複数の理論をいかに比較するか

丸山　善宏

平成 21 年 5 月 27 日

目 次

1　導入

「ブラウワーの直観主義数学は古典的な数学と矛盾する」、「古典命題論理は含意と否定でもシェーファーの棒記号のみでも記述できる」などといった言明は論理学や哲学の文献でしばしば用いられる表現であるが、前者は理論間の矛盾という概念を前提し、後者は理論間の同一性という概念を前提するように思われる[1]。そして、我々が普段直観的に漠然と把握している、理論間の矛盾や同一性といった概念に対し、論理学の知見を武器にしてより緻密な分析を加えることが本稿の主題である。その過程において、例えば種々の構成的数学における実数や関数などの、基礎的な重要性を持つ概念の分析を試みる。また、そういった例の考察を包括的に利用することにより、クワインによる理論の決定不全性と翻訳の不確定性のテーゼを立証する具体例を構成する。

最初に挙げた２つの言明等を例にして、理論間の矛盾と同一性の問題に対する動機付けを手短に与えておく。なお、本文の大雑把な要約は、「まとめと今後の課題」の節にある。また、節のはじめにはその節の短い要約がある。勿論、それらに目を通すだけでは種々の誤解が避けられないと考えられるため、詳しい議論はできるだけ本文を参照して欲しい。

ブラウワーの直観主義数学（以下、直観主義数学）と古典数学の間の「矛盾」は、例えば「すべての実数上実数値関数は連続である」という直観主義数学の定理と「不連続な実数上実数値関数が存在する」という古典数学の定理に求められる。しかし、当の定理に対してブラウワーが与えた解説の自然さを顧みると、２つの定理を逐語的に比較することは必ずしも適当ではないかもしれない。実際、直観主義数学における「関数」という語を古典数学における「計算可能な関数」に置き換えれば、「すべての計算可能な関数は連続である」は古典数学における定理であるので、矛盾は解消されるのである[2]。このような考察は、２つの理論が互いに矛盾するかどうかという問題が、決して些細なものではなく、そもそも複数の理論が互いに矛盾するとはどういったことかという点まで含めて、綿密な分析を必要とすることを我々に示唆する。そして、この例は直観主義数学と古典数学の間の対立関係が単なる見かけ上のものなのか、それとも真の対立なのかというそれ自体興味深い哲学的問題を提起する。

次に、同一性についてだが、まず我々が（論理学の意味での）理論に対する同一性の直観をある程度持っていることは事実である。だが、この直観を正確に表現することは容易ではない。例えば、$ZFC+CH$ と $ZFC+\neg CH$ の間には再帰的同型写像が存在するが、果たしてこの結果を基に両者は同一であると言って良いのだろうか。理論間の同一性の定義の困難さはこういった点にある。また、古典命題論理は論理学の教育において通常最初に提示される最も初等的な論理であろ

[1]なぜなら後者は、演繹体系を含意と否定で書いても棒記号で書いても論理としては同一である、と解釈できる。

[2]ここでの「計算可能」は実数上の計算可能性であって、通常の自然数上のものとは異なる。

うが、「古典命題論理とは何か」という問いかけに対して、我々にはどんな答えが可能だろうか。ある特定の演繹体系や意味論を提示してみせることは、（後に解説するように）その完全な解答とはなり得ない、或はより優れた解答の可能性が残されている。勿論、事情は他の論理体系に対しても同様である。クワインが「同一性無くして存在者無し（no entity without identity）」と言ったように、同一性は論理というものを特定の表現形式に依存しない形で定義するための有効な手立てとなるだろう。

なお、本稿では理論や翻訳という用語を非形式的な意味でも論理学における形式的な意味でも用いる。また、命題という用語は、特に断らない限り、例えば「文の意味としての命題」というような哲学的な意味ではなく、日常的な意味で用いる。

2　理論間の矛盾

本節では、まず2つの理論が矛盾するとはいかなる状況であるかについて一つの定式化を与えた上で、その定式化に基いて幾つかの例について考察し、最後に理論間の矛盾に関する一般論を展開する。例としては、構成的数学に基くものと物理学に基くものを取り上げた。

例の考察においては、古典数学と矛盾すると表現されることの多い構成的数学の学派（直観主義数学と構成的再帰数学）を重視して詳しく論じた。これは、構成的数学で用いられる概念をその数学的実践に沿って分析することが、本論文の一つの目的であることによる。相対論や量子力学に比べて、そういった分析が構成的数学に関して十分になされてきたとは言い難いように思われる。また、特に直観主義数学は心理主義に傾倒した神秘的な哲学に基くエキゾチックな数学に見られがちな傾向が（特に非専門家の間には）あるが、実際には神秘的に過ぎる部分を排せば自然な数学的直観に基いて展開され得るもので、直観主義数学や構成的再帰数学が古典的な立場から見ても理解可能な数学であるという事実を、realizability semantics に基く翻訳の利用によって明らかにしたい。しかし、古典的な理解が可能であるからといって、そのような理解が適切であるかどうかは別問題であり、実際必ずしもそうとは言えないことを後に論証する。

また、こういった例の考察は、一般に理論間の矛盾を論じるにあたって、どのような点に着目すればよいのかを理解するための道標となる。後に明らかになるように、直観主義数学と古典数学の関係について考察すべき論点は、他の例においても考慮すべき論点であり、その逆も成り立つ。そのため、全ての例を通じて議論をほとんど並行的に進めることができる。

さらに、様々な例の考察は、次節「理論の決定不全性と翻訳の不確定性」のための下準備でもある。次節ではそこで行われる議論を包括的に利用する。ほとんどすべての例が次節において一定の役割を果たすため、必要不可欠な下準備である。

2.1 理論間の矛盾の定式化

ここに２つの理論（T1 と T2）があったとしよう。ここでは、それぞれの理論の言語までふくめて理論と呼んでいる。それぞれの言語は同一である必要はない。矛盾という概念には様々な非同値な定義が存在する。例えば、任意の命題が導かれること、ある命題の肯定と否定が共に導かれることなどが矛盾の定義として考えられる。古典論理上では両者は同値だが、paraconsistent logic 上では同値ではないといった現象が存在するため、矛盾をどのように定義するかは明示しておくべきことである。ここでは試しに、矛盾とはある命題の肯定と否定が共に導かれることである、と定めたとしよう。すなわち、２つの理論が矛盾するとは、２つの理論のある命題の肯定と否定が共に導かれることである、としてみよう。

この定義には幾つかの問題が潜んでいることを説明する。まず、「導かれる」とは一体どの理論においてなのだろうか。T1 だろうか、それとも T2 だろうか、或いは第３の理論 T3 においてなのだろうか、この点を明確にしておく必要があるが、ここでは、「ある命題の肯定と否定が導かれる」とは理論 T3 においてであると定める。この定義の利点は、T3 が T1 もしくは T2 と等しい場合を排除しないため、より一般的な状況設定で議論できることにある。さらに、この定義は後に扱う「矛盾の解消」の問題において本質的な役割を果たす。そこでは、T3 が T1 とも T2 とも異なるのである。また、そこにおける「矛盾の解消」が、実際に我々が直観的に矛盾が解消されたと納得できる種類のものであることにより、この定義の適切さを裏付けることができる。次に、理論 T3 の言語が理論 T1 の言語と理論 T2 の言語を含んでいるとは限らない、たとえ含んでいたとしても理論 T1 の文と理論 T2 の文を逐語的に比較することが適切とは限らない、という問題がある。例えば、導入で挙げた直観主義数学と古典数学の例が逐語的ではない翻訳の存在を示唆するし、人工的には、ペアノ算術の定理集合とペアノ算術の定理の否定の集合は逐語的に比較すれば当然矛盾するが、両者は矛盾するというよりはむしろ見かけだけが異なる同一の理論と表現するほうが適切だろう。そのため、矛盾するかどうか考える際には、T1 から T3 への翻訳と T2 から T3 への翻訳を予め固定しておく必要がある。最後に、T1 の個々の文と T2 の個々の文は矛盾しなくとも、T1 全体と T2 全体を合わせると矛盾が生じる可能性があるため、比較は理論全体に対して行うべきだろう。

