とする．

例題 1.3.2 (2 人の子供問題)

[解答]　男の子を b と表し，女の子を g と表す．

(1)：たとえば (g, b) と書くとき，括弧の左の g は 1 人目の子供 (上の子) が女であることを意味し，括弧の右の b は 2 人目の子供 (下の子) が男であることを意味するものとする．このとき，標本空間 Ω を次で定義する．

$$\Omega = \{(b, b),\ (b, g),\ (g, b),\ (g, g)\}.$$

次に，「兄弟姉妹間での性別の独立性」より，Ω 上の確率 P は

$$P(\{(b, b)\}) = P(\{(b, g)\}) = P(\{(g, b)\}) = P(\{(g, g)\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

と定義すればよい．このとき，事象 A, B を

$$A = \{(b, b),\ (b, g)\}, \quad B = \{(b, b)\}$$

と定めると，求める確率 $P_A(B)$ は次のように計算できる．

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{(1/4)}{(2/4)} = \frac{1}{2}.$$

例題 1.3.2 (2 人の子供問題)

[解答 (続き)]　男の子を b と表し，女の子を g と表す．

(2)：ここでは，(1) と同じ確率空間 (Ω, P) と同じ事象 B を用いて説明する．このとき，事象 C を

$$C = \{(b,b),\ (b,g),\ (g,b)\}$$

と定めると，求める確率 $P_C(B)$ は次のように計算できる．

$$P_C(B) = \frac{P(C \cap B)}{P(C)} = \frac{P(B)}{P(C)} = \frac{(1/4)}{(3/4)} = \frac{1}{3}.$$

例題 1.3.2 (2 人の子供問題)

[解答 (続き)]　男の子を b と表し，女の子を g と表す．

(3)：たとえば (g, b, i) $(i = 1, 2)$ と書くとき，括弧の左の g は 1 人目の子供 (上の子) が女であることを意味し，括弧の真ん中の b は 2 人目の子供 (下の子) が男であることを意味し，括弧の右の i は，$i = 1$ のとき無作為に選んだ子供が 1 人目の子供 (上の子) であり，$i = 2$ のとき無作為に選んだ子供が 2 人目の子供 (下の子) であることを意味するものとする．このとき，標本空間 Ω を次で定義する．

$$\begin{aligned}\Omega =\{&(b, b, 1),\ (b, g, 1),\ (g, b, 1),\ (g, g, 1),\\ &(b, b, 2),\ (b, g, 2),\ (g, b, 2),\ (g, g, 2)\}.\end{aligned}$$

例題 1.3.2 (2 人の子供問題)

[解答 (続き)] $\cdots$ (3) の解答の続き

次に，「兄弟姉妹間での性別の独立性」と「性別を調べる子供の選び方が無作為であること」より，Ω 上の確率 P は

$$
\begin{aligned}
P(\{(b,b,i)\}) = P(\{(b,g,i)\}) = P(\{(g,b,i)\}) = P(\{(g,g,i)\}) \\
= \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \qquad (i = 1, 2)
\end{aligned}
$$

と定義すればよい．このとき，事象 A, B を

$$
\begin{aligned}
A &= \{(b,b,1),\ (b,g,1),\ (b,b,2),\ (g,b,2)\}, \\
B &= \{(b,b,1),\ (b,b,2)\}
\end{aligned}
$$

と定めると，求める確率 $P_A(B)$ は次のように計算できる．

$$
P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{(2/8)}{(4/8)} = \frac{1}{2}.
$$

注意 1.3.5 (2 人の子供問題)

不確実性を伴う現実の事象を適切に表現し分析するためには，与えられた情報と設定した問をもとに，適切な確率空間を選択することが重要である．以下では，例題 1.3.2 で紹介した「2 人の子供問題」を用いてこのことを説明する．

たとえば，ある世帯 A の家の隣に，別の世帯 B が引っ越してきたとする．その世帯 B の夫婦が，世帯 A のもとに引越しの挨拶に来て，その会話から「世帯 B には 2 人の子供がいる (どちらも性別は不明)」ことがわかった．ある日，世帯 A の妻が，世帯 B の家の玄関から 1 人の男の子が出てくるのを確認し，この情報をもとに，世帯 A の妻は夫に「世帯 B には少なくとも 1 人は男の子がいる」(※玄関から出てきた男の子の情報は伝えない) と伝えたとする．

注意 1.3.5 (2 人の子供問題)

このとき，世帯 A の妻が，「玄関から出てきた男の子」の情報をもとに，「世帯 B のもう片方の子供の性別が男である確率」を計算するとき，例題 1.3.2 (3) の計算方法を用いて，求める確率は $1/2$ と判断するのが適切と考えられる．

一方で，世帯 A の夫が，「少なくとも 1 人は男の子である」という情報をもとに，「世帯 B の 2 人の子供の性別がどちらも男である確率」を計算するとき，例題 1.3.2 (2) の計算方法を用いて，求める確率は $1/3$ と判断するのが適切と考えられる．