以上のような考察から、次のように２つの理論間の矛盾を定義するのが妥当であると思われる。

定義（理論間の矛盾）
理論 T1 から理論 T3 への翻訳 t1 と、理論 T2 から T3 への翻訳 t2 が与えられているとする。このとき、理論 T1 と理論 T2 が理論 T3 において翻訳 t1,t2 と相対的に矛盾するとは、理論 T1 の t1 による像と理論 T2 の t2 による像の合併を仮定すると理論 T3 においてある命題の肯定と否定が共に導かれることである。簡便のため、

「翻訳 t1,t2 と相対的に」という部分はしばしば省略する。

なお、我々は「理論」や「翻訳」というタームを定義していないが、その重要なモデルケースは論理学における「理論」や「翻訳」である[3]。しかし、非形式的・日常的意味での理論や翻訳の場合をも含めることが意図されている[4]。個々の例においては、一般に何が理論で何が翻訳であるかについては問題とならない。それが問題になるとすれば一般論を展開するときだが、「理論」や「翻訳」の正確な定義に敏感な話題を論じる際にはその旨を付言する。２つの理論を比較する場である理論 T3 のことをメタ理論と呼ぶこともある。

この定義は三つ以上の理論間の矛盾の場合にまで容易に拡張される。0 に対しては T3 が矛盾するかどうかで定義され、1 に対してはその一つの理論が T3 への翻訳と相対的に T3 において矛盾するかどうかで定義されるとしておけば、任意基数個の理論間の矛盾について語ることができ、実際に後で任意基数個の場合の定義が用いられる。

この小節で与える例では、T3 が T2 と等しい場合が多いが、T3 は二つの理論理論を比較する際の根拠を与える場を提供するもので、その役割は非常に重要である。二つの理論を T3 において比較してある主張をするとき、その根拠が T3 の中になければ、T3 において比較する限りそれを根拠とすることはできないのである。このことの具体的例による（より分かりやすい）説明は「直観主義数学と古典数学」で行う。

これまでは理論間の矛盾に焦点を当てて論じてきたが、複数の理論の間の様々な関係をこの枠組みで統一的に捉えることができる。後に詳しく論じる理論間の同一性の問題もその一つだが、ここでは他の例について簡単に考察する。なお、以下の例を飛ばして「直観主義数学と古典数学」に移っても、議論の大勢に影響はない。この小節の以下の例は、（それ以降の例とは異なり）単に上の枠組みが大体どのように機能するのか説明するためだけのものである。

例えば、一階述語論理に対するタルスキ意味論は、T1 が一階述語論理、T2 と T3 が集合論で、付値関数（valuation function）が T1 から T3 への翻訳、T2 から T3 への翻訳は恒等翻訳（identity translation）という場合に対応する。[5]一階述語論理上の理論に対する一つのタルスキ構造に対して一つの翻訳が定まっている。また、与えられた付値関数に対して T1 と T2 が矛盾するなら、その付値関数に対応する構造はモデルにならない。一般に意味論を与えるということは、T2 と T3 が等しく T2 から T3 への翻訳が恒等翻訳であるとき、T1 から T3 へのある種の条件

[3]理論の土台となる論理は固定せず、数学的に記述可能なもの全てを含める（RE 公理化可能でないものも含める）。

[4]ただ、そのような場合はこの小節で挙げる幾つかの例を除いてほとんど存在せず、数学的な厳密性を求めるなら、この小節以降は論理学的意味で捉えることも若干の読み替えの下で可能である。ただし、翻訳は定理性を保存するとは限らないとする。

[5]何もしない翻訳を恒等翻訳と呼ぶ。包含翻訳（inclusion translation）のほうが数学における用語法とは調和するかもしれないが、日常的な語感から恒等翻訳という表現にした。

を満たす翻訳を与えるということだと言える。しかし「ある種の条件」を具体的に記述することは容易ではない。

数学の哲学では「ベナセラフのジレンマ」というものが知られているが、これは数学の言語に対するタルスキ意味論と知識の因果的説明を求める自然主義の間の不調和のことを指す。[6]タルスキ意味論はドメインと付値関数を与えるが、クワインの「存在するとは変項の値となることである（To be is to be a value of a variable）」という標語に従えば、ドメインの元は存在する（実在する）ということになる。[7]したがって、数学の言語に対するタルスキ意味論に従えば、数や集合といった数学的対象が存在する（実在する）ことになる。一方、人が知識に対して持つ認識的経路の提示（知識の因果的説明）を求める自然主義によれば、そのような実在の数学的対象を人がどのように認識するのかが説明されなければならないが、どこにあるか分からない数学的実在への認識的経路など提示できるはずがないように思われる。タルスキ意味論も自然主義もそれぞれ一定の根拠を持った理論であるため、この現象はジレンマと呼ばれている。

この事態を我々の枠組みで表現すれば、T1 が数学、T2 と T3 が自然主義、T1 から T3 への翻訳をタルスキ意味論としたとき、数学における存在定理の翻訳による像が「知識に対する認識的経路が存在する」という自然主義の主張と矛盾するということになる。ベナセラフによれば、数学の哲学における○○主義は大抵少なくともこの一方を犠牲にしていると言われる。例えば、プラトニストは後者を犠牲にし、ヒルベルト的形式主義者は前者を犠牲にしていると主張される。

この例から示唆されるように、数学の哲学における○○主義の多くは我々の枠組みで理解できる。例えば、数学は論理式の有限的操作であるという意味での形式主義は、T1 が数学、T2 と T3 が有限の立場、T1 から T3 への翻訳が形式化という図式で捉えられる。[8]また、数学的存在の根拠を現実に存在する構造に求める意味での構造主義は、T1 が数学、T2 と T3 が現実の物理的世界、T1 から T3 への翻訳が対象を構造に置換する操作という図式に当てはまる[9]。物理理論で用いられる抽象的な数学的対象へのコミットメントを具体的な物理的対象へのコミットメントで済ますという、Hartry Field の唯名論化プログラムも、翻訳を数学的対象を物理的対象に置換する操作とすればこの枠組みで捉えられる[10]。構造主義の困難は数

[6][Benacerraf73] 参照。邦訳が [飯田 95] にあり、そこでの導入部も参考にした。以下に述べる数学の哲学における様々な立場については [飯田 95] や [Shapiro00] 参照。

[7]この標語に関する議論については [Quine80] 所収の”On What There Is”参照。この標語に基く数学的対象の存在論証については、クワインとパトナムによる indispensability argument がある。[Colyvan01] 参照。

[8]そういった意味での形式主義には度重なる批判が加えられ、そのような立場を考慮する価値はなく、（他の有益な立場を意味することもある）形式主義という言葉によって、その立場を表現するべきではないと考える人（例えば [飯田 89]）もいる。そういった主張にも一定の尤もらしさがあるが、本論文では便宜的に形式主義と呼ぶことにした。

[9]これは現代の数学の哲学で主張される類の構造主義で、数学で言われるブルバキ的構造主義とは全く異なる。

[10]例えば、Field は、彼の著書”Science without Numbers”において、時空が連続（完備）だと仮定して、実数の代わりに時空点を用いた解析学の下でニュートン力学を展開している。こういった

学における豊富な無限が物理的構造で実現できるのかという点にあるが、様相概念を用いることによって無限的構造の（現実的ではなく）可能的存在だけで済ませようという打開策も提案されている。さらに、数学的対象の実在を主張する意味でのプラトニズムは、T1 が数学、T2 と T3 が数学的実在のユニバース、T1 から T3 への翻訳がタルスキ意味論の場合で理解できる。

最後に、次に扱う直観主義数学の創始者であるブラウワーの直観主義に対しては、T1 が人間の内的直観・精神的構成の世界、T2 と T3 が直観主義数学、T1 から T3 への翻訳が内的直観・精神的構成の（必然的に不十分な）記述とすればよい。前四者が古典数学にそれぞれの哲学的立場と合致する一種の意味論を与える試みであるのに対して、ブラウワー的直観主義は独自の哲学に基き古典数学を切り崩した上で新たな数学を構築する営みであるという点で際立っている。

2.2 直観主義数学と古典数学

以下では、恒等翻訳と計算可能性翻訳という二つの代表的翻訳を中心に据えて、直観主義数学と古典数学の関係について論じる。「いずれの翻訳が適切か」というのが主要な問いである。全体の議論の流れについてはそれぞれの節の題名を見て理解して頂きたい。

次の注意は極めて重要である。（直観主義数学の例だけではなく）以下で扱われる全ての例に関して、それぞれの翻訳は（物理学の例を除けば）論理学的に厳密に定義できるものだが、当の翻訳という概念そのものは、論理学的な意味で用いられているのではなく、ある言語の他の言語における合理的解釈という特徴を根幹に備える概念として捉えられている。

この捉え方は、構成主義的概念の（古典的）理解を目指すという本節での一つの目的にも合致しているし、次節の翻訳の不確定性で扱うことになる日常言語間の翻訳概念を捉えるのにも適している。

2.2.1 恒等翻訳と計算可能性翻訳

導入で挙げた直観主義数学（T1）と古典数学（T2）の例について再び考えよう。ここで、定義の T3 に当たるものは古典数学を含む日常言語とし、T2 から T3 への翻訳は恒等翻訳とする。したがって、この前提のもとで、T1 から T3 への翻訳として恒等翻訳を採用した場合に生じる矛盾を上手く解消する翻訳を考えることは、古典数学の立場から直観主義数学を理解可能なものとする試みであると考えられる。勿論、恣意的な「翻訳」により矛盾を解消することは容易であるが、ここで問題としたいのはそのようなものではない。

手法に対しては、単に見かけ上の表現を変えたに過ぎないという批判も多い。Stewart Shapiro による別の批判もある。

BHK 解釈や特にその精密化と見なせる realizability semantics は、構成主義的な数学を（後者の場合には計算理論の言葉により）古典数学において理解する手法を与えるものと見なせる。realizability sematincs は構成主義的な数学（の定理）から計算的内容（を担う realizer）を抽出するものであるとも表現されるが、翻訳先の計算的内容は古典数学で理解できるものなので、上のような見方が可能になるのである。しかし、これは意味論を考えるメタ理論として古典数学も使用できるということであって、メタ理論として直観主義数学が使用できないということではない。実際、例えばハイティング算術の場合にはメタ理論もハイティング算術で（例えば健全性を示すのには）十分である。なお、完全性は直観主義的にも古典的にも言えず、古典的に見たほうが差異は大きくなり、こういったことは算術に限らず、様々な構成主義の体系に対する種々の realizability semantics に対して言える。

恒等翻訳により古典数学と矛盾しない構成的数学（例えば Bishop のもの）については、勿論「矛盾しない」というだけの意味では古典数学で理解可能と言えるが、それでは構成的数学の「実質」を古典数学により捉えたことにはならない。なぜなら、古典的にも正しい構成的数学の定理を構成的数学で証明するためには古典数学における証明よりも多くの技巧が必要となる場合が多々あるが、恒等翻訳によって古典数学にその定理を持ち込むとよりシンプルな古典的証明があるため、そのような技巧は不必要なものとしか考えられず、恒等翻訳が矛盾を引き起こさない場合でも、恒等翻訳により構成的数学の「実質」を古典数学において捉えることはできないのである。より具体的に言えば、古典論理の存在命題の証明可能性が（エルブランの定理により）その幾つかの instance の or の証明可能性しか含意しないのに対して、直観主義論理の存在命題の証明可能性はある一つの instance そのものの証明可能性を含意する。[11]恒等翻訳ではこの差異が無視されてしまうが、realizability semantics ではこの差異を捉えることができるのである。さらに、古典数学で構成的数学を解釈する「意味論」は健全にも完全にも程遠い。一方で、realizability semantics も完全にはならない場合がほとんどだが、ハイティング算術や直観主義解析の場合には、それぞれの体系に対象の計算可能性を要求する「Church のテーゼ」の変種を公理として追加すれば完全になる（Church のテーゼについては構成的再帰数学の節でより詳しく扱う）。この意味で、realizability semantics は完全性にある程度近いと言えるのである。そして、realizability semantics の健全性は疑いなく証明できる。したがって、realizability semantics は（恒等翻訳とは異なり）矛盾を解消した上に構成的数学の実質を古典数学で理解する手法を与えるのである。

しかし、本論文では、realizability semantics そのものを翻訳として採用するこ

[11]エルブランの定理は自動証明における役割ばかりが強調されがちだが、論理学的に重要なのは、それが古典論理の存在量化子の意味の理解を増進させるものであるという点である（と著者は思う）。realizability についても論理学的に重要なのは、計算的意味（プログラム）の抽出という点よりも、それが直観主義の論理結合子や様々な概念の意味の理解に貢献するという点だろう。

とはせず、ここでの議論に必要な性質だけをインフォーマルな形で抜き出して、いわば公理的に議論することにしよう。翻訳の精密な定式化に依存する問題を考える場合に限り、realizability そのものを持ち出して議論する。すなわち、ここで扱うもう一つの翻訳である「計算可能性翻訳」は、論理結合子は BHK 解釈し、その上で「関数」は「計算可能な関数」に翻訳するという特徴をもつとする。関数とはドメインの元に対してコドメインの元が唯一存在するものであり、BHK 解釈によれば「存在する」は「構成できる」なのだから、「関数」の BHK 解釈が値を構成できる関数、つまり計算可能な関数になるというのは一つの可能な見方である。

ここでの「翻訳」は形式的なものではなく、このような性質をもつ翻訳が実際に数学的に実現可能かどうかは明白ではないが、例えば、Kleene が形式化された直観主義解析に対して与えた realizability semantics は実際にこのような性質を持っており（[KV65] 参照）、それによりここで扱う計算可能性翻訳に数学的な根拠を与えることができる。直観主義数学は基本的に実数より高階の対象を認めないように思われるし、ここでの議論には Kleene のもので十分である。だが、もし実数より高階の対象を扱うことになれば、高階の理論に対する realizability semantics を用いればよい（[Beeson85] 参照）。勿論、形式化が難しいからという理由で現実の英和辞書などが根拠を欠かないのと同様、たとえ形式化が与えられなくともここでの議論が無意味になるわけではない。

realizability semantics は計算可能性の概念と相対的に定義されるもので、Kleene の帰納的汎関数以外の計算可能性の概念を用いても、直観主義解析の健全な意味論を与えることはできる。無限文字列上の計算可能性について、realizability を与えるに際して Kleene の用いた帰納的汎関数と本稿で用いる Type-two Turing Machine はほとんど同様のもので、ここでの議論において重要な性質「計算可能関数は連続である」を共有している。Type-two Machine で無限文字列上の計算可能性を考えても、realizability semantics は Kleene の体系に対して健全になる。Kleene の体系に対して健全かつ完全になるような計算可能性の概念があるかどうか著者には知られていない。

最後に、BHK 解釈と直観主義論理の関係について付言しておきたい。BHK 解釈は直観主義論理の結合子の説明の際に実に頻繁に用いられるにも関らず、その自然な形式化と見なせるもので直観主義論理に対して（適切なメタ理論の下で）健全かつ完全になるものは（著者には）知られていない。realizability semantics の主要な歴史を概念した [Osten02] においてもそのようなものは見つからない。唯一（著者に）知られているものは、Medvedev lattice の始切片を用いた形式化（[Skvortsova05]）だが、これは色々な点で疑問の余地があり、自然と言えるかは疑わしい。realizability semantics に対しては、recursive を primitive recursive にして realizability を考えてみるなどの試み（[Plisko]）があったが、やはり完全性は成り立たないことが分かっている。このような状況を顧みると、構成主義の結合子の正確な意味が BHK 解釈によって得られるのかどうかは全く明らかではないのであって、無批判に BHK 解釈を持ち出して構成主義的な論理結合子の説明を行うこ

とはきわめて危険である。

著者が考える直観主義論理（さらには他の様々な論理）の（健全かつ完全という点で）正確な意味を与える方法は、その論理のストーン双対性に基いて、論理式をそれが真となるモデル全体としての開集合と見なす、というものである。これについては、別の機会に詳しい考察をしてみる予定である。

なお、以下で単に「関数」といった場合、大抵は実数上の関数の意味である。また、BISH や CRM は、それぞれ Bishop の構成的数学や構成的再帰数学という日本語の省略記号であって、必ずしも形式体系を意味するものではない。これは、さまざまな構成主義の原理の略記についても同様である。