なお，世帯 A の夫は妻と異なり，「玄関から出てきた男の子」という特定の人物の情報を持たない．そのため，世帯 A の妻の問を表現するための確率空間と，夫の問を表現するための確率空間は異なる．

定理 1.3.1 (全確率の公式)

標本空間が互いに排反な n 個の事象 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に分割されるとき，確率 $P(B)$ は，「A_k を標本空間とみなしたときの確率 $P(B|A_k)$」に “重み” $P(A_k)$ を掛けた値を，$k=1$ から $k=n$ まで足し合わせることで計算できる．

定理 1.3.1 (全確率の公式)

(Ω, P) は確率空間とする．n 個の事象 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ は互いに排反 $(A_j \cap A_k = \emptyset,\ j \neq k)$ で，2 条件

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \qquad P(A_i) > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

をみたすとする．このとき，任意の事象 B に対して次式が成り立つ．

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P(B|A_k).$$

定理 1.3.1 (全確率の公式)

[証明]　まず，条件 $\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ より，関係式

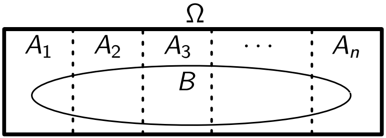
$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) = \bigcup_{k=1}^{n} (B \cap A_k)$$

が成り立つ．次に，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ が互いに排反なので，n 個の事象

$$B \cap A_1,\ B \cap A_2,\ \cdots,\ B \cap A_n$$

も互いに排反である．したがって，(P2") より，次式が成り立つ．

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \frac{P(B \cap A_k)}{P(A_k)} = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P(B|A_k).$$



定理 1.3.2 (ベイズの定理)

次のベイズの定理は，条件付き確率を使った確率の計算において，「条件付ける事象を入れ替える計算」が必要になるときに役に立つ．

定理 1.3.2 (ベイズの定理)

(Ω, P) は確率空間とする．n 個の事象 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ は互いに排反 ($A_j \cap A_k = \emptyset$, $j \neq k$) で，2 条件をみたすとする．

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \qquad P(A_i) > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

このとき，$P(B) > 0$ をみたす任意の事象 B に対して次式が成り立つ．

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

定理 1.3.2 (ベイズの定理)

[証明]　全確率の公式より，$j = 1, 2, \cdots, n$ に対して次式が成り立つ.

$$P(A_j|B) = \frac{P(B \cap A_j)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{P(B)}$$
$$= \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}.$$

例題 1.3.4

例題 1.3.4

ある会社では，同じ製品を機械 A, B, C で作っていて，全製品のうち，A が 20%，B が 35%，C が 45%を生産しており，不良品が出る率は A が 6%，B が 4%，C が 2%であるとする．無作為に 1 個の製品を取り出してみたところ不良品であった．このとき，この製品が A で作られた確率を求めよ．

例題 1.3.4

[解答]　取り出した製品が機械 A, B, C で製造された事象を，それぞれ A, B, C とおく．また，取り出した製品が不良品である事象を E とおく．条件より，

$$P(A) = \frac{20}{100},\ P(B) = \frac{35}{100},\ P(C) = \frac{45}{100} \cdots (\text{事前確率}),$$
$$P(E|A) = \frac{6}{100},\ P(E|B) = \frac{4}{100},\ P(E|C) = \frac{2}{100}$$

が成り立つ．よって，ベイズの定理より，$P(A|E)$ は

$$\begin{aligned} P(A|E) &= \frac{P(A)P(E|A)}{P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) + P(C)P(E|C)} \\ &= \frac{0.2 \times 0.06}{0.2 \times 0.06 + 0.35 \times 0.04 + 0.45 \times 0.02} = \frac{12}{35}. \end{aligned}$$

トピックス 1 (モンティ・ホール問題)

ベイズの定理に関連した話題として，有名なモンティ・ホール問題を紹介する．この問題では，直観的な推論に基づくと間違う人も多く，かつ理論的な解説に納得できない人も多いため，モンティ・ホールのジレンマともよばれる．

トピックス 1 (モンティ・ホール問題)

モンティ・ホール問題

あるテレビ番組の中で，3 つのカーテン c_1, c_2, c_3 があり，そのうち 1 つは正解で商品が隠されており，残りの 2 つは不正解という状況を考える．このとき，番組の司会者モンティ・ホール氏は，どのカーテンに商品が隠されているかを知っており，次のルールで挑戦者に商品の隠れたカーテンを当てさせるとする．まず，挑戦者は，3 つの中から 1 つのカーテンを選ぶ (まだこのカーテンは開けない) (c_1 とする)．次に，司会者が，残りの 2 つのカーテンのうち不正解のカーテンから無作為に 1 つ選んで開けてみせる (c_2 とする)．最後に，挑戦者は，残った 2 つのカーテン c_1, c_3 の中から好きなほうを選び直せるとする．このとき，挑戦者は次のどちらの選択肢を取れば当選確率が高まるだろうか．

- 「スイッチ」: 最初に選んだカーテン c_1 から，カーテン c_3 に変更する．
- 「スティック」: 最初に選んだカーテン c_1 から変更しない．

トピックス 1 (モンティ・ホール問題)

次の (1), (2) のように直観的に推論する人も多いかもしれない.