2.2.2 一般的説明と連続性原理の動機

直観主義数学が正確にどのようなものであったかについて論理学者の間で確固たる一致はないが、ここではある程度一般的に用いられている定式化として、Bishop の構成的数学（以下 BISH）に連続性原理と fan theorem（以下 FT）を追加した体系を直観主義数学と呼ぶことにする。ただ、ブラウワーは実数のべき集合を認めていなかったと言われるので、それを重く見る場合には、Bishop の構成的数学における集合（あるいはタイプ）をそこまで制限する必要がある。また、ブラウワーの Creative Subject の議論から導かれると言われる Kripke's schema はここに入っていないため、その意味ではブラウワーの数学の定式化としては不十分なものかもしれないが、Kripke's schema はある種の連続性原理と矛盾するという問題がある上、実際の直観主義数学の実践においてはほとんど使われない（Kripke's schema については [TvD88] 参照）。大雑把に言えば、Kripke's schema は集合の特徴関数の存在を主張するものであり、例えば実数における有理数の集合の特徴関数は不連続であるため、連続性原理と矛盾するのである。

BISH は、数値的意味・計算的内容を重視してインフォーマルに展開されたもので、現代の論理学の言葉で近似的に表現するなら、高階のハイティング算術のようなものと言える（様々な形式化については [Beeson85] 参照）。構成主義や直観主義では、古典的に同値な概念が同値ではなくなるという現象が頻繁に生じるため、それぞれの場合に応じて、できるだけ豊富な結果が出るように上手く定義を選択する必要がある。例えば、$x \neq y \to x < y \vee x > y$ という命題は構成的数学で証明できないが、前件の「等しくない」（inequality）を「正の差がある」（apartness）に置き換えると証明できる。古典的には両者は同値だが、構成的数学では後者のほうが強い主張であり、後者が重要な役割を担っている[12]。apartness はブラウワーも用いていたものだが、Bishop は古典的には同値な中で上手い定義や仮定を選ぶ出すことに長けており、さらに重要な具体例を排除しないなら定義や定理の仮定を強

[12] apartness の二重否定が inequality と同値である。Bishop は通常の $\neq$ を apartness の意味で用いることを提案した。両者が同値だという主張は構成的再帰的数学で用いられる Markov の原理の一種である。

めてよいということを構成的数学の展開にあたっての指導原理とした（[Troelstra] 参照)。Bishop 独自のものは、関数の連続性、コンパクト性、測度といった基礎的概念の定義である。これらは後にもう少し触れる。

連続性原理の定式化にも様々な手法があるが、例えば次の命題が連続性原理の例である（特に weak continuity と呼ばれる)。

$$\forall\alpha\exists x A(\alpha, x) \to \forall\alpha\exists x\exists y\forall\beta[\bar{\alpha}(y) = \bar{\beta}(y) \to A(\beta, x)]$$

ここで、α と β は N^N 上を走る変数、x と y は N 上を走る変数、$\bar{\alpha}(y)$ は α の最初の y 項のみからなる有限列とする。この命題の意味は、任意の自由選列に対して、ある自然数が関連付けられているなら、その自然数は自由選列の十分長い有限の始切片から決定されている、というものである。なお、本稿ではより直接的に「すべての実数上実数値関数は連続である」というものを連続性原理と考えてもほとんど差し支えない。様々な定式化があるとはいえ、列の各項を一挙に捉える方法が存在しない列をも認める自由選列上の関数は返り値を自由選列の始切片から計算できていく必要がある、という動機付けは一貫して同一のものである。定式化の相違は、もちろん技術的な考慮もあるだろうが、それ以外の点では、その動機付けが正確にどの程度まで強い原理を正当化するかという部分の相違に求められると思われる。

Kleene は直観主義解析を、自然数に対する変数と自然数上の自由選列に対する変数をもつ言語において、算術的公理の他に AC_{00}（選択公理の量化子を自然数に制限したもの）と bar induction と連続性原理を持つ体系として形式化した。そして、そこから連続性原理を除いた体系において realizability semantics を考えることにより、その体系の中に直観主義解析のモデルを作って、連続性原理の相対的無矛盾性を証明している。連続性原理抜きの直観主義解析は古典的に妥当であるので、これは古典的な立場からみても連続性原理が矛盾する心配はないことを示している。自由選列は一般的な自然数上の自然数値関数（とも見なせるもの）であるので、それを認める直観主義数学にとって AC_{00} を受け入れることは自由選列の承認からの自然な帰結である。[13]

FT は恒等翻訳しても古典数学において妥当であり、そのためこの節の主な関心からは外れるが、できるだけ簡潔に表現すると、「有限分岐の木にカントル位相を入れたものはコンパクトである」というものになる。FT は「コンパクト空間上の連続関数は一様連続である」という古典解析の定理を直観主義数学でも証明可能にするためブラウワーが導入したものである[14]。なお、Bishop は、一様性を証明する構成的手法が知られていないことを理由に、連続性をドメインの任意のコンパ

---

[13] なお、ZF において、AC_{00} は自然数の最小値原理から証明可能な定理であり、選択公理は必要ではない。AC_{00} のような選択は初等解析の $\epsilon - N$ 論法の際に n_ϵ という記法によって頻繁に用いられる。直観主義数学では一般に最小値原理は証明可能ではない。

[14] 古典数学から排中律を剥奪したブラウワーといえども古典数学のすべてを諦めたくはなかったらしい。FT や bar induction の中に連続性原理を組み込む流儀もあるが、本稿では常に分離して考える。

クト部分集合上で一様連続であることと定義することにより、上記の定理が自明に出てくるようにしている[15]。ここで、コンパクト性は（通常の被覆によるものではなく、古典的にはそれと同値な）完備かつ全有界であることにより定義される。

さらに、ブラウワーはFTを正当化するためにbar inductionという原理を考案したが、ブラウワーのbar inductionの正当化は循環的であったというのが現代の主要な見方で（[KV65]と[TvD89]参照)、しかも無制限のbar inductionは連続性原理と矛盾することが証明できる（[KV65]参照)。bar induction（無制限のものでもよい）を恒等翻訳しても古典数学とは矛盾せず、その重要な応用は実際にはfan theoremからすべて導かれると言われる（[TvD88]p217参照)。BISHも恒等翻訳で古典数学と矛盾せず、直観主義論理の公理・推論規則も古典論理のそれと矛盾しないため、結局のところ矛盾するのは連続性原理のみである。

次に、連続性原理に対してブラウワーが与えた動機付けについて説明しよう[16]。そのため、まずブラウワーの実数概念について簡単に振り返る。最初ブラウワーは実数をlaw-like sequenceという、現代の言葉で近似的に表現すれば有理数列で各項を与えるN上の計算可能関数が存在するものを考えていたが、後にlaw-less sequenceや自由選列（free choice sequence）という制限がより少ない仕方で実数概念を捉えるようになった。[17]この転換の理由は、law-like sequenceでは実数全体の古典的な意味での測度が0になるなどの不満足な事態が生じるからだろう[18]。

law-like sequenceでは予め与えられた各項を計算する規則に従って有理数列が生成されていくのに対して、自由選列では、一般に各項を計算する規則が存在しなくてもよく、第0項から次々と各項を「自由に」選んでいくことができるとされる。その中で収束するものを実数とするわけである。ブラウワーは、自由選列を理想的数学者（ideal mathematician）が、各項を順番に書いていくことによって得られるものとして説明している。収束速度の固定された有理コーシー列が、現代では（実数を表す）自由選列のモデルとして用いられる場合がある（これはBISHで用いられる実数でもある)。直観主義数学をこのように定義された自由選列の上に展開することができるので、そういった意味では正当なモデルである。ただ、Bishop（彼の数学ではない）はブラウワーの自由選列の概念を認めていない。これは、ブラウワーの説明によると収束速度の固定は必ずしも必要ではないように思われるが、数値的意味のある解析を展開するためにはそういった条件が必要だ

[15]しかし、Bishopの定義やそれの改良版であるブリッジスの定義では、FTを仮定しない限り、$f(x) = 1/x$の連続性か一様連続性が合成について閉じることの一方を諦める必要がある。[Schuster05]参照。

[16]なお、これがブラウワーの正確な思考の道筋であったと主張する意思は著者には全く無い。

[17][Mancosu98]p12参照。このようなブラウワーの連続性原理に対する動機付けも同書所収の一様連続性に関する論文に書かれている。

[18]尤も現代的な立場から見れば、再帰的数学で行われるように被覆を制限することによって、有意味な測度論を展開することができる。また、ある意味でのlaw-like sequenceでは「コンパクト空間上の一様連続ではない連続関数が存在する」という恒等翻訳すると古典数学と矛盾する定理が導かれるので、それを避けたかったという理由も考えられる。ブラウワーがそこまでの理解に達していたかどうかは定かではないが。

からかもしれない。あるいは、有限項より先が本質的に不可知な、連続性原理を正当化する概念としての自由選列に反対しているのかもしれない。

自由選列の概念で特に重要なことは、それはブラックボックスのようなもので、有限の第 n 項目までは「第 n 項の値は何か？」と問うことにより有限的に把握できるが、数列のすべての項は一般には有限的に把握できないという点である[19]。したがって、自由選列を貰って自由選列を返す関数を考える場合、自由選列の無限にある項を一気に捉える手段は一般にはないため、その関数は、徐々に与えられる自由選列の有限の始切片に基いて、関数の値となる自由選列の有限の始切片をどんどん計算して行けなければならない。この条件をもう少し正確に述べれば次のようになる。任意の n に対してある m が存在し、値となる自由選列の第 n 項目が、引数の自由選列の第 m 項目までを見ることにより計算できなければならない。これは、引数の存在範囲を十分狭めれば返り値の存在範囲を幾らでも狭くできるということ、すなわち関数の連続性を含意する。ここで、連続性の意味は 2 通りある。すなわち、有理数列にカントル位相を入れたと見なした場合の連続性と実数にユークリッド位相を入れたと見なした場合の連続性である。前者は定義から直ちに導かれるが、後者は少し議論が必要である。なお、ここでは有理数列を用いて説明したが、区間の縮小列や 2 進展開など他の実数の表現に置き換えても議論は変わらない。

weak continuity axiom に対しても同様に、一般に自由選列は最初の有限個の項しか分からないため、対応付けられる自然数は自由選列の有限始切片に基いて決定される必要があるということから、動機付けを与えられる。weak continuity から実数上実数値関数 f の連続性を出すには、自由選列 $f(\alpha)$ の第 n 項目が weak continuity により α の有限始切片から決まることに注意すればよい。

以上のような連続性原理の動機付けは極めて自然なもののように思われる。BISH では連続性原理は証明できないものの、当の Bishop 本人は「熟考すれば、すべての実数上の関数が連続であるということは極めて尤もらしい」と述べている。また、Beeson も [Beeson85] において、こういった事実の尤もらしさを認めている。しかし、Bishop はその後に「だが、ブラウワーの議論を証明として受け止めることは数学の特質を破壊する」と続け、Bishop は連続性原理を認めないことを示唆している。BISH における関数概念は「引数から返り値を与える有限的な手続き」というものだが、次に解説するように、この関数概念に基いて実数上実数値関数の連続性を導くことができる。著者の見るところでは、BISH で連続性原理が証明・反証されない理由は、手続きの意味を明瞭にしていないためである。

BISH に必要十分とまで言わなくとも「うまく」対応するような「手続き」の説明があるのかどうかは重要な問題だろう。勿論、そのような説明が可能ではなくとも、他の多くの数学と両立可能な形で大規模な数学の展開を可能にした BISH そのものの意義が失われるわけではないが、丁度 ZF 集合論に対する反復的集合観が

[19]古典的には無限に問うことにより列全体を得られるので、その意味で、有限の範囲しか知りえないとする直観主義的な自由選列の概念は古典数学と反する。

そうであるように、BISH に対応するような「手続き」の説明はその数学の直観的描像を与えることに一定の貢献をもたらすと思われる[20]。ただし、非整礎な ZF のモデルも存在するので、反復的集合観が ZF のユニバースの必要十分な説明になっているとは言えないため、例えば次に説明する計算可能数学の TTE アプローチによるモデルが、反復的集合観と同じ程度に適切な説明になっていると考えることもできるかもしれない。しかし、反復的集合像が ZF の「意図された」モデルであるのに対して、TTE が BISH の「意図された」モデルであるかどうかは疑わしい。[21]

2.2.3 無限文字列上の計算可能性と矛盾の解消

さて、次に Bishop の言う「有限的な手続き」の一つのモデルを与えよう。「有限的な手続き」というものは一つの見方として「計算可能な関数」と捉えられるが、それでは実数上の計算可能性とは何だろうか。自然数上、より広くは有限文字列上の計算可能性については、チャーチ・チューリングのテーゼにより確固たる計算モデルが存在する。しかし、実数という対象は一般には有限文字列で表現できないため、この計算モデルに頼ることはできない。ここでは、現代の計算可能解析学において最も代表的な TTE(Type-two Theory of Effectivity) という計算モデルを現在の目的のために極かいつまんで説明しよう[22]。計算可能解析学は古典数学の立場で計算可能性という制約のもとでの解析学を展開する試みであるので、これは古典数学の一部と見なすことができる。

TTE では、可算個の記号を用いて構成される可算無限文字列を扱い、read-only の可算無限の長さをもつテープ、write-only の可算無限の長さをもつテープ、途中の計算をそこで行うための可算無限の長さをもつテープ、そして計算を実行するためのヘッド（有限状態機械）がある。有限個の記号を用いて構成される文字列を扱うほうがポピュラーだが、自由選列は通常ベール空間の元として捉えられるので、可算個の記号としておいたほうがよい。これは Type-two Turing machine と呼ばれるものである。この上で実数上の計算を実現するためには実数の表現が必要となるが、標準的に用いられるのは収束速度の固定された有理コーシー列や有理区間の縮小列である。収束速度が固定されていなければ、列の始切片をいくら読み込んでもそれが表現する実数の存在範囲を絞り込めず、そのため一般には出力が計算できなくなってしまうので、収束速度の固定は本質的に重要である。表現の仕方により計算可能な実数上の関数のクラスが変化することが知られているので、TTE にとって表現の仕方は重要な意味をもつが、ここではそのことはあまり重要ではない。

[20]ただ、BISH が他の数学と両立可能であるという有名な主張は慎重に解釈すべきである。この点については以下の再帰的数学の節で詳しく論じる。

[21]正則性公理があっても非整礎な ZF のモデルは存在する。コンパクト性定理（またはウルトラパワー）の簡単な応用である。一階述語論理の表現力の限界がこのあたりにあると思われる。

[22]同等ではない計算モデルもあるが、多くのモデルがこれと同等である。

重要なのは、計算を実行するヘッドは、read-only のテープを最初から徐々に読み込んでいき、それにつれて write-only のテープに出力が次々と書き込まれていくということである。このことは、ブラウワーの関数概念のときと同様な理由で、直ちに連続性を導く。こういった無限列上の計算可能性から連続性が帰結することは、高階の帰納的汎関数の研究において広範に観察されてきた現象である（[Longley00] 参照）。ここで説明した連続性はほぼ直接的に定義に組み込まれていたが、数学的により深い結果は、ドメインを計算可能な列に制限しても連続性が導かれることである。計算可能な列については全体を一挙に捉えられるため、連続性が出るかどうかは自明ではない。

このように、実数の表現の仕方をみても、関数概念の内実をみても、直観主義数学と計算可能数学の間には注目すべき類似性がある。このことから、直観主義数学の「関数」を古典的に理解するために「計算可能な関数」に翻訳すればよいのではないか、と考えることはごく自然な発想だろう。実際、これにより一見突飛に思われる連続性原理が古典的に正しい命題へと翻訳されるのである。また、関数というのは任意のドメインの元に対してコドメインの元が唯一つ存在するものだが、BHK 解釈によれば「存在」とは「構成できる」なのだから、BHK 解釈のもとでは関数はすべて計算可能になるという見方によってもこの翻訳を支持することができる。