(1) : c_1 に留まっても，c_3 に変更しても，当選確率は 1/2 である.

(2) : c_1 から c_3 に変更して，もし c_1 が当たっていたら後悔するので，変更しない.

(2) の推論には心理的な要素が含まれているので間違いとも正しいとも言えない．実は，(1) の推論は誤りである．以下では，実際にどちらの選択肢が当選確率が高いかを，ベイズの定理を用いて計算して比較する.

トピックス 1 (モンティ・ホール問題)

そのために，次の事象を定義する．

$$A = \{ \text{司会者が } c_2 \text{ のカーテンを開ける} \},$$
$$C_i = \{ c_i \text{ のカーテンに当たりがある} \} \quad (i = 1, 2, 3).$$

まず，司会者のカーテンの開け方から，条件付き確率に関する次の 3 つの関係式が得られる．

$$P(A|C_1) = \frac{1}{2}, \quad P(A|C_2) = 0, \quad P(A|C_3) = 1. \qquad (1.11)$$

(1) の推論では，司会者の行動に関する 3 つの条件付き確率 (1.11) を考慮に入れていない．

トピックス 1 (モンティ・ホール問題)

ここで，ベイズの定理より，「スイッチして当選する事後確率」は

$$P(C_3|A) = \frac{P(A|C_3)P(C_3)}{P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + P(A|C_3)P(C_3)}$$
$$= \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

であり，「スティックして当選する事後確率」は

$$P(C_1|A) = \frac{P(A|C_1)P(C_1)}{P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + P(A|C_3)P(C_3)}$$
$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

であるため，スイッチした方が当選確率が倍になることがわかる．

トピックス 1 (モンティ・ホール問題)

なお，問題の設定を次のように一般化すると,「スイッチした方が当選確率が高くなる」ことを納得しやすくなる．まず n は 10000 のような大きい数を想定し，n 枚のカーテンの中に 1 つ商品が隠されているとする．最初に挑戦者が 1 つのカーテンを選ぶ段階では当選確率は $1/n$ である．その後，司会者が残り $n-1$ 枚のカーテンのうち，はずれの $n-2$ 枚のカーテンを開けて見せる．その際，司会者側から見ると，自らが当たりのカーテンがどれなのか絞り込み，挑戦者を正解に導いている感覚を覚えるであろう．最後に，挑戦者は残った 2 つのカーテンのうち好きな方を選び直せるとする．このとき,「挑戦者が最初に選んだカーテンから変える (スイッチする) 方が当選確率が高くなる」ことは，直観的にすぐわかるのではないだろうか．実際にベイズの定理を用いて計算すると，スティックした場合の当選確率は $1/n$ であり，スイッチした場合の当選確率は $(n-1)/n$ である．

演習 1.16

演習 1.16

あるウィルスの検査試薬は，ウィルスに感染しているのに誤って陰性と判断する確率が 1%であり，感染していないのに誤って陽性と判断する確率が 2%である．全体の 1%がこのウィルスに感染している集団から 1 つの個体を取り出すとき，「陽性だったときに，実際にはウィルスに感染していない確率」を求めよ．

[解答]　取り出した個体が感染しているという事象を A，検査結果が陽性であるという事象を E とする．このとき，条件より，次式が成り立つ．

$$P(E^c|A) = \frac{1}{100}, \quad P(E|A^c) = \frac{2}{100}, \quad P(A) = \frac{1}{100}. \tag{B.9}$$

演習 1.16

[解答 (続き)]　この関係式 (B.9) より，次式も得られる．

$$P(E|A) = \frac{99}{100}, \quad P(A^c) = \frac{99}{100}. \qquad \text{(B.10)}$$

したがって，(B.9)，(B.10) とベイズの定理より，求める確率は次のとおり．

$$P(A^c|E) = \frac{P(A^c)P(E|A^c)}{P(A)P(E|A) + P(A^c)P(E|A^c)} = \frac{198}{297} = \frac{2}{3}.$$

演習 1.17

演習 1.17

間隔 d で平行線が描かれた床の上に，長さが l $(0 < l \leq d)$ の針を無作為に落とすとき，この針と平行線が交わる確率を求めよ．(補足 :「ビュフォンの針」として知られる問題．)

[解答]　針の中心 A から最も近い平行線までの距離を y $(0 \leq y \leq d/2)$ とおき，針と平行線のなす角を θ $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$ とおく．座標平面上の長方形

$$\Omega = [0, \pi/2] \times [0, d/2]$$

を標本空間とし，$P(\cdot)$ は Ω 上の 2 次元の幾何的確率 (面積) とする．

演習 1.17

[解答 (続き)]　このとき，針が平行線と交わる事象 D は

$$D = \left\{ (\theta, y) \in \Omega \;\middle|\; y \leq \frac{l}{2} \sin \theta \right\}$$

で与えられる．$l \leq d$ より，D の面積 $|D|$ は

$$|D| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \sin \theta d\theta = \frac{l}{2}$$

と計算できる．したがって，求める確率は

$$P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{2l}{\pi d}$$

である．