このインフォーマルな議論は realizability semantics で考えれば数学的に実現可能なものである。そこでは、論理式が realize されるということを、その正当化の手続きがコードされた対象（realizer）が存在することにより定義する。実際に realizer の存在する論理式が、その意味論で真となる論理式である。実数上実数値関数 f に対しては当然 $\forall\alpha\exists\beta f(\alpha)=\beta$ が証明できるが、この論理式の realizer は、α を貰ったとき、その witness と $f(\alpha)=\beta$ の realizer を返す帰納的汎関数である。帰納的汎関数の返り値の有限の始切片は入力値の有限の始切片から計算できることから、連続性原理が realize されることになる。ここで、一般の論理式に置き換えれば連続選択公理の成立も分かる。

realizability semantics が健全になるということは、直観主義解析学に現れる関数をすべて計算可能関数と解釈しても問題ない、ということを含意する。言い換えれば、計算不可能な関数の存在は（無矛盾なら）直観主義解析学では証明できない、ということである。しかし、計算不可能な関数が存在することが証明できないということから、直観主義解析において計算不可能な関数は存在しないと断言することはできない。実際、ある種の関数のクラスの計算可能性を主張する論理式は直観主義解析から独立である。この事実をいかに受け取るべきかについては次の小節で議論する。

なお、FT や bar induction の realizer が存在することから、その realizer にそれらの構成的正当化の方法がコードされているのではないかと一見思われるかもしれないが、健全性の証明は（連続性原理は入っていないが）bar induction は入っている体系でなされているので、その証明の際にメタレベルで bar induction が用

いられており構成的正当化は得られない。

恒等翻訳により矛盾を引き起こす、もう一つの有名な直観主義数学の定理について考えてみよう。もちろん、連続性原理以外は古典数学と恒等翻訳で無矛盾なのだから、この定理も連続性原理から導き出されなければならない。定理の主張は次のようなものである。

$$\neg\forall\alpha \in R(\alpha = 0 \vee \neg\alpha = 0) \tag{1}$$

このような定理を念頭において、「直観主義数学では強い形に表現された俳中律の否定が証明される」などと言われることが多い。もちろん、俳中律の二重否定は直観主義論理の定理であるので、俳中律の例化（instance）それ自体の否定が証明されることは（無矛盾な体系では）あり得ないことだが、古典論理ではこの定理は俳中律の例化の否定と同値である（適当な Skolem constant を導入すれば）。

この定理の証明は容易である。$\forall\alpha \in R(\alpha = 0 \vee \neg\alpha = 0)$ と仮定して矛盾を導けばよい。この仮定から、$f(x) = 1(if\ x = 0), f(x) = 0(if\ \neg x = 0)$ という関数 f の定義が正当化されるが、一方で、連続性原理によればこのような関数は存在しない。ここで、「関数」と「計算可能な関数」の対応付けにより、証明のステップが古典数学で許容可能なものとなることに注意されたい。これは計算可能性翻訳が定理の根拠付けである証明をある程度保存してくれることを予想させる。実際、realizability の健全性により、このような証明の変換は数学的に保証される（むしろ事実は逆で、そうした予想を厳密に書いたものが realizability の健全性の証明なのだが)。定理の主張を BHK 解釈すれば、任意の自由選列に対してそれの各項がすべて 0 かどうかを判定する手続きが存在すると矛盾するというものになるが、これは古典数学で真な命題である。よって、この翻訳によればやはり矛盾は生じない。

連続性原理から導かれる恒等翻訳で古典数学と矛盾する他の命題についても（健全性より）同様に矛盾が解消できる。例えば、古典的な中間値の定理や最大値・最小値の定理に対しては直観主義数学における強い反例がよく知られているが、これらはすべて、パラメーターごとに求められている値（中間値、最大値）を返す関数が計算可能（連続）にはとりえない、という事実として古典数学においては理解されることになり、矛盾は生じないのである。なお、不連続関数の存在を肯定も否定もしない BISH では弱い反例にしかならないが、直観主義数学では不連続関数は存在しないことが示せるので強い反例になるのである。

2.2.4 計算可能性翻訳の問題点と利点

T1 から T3 への翻訳として、恒等翻訳と計算可能性翻訳という 2 つの選択肢があることを見てきたが、それでは、どちらの翻訳がより適切なものなのだろうか。適切さは価値観に相対的な幾分主観的な概念だが、それについて何も有意味な議論ができないということはないし、直観主義数学と古典数学の関係を理解するこ

とを望むなら、我々は翻訳の適切さの基準について議論すべきだろう。これまでの流れでは、明確な動機付けの下で恒等翻訳のもつ矛盾を解消できた計算可能性翻訳に分があるように思われるが、事態はそこまで単純ではない。計算可能性翻訳の翻訳の孕む幾つかの問題点について考察してみよう。

まず、直観主義数学では（実数上実数値）連続関数は非可算個存在する。これは、BISH において実数の集合が対角線論法により（自然数からの全射が存在しないという意味で）非可算であることと、任意実数に対する定数関数（その連続性は構成的に証明できる）が定義できることと、直観主義数学が BISH の拡張体系であることによる。[23]

よりブラウワーの精神に近い説明をするなら、以下のようなものになるのではないだろうか。ブラウワーによれば自由選列は「理想的数学者」が徐々に各項を生成していってくれるので、それを書き写すという操作により任意の選列 α に対して、$f(x) = \alpha$ なる定数関数が定義できると考えられる。したがって、定数関数の個数でさえ可算ではない。[24]より形式的には、自由選列に対する定数記号 α_0 と自由選列上の関数記号 f を付け加えて言語を拡張した上で、$\forall \beta f(\beta) = \alpha_0$ を公理として追加して、自由選列の n 項目が m と分かるにしたがって $\alpha_0(n) = m$ を公理に追加していけばよい。この操作は理想的にはすべての定数関数に対して行うことができる。拡張後の理論は拡張前の理論の保存拡大になるので、こういった操作は理論を強めていることにはならない[25]。

一方で、TTE では（実数上実数値）計算可能関数の集合は可算であるので、この点において計算可能性翻訳は不適切と思われる。だが、この実数上の関数の濃度に関する欠点は、Type-two Machine に任意の実数表現に対するオラクルを持たせた計算モデルを用いることにより乗り越えられるだろう。この計算モデルは構成性の点で疑わしい面があるかもしれないが、今我々は直観主義数学の関数概念を捉える古典的な関数概念を求めているのであって、十分に構成的な計算モデルを構築しようとしているわけではないのだから、このような計算モデルを考えることには何の障害もない。もちろん、他の点で両者にずれがある可能性はあるが、それは実際に発見された後改めて考えることにして先に進もう。

もう一つの計算可能性翻訳の問題点は、直観主義数学で実際に現れる実数上の関数がすべて計算可能なものであったとしても、直観主義数学内部ですべて実数上の関数が計算可能であることを証明できるわけではない、言い換えれば、関数というタームを計算可能関数と解釈する方法はせいぜい直観主義数学の一つのモデルを与えているに過ぎず、不当に直観主義数学の関数概念を制限していることになる、というものである。仮に計算可能ではない関数が存在するモデルがあれば、連続性原理はその関数に対してまで連続性を要請するのだから、関数を計算

[23]たまに誤解している哲学者がいるが、対角線論法は構成的である。構成的再帰数学の小節の「CRM における実数とその上の関数」の箇所で対角線論法が構成的であることを具体的に示す。

[24]しかし、ブラウワーがこういった説明に同意するか自信はない。

[25]通常の数学で様々な記号を定義する行為と本質的に同様のものである。

可能な関数に翻訳することは直観主義数学のそういった側面を損なってしまうと考えられる。もちろん、計算不可能な関数が現れるモデルがあっても、それが古典的にみて連続であれば、計算可能性とは異なる別の古典数学の概念を用いることによって、矛盾を解消して尚且つ直観主義数学の関数概念をより正確に表現する翻訳を発見できる可能性はある。

では、実際のところ計算可能ではない実数上の関数が存在するモデルがあるのかどうかと言うと、それは直観主義数学の形式化の仕方に依存するだろう。なお、自由選列は規則から生成されることを仮定しない一般的な自然数上の関数なのだから、自然数上の計算可能ではない関数が存在することは積極的に許されてよい。実際、直観主義数学では、「すべての自然数上の関数は帰納的である」という Church のテーゼから矛盾を導くことができる。これについては「直観主義数学と構成的再帰数学」の小節でより詳しく述べる。なお、「帰納的ではない（自然数上の）関数は存在しない」という弱い Church のテーゼは直観主義数学と整合的である。

連続性原理を weak continuity とした Kleene の体系では、「すべての実数上の関数は計算可能である」は独立命題であるため「計算不可能な実数上の関数が存在する」を公理として追加しても矛盾しない。したがって、この体系に対する Kleene の realizability への批判としては、「一つのモデルに過ぎない」と言うことは正しい。一方で、Kleene の体系において連続性原理を generalized continuity principle（GCP）というものにすると、ある realizability semantics に対して健全性と完全性が言える、すなわちその体系における関数概念がその realizability で用いられる計算可能性の概念と一致すると言える。

しかし、GCP は、almost negative formula で定義される自由選列の集合をドメインとする関係に対する選択関数が計算可能にとれる、というものなので、定義の中に一定の計算可能性の概念を含んでいるという問題がある。[26]また、（関数は関係の特殊な場合なので）GCP は一定のクラスの関数の計算可能性をダイレクトに含んでいる。「すべての対象は計算可能である」とする Markov ならともかく、少なくとも（weak continuity などとは異なり）GCP は上で述べたような連続性原理に対する直観から必然的に帰結するとは言い難い。（ある定式化のもとでは）Kripke's schema や FT は対象の計算可能性を要求する Church のテーゼと矛盾するので、ブラウワー本人が GCP を認めたかどうかも疑わしいと思われる。実際のところ、GCP は realizability の特徴づけのために導入されたという側面も強いだろう。

そして、weak continuity のように計算可能性の概念を明示的には含まない「純粋な」連続性原理を用いた体系に対して健全かつ完全となる realizability semantics（を与える計算可能性の概念）は著者の知る限りでは存在しないため、純粋な連続性原理を用いた体系では、おそらく「すべての実数上の関数は計算可能である」は

[26]なお、ドメインが almost negative formula で定義されているという条件は、x realize ϕ をあらわす論理式が almost negative であることと関係している。

導出されないのだろう[27]。その場合、計算不可能な関数の存在を主張する公理を追加しても（元の体系が無矛盾なら）矛盾しない。したがって、「一つのモデルに過ぎない」という批判には一定の妥当性が認められると言える。さらに、最初に注意したように、realizability semantics は直観主義論理に対して完全にはならないため、論理の段階でも「一つのモデルに過ぎない」という批判は尤もなものである。

だが、今見たように必要十分な解明にはならないにしても、計算可能性翻訳が直観主義数学の関数概念の古典的理解をある程度可能にすることは事実である。realizability の健全性より、直観主義解析の定理には古典的な正当化が存在することが分かる。一方で、恒等翻訳はただ矛盾を突きつけるのみであって、このような理解を生じさせるものではない。

注意しなければならないのは、知識・理解が増すかどうかで翻訳の適切さ・優劣を判断するなら計算可能性翻訳のほうが適切である、というようにこの直観を表現することは適切ではないという点である。「知識・理解が増す」という基準が我々の主観に強く依存する曖昧過ぎるものであるのは勿論のこと、翻訳とは一方の理論を他方の理論の中で合理的に解釈するための方法を与えるものであって、一方の理論について何かを学ぶための方法を与えるものではないのである。例えば、T1 も T2 も古典命題論理である場合、論理式を恒等翻訳するものと論理式に二重否定をつけて翻訳するものとでは、知識・理解が増すどうかという考慮からすると、二重否定しても証明可能性は変化しないという事実に関る後者のほうがより適切だということになるが、この結論は今述べた基準により不適切である。知識や理解が増すのは大いに歓迎すべきことだが、それは翻訳の適切さとはまた別の種類の問題だということである。

それでは、計算可能性により直観主義の関数概念が分かった気がする、という素朴な感覚は翻訳の適切さの基準として用いるためにどのように具体化すればよいのか。次のような考えはどうだろうか。翻訳とはある言語の言葉に対して、その言葉が表現しているのと同じものを表現する別の言語の言葉を対応させることだ、という視点からすれば、直観主義の関数と古典数学の計算可能関数はそれぞれが表現しているものが類似しているため、関数は計算可能な関数に翻訳されるべきである。

すなわち、対応付けられる 2 つの語の表象が類似していることを翻訳の基準とする、という具体化の仕方があるだろう。だが、「言語は言語以前の何かの翻訳ではない」というヴィトゲンシュタインの主張に代表されるように、言葉の表象や観念といった考えに対する様々な困難が現代哲学では指摘されている。著者はそれに完全に同意するわけではないが、この未だ素朴な具体化を哲学的に中立的なものとするため、次のように表現しておくことがより適当だろう。すなわち、対応付けられる 2 つの言葉のそれぞれの言語（理論）における振る舞いの類似・性

[27] これ自体は著者のいい加減な推測である。しかし、weak continutiy をはじめとする、幾つかの純粋な連続性原理を用いる体系に対して、Kleene の realizability が完全にならないことは現実に数学的な事実として知られている。

質の共有をもって翻訳の適切さの一つの基準を定める。言葉の振る舞いの見かけ上の存在さえ認めない立場はないと思われるため、この表現は哲学に中立的である。結局のところ、直観主義の関数と古典数学の計算可能関数の表象が類似しているという内包的な主張の根拠は、それらが類似した性質を持っているという外延的なことでしかないのだから、我々の直観を表現するにはこれで十分事足りるのである。そして、計算可能性翻訳により対応付けられる文は（例えばその健全性が示すように）互いにある程度共通した性質を持っている。

さらに、計算可能性翻訳による矛盾の解消が恣意的な矛盾の解消でないことは、次のような事実によっても裏付けられる。まず、恣意的な矛盾の解消とは、とにかく定理を定理に、それ以外のものをそれ以外のものに写すというような、単に矛盾を解消するということ以外に何の根拠も持たない矛盾の解消の仕方のことである。こういった矛盾の解消をする翻訳は、ある重要な一つの特徴を持っていない。すなわち、それは原始論理式から帰納的に翻訳先を定めていくわけではない。論理的な順序関係からすれば、まず原始論理式の翻訳先が定まり、次により複雑な論理式の翻訳先が定まるべきである。すなわち、翻訳は文と文の間の論理的構造を保存すべきである。ここでは realizability の定義は与えなかったが、realizability semantics は実際にこのような性質を持っており、以上の議論により、恣意的ではない矛盾の解消を与えるという点においても、計算可能性翻訳を擁護することができる。

もちろんこういった性質は恒等翻訳も持ってはいるが、それは矛盾の解消を与えるものではない。以上の議論は、計算可能性翻訳の矛盾の解消の仕方がある程度妥当なものである、ということを示すためのものであって、恒等翻訳は矛盾の解消という前提に既に抵触してしまっている。

2.2.5 背景哲学と翻訳の適切性

恒等翻訳は確かに２つの理論を明白に矛盾させるのだが、果たして矛盾させることは「悪い」ことなのだろうか。事実矛盾しているものを矛盾していると表現することには何の害も無く、全く正当なことである。２つの翻訳の対立は、直観主義数学と古典数学は真に矛盾しているのか、それとも矛盾は見かけ上のものに過ぎないのか、という直観主義数学と古典数学の関係についての相対する見方と深く関連している。歴史的事実としては直観主義数学者（ブラウワーなど）と古典数学者（ヒルベルトなど）の間に激しい衝突が生じたことは確かだが、実際のところ内容的にみて両者は対立するものなのだろうか、以下ではこの点について考えてみよう。

真の対立かどうかという問題は、数学的なものというよりは哲学的な種類の問題だろう。直観主義数学が、数学のユニバースは直観主義数学が提示するようなものなのであって、そこには直観主義の意味の「関数」は存在するが、その範囲を逸脱した古典数学の意味の「関数」など数学のユニバースには一切存在せず、そんな

ものは古典数学者の無知に根ざすでっち上げられた偽りの存在に過ぎない、というような主張を含むのであれば、この対立は真の対立であると考えることが妥当だろう。実際、直観主義数学では不連続関数が存在しないことが証明できるのだから、そのユニバースに古典的には存在するはずの不連続関数は存在できず、このような点で両者の存在論は異なっている。上で述べたユニバースは人間と独立に存在するとする必要はないので、上のような観点はブラウワーのものと反するわけではないが、よりブラウワー的に表現するなら、数学の世界には人間がその内的直観によって精神的に構成できるものだけが存在するのだから、古典的な関数概念は人間の構成し得るものを超越しているため存在し得ない、という議論になると思われる。実際ブラウワーや Bishop は古典数学が構成的意味を欠き、古典的存在量化子により膨大に拡張された存在論にある種の偽りがあると考えたからこそ、異なる数学を提案したのであろう[28]。

ここで重要なことは、こういった古典数学との概念的対立を見せる立場は、関数というものを単に場合に応じて様々な規約によって取り決められる対象として扱うのではなく、いわば規約から独立した一つの存在として扱い、関数という古来から人間が持ってきた概念に対する特性やあるべき姿を明らかにしようと試みている、ということである[29]。ブラウワーにとって、連続性原理は単に彼の数学体系のための便宜的な仮定なのではなく、内的直観によって人間の有限的知性が認識する自由選列上の関数という概念が本質的に持っていると判断される性質なのである。したがって、古典数学で扱われるような連続性原理の成り立たない関数概念は、ブラウワーによれば、実数上の関数の性質に関する全く誤った認識にもとづく関数概念の捉え方であることになる。

さらに、実際の構成的数学の実践者による、より計算可能性翻訳に密着した例がある。Fred Richman は、自身のウェブページに掲載した"Confessions of a formalist, Platonist intuitionist"において、realizability semantics により構成的数学を帰納的関数についての数学とも見なせるが、そのように見ることは構成的数学が数学それ自体であることを見逃してしまうと述べている。すなわち、構成的数学は実数から実数への関数すべてを扱っているのであって、関数全体の中の真部分クラスである帰納的関数だけを扱っているのではないのである。

このように、古典数学と概念的に対立する哲学（特に存在論）を持っているものとして直観主義数学を捉えるならば、両者の対立は例えば「関数」という概念の本質をめぐる真の対立であって、その対立の様子を正しく表現することのできる恒等翻訳が、計算可能性翻訳により強引に矛盾を解消し事態を全く歪曲させて表現する翻訳よりも、より適切な翻訳であると言えるだろう。当然ここでは、対立を正しく表現する翻訳がそうではない翻訳よりもより適切である、という前提

[28] ブラウワーの「構成」は精神的構成であるのに対して、Bishop の「構成」はあくまで何らかの意味での計算・有限的手続きであるという違いはあるが。

[29] ここで、規約からの独立は人間からの独立を含意しない。ブラウワーは数学的対象の人間からの独立を否定したが、それが単なる規約的対象だとも考えなかったため、この表現は彼の哲学に反するものではない。

を暗に採用している。翻訳とは一方の理論の主張を他方の理論の中で正しく理解するための手法と考えられるのだから、翻訳の適切さの基準に関するこのような前提は一定の妥当性をもつ。また、特にブラウワー的直観主義哲学を伴ったものとして見るなら、Detlefsen が展開している、ブラウワー的直観主義に対して BHK 解釈は不適切であるという議論から（[Detlefsen90] 参照）、計算可能性翻訳の不適切さはより強化される。

上の議論に対して次のような反論が寄せられるかもしれない。すなわち、確かに直観主義数学と古典数学の間には数学の存在論に関するある種の緊張関係があるとも考えられるが、それを恒等翻訳により捉える必要はなく、計算可能性翻訳を採用してもなお、両者は緊張関係にあると表現することは可能であり、したがって、少なくとも両者の緊張関係によって恒等翻訳を擁護することはできない。これに対して返答するなら、そのような表現が可能である、というのはまったくその通りである。他人の信念を規制する権利など誰にもないだろう。しかし、計算可能性翻訳と緊張関係を同時に肯定することに一体どれだけの意義があるだろうか。一方で直観主義における「関数」は単に言葉の割り当てが異なるだけで実は計算可能な関数なのだと主張しながら、すなわち直観主義数学は関数の中の特殊な一部の関数である計算可能関数を「関数」と呼んでそれについて論じていると見なしながら、他方では直観主義における関数概念と古典数学における関数概念は対立していると主張するなら、それは相反する二つの信念を抱くことにほとんど等しい。単なる語法上の相違としてしか捉えられない（と主張される）相違が概念的対立とまで言えるはずがないことは明白である。しかも、直観主義数学における関数が正確に計算可能な関数であると言うことの不適切さは既に見た通りである。

直観主義数学の哲学が古典数学を排除しないものであればどうだろうか。例えば、直観主義数学は連続性原理などを仮定的に採用する一つの数学に過ぎない、というような穏健な立場をもつものとして直観主義数学を捉えるならば、過激な対立関係を提示する恒等翻訳は計算可能性翻訳より不適切ということになるだろう。さらに極端な見方として、直観主義数学は単に公理と推論規則からの証明論的導出をする営みなのだと考えるなら、直観主義数学から古典数学への翻訳は、そういった導出なりを自然数上などにコード化する翻訳が適切だろう。このように、直観主義数学の哲学的背景をどのように捉えるかによって、適切な翻訳は変化するのである。だが、様々な背景の理解が可能であるにせよ、直観主義数学では現に不連続関数は存在せず、すべての関数は連続であると主張されるのだから、この主張を額面通りに受け取ってその存在論を描き出すことが、直観主義数学の実践を最も適切に描き出す見方であると思われる。少なくとも、そういった見方を排除することはできない。また、特に上で述べた「極端な見方」は現代の数学の哲学ではかなり劣勢である（例えば [Shapiro00] の game formalism の箇所参照）。

ところで、計算可能性翻訳を支持するような、直観主義数学の哲学的背景は想定可能だろうか。残念ながら、それは難しいように思われる。なぜなら、計算可

能性翻訳は「すべての実数上の関数が計算可能である」と主張するが、それを支持する哲学的背景を持つなら「すべての実数上の関数は計算可能である」をそのまま公理にすればよいはずだが、実際にこれと類似の公理を採用するのは後に扱う再帰的数学などのほうであって、直観主義数学はそうではないからである。計算可能性翻訳は直観主義数学のすべての関数が計算可能であるとしても矛盾しないことを示しているだけで、何かその仮定に積極的な理由があることまでは示していないのである。

2.2.6 適切さの基準：共有性、単純性、独立性、社会性

さらに、理論の一方の言語が他方の言語に含まれている場合、共有する言語の部分は恒等翻訳すべきである、という基準から恒等翻訳を擁護することもできる。もちろん、言語を共有しているのに恒等翻訳が全く不適切である例を人工的に構成するのは容易だが、今の場合そのような人工的な例とは異なり、直観主義数学と古典数学とでは関数などのそれぞれの概念について共有している性質もかなり多いという点に注意すべきである。[30]このことは、Bishop の構成的数学で証明される定理についてはどちらの数学でも成り立つことと、Bishop の構成的数学の帰結の豊富さを考えれば、直ちに納得されるだろう。また、FT は古典的に妥当なため、ここから導かれるコンパクト空間上の連続関数の一様連続性なども共有している。ごく一部の相違だけを強調することはフェアではない。かなりの性質は共有しているのだから、その意味では恒等翻訳もある程度は健全なのである。なお、性質の共有という概念は、翻訳により対応付けられる文が性質を共有するという意味であるため、それは翻訳に相対的な概念であることを注意しておく。

恒等翻訳の適切さを比喩的に説明する例を挙げよう。イギリスでもアメリカでも英語が話されるが、何が道徳的（moral）であるかについて両者で明確な不一致があるという状況は想定可能である。このようなとき、イギリス英語の「moral」をアメリカ英語の「moral」に翻訳することは不適切である、ということになるだろうか。勿論そんなはずはない。大体においてその言葉の使用法が一致していれば十分なのであって、完全に一致している必要は全くないのである。異なる複雑な理論を扱う場合、完全な一致を求めるなら、そもそも翻訳など不可能ではないだろうか。ここで、それは曖昧性のある自然言語の場合であって数学のような人工言語の場合には完全な一致を求めるべきだ、という反論が考えられる。しかし、例えば $ZF + \neg AC$ と ZFC では前者が存在しないという関数（の恒等翻訳先）を後者は存在するというが、このことから前者の関数は後者の関数に翻訳されるべきではない、ということにはならないだろう。

翻訳というものは、一つの言語（理論）における言葉をもう一つの言語（理論）において近似的に正しく理解するためのものなのであって、とにかく矛盾を生じさせないことを目指すものでもなければ、対応付けられる言葉の振る舞いや性質

[30] もちろん、無限個あるから多いなど、集合論的に保証できる意味で言っているのではない。

の完全な一致を要求するものでもない。完全な一致を要求するなら翻訳は大抵不可能である一方で、我々は2つの理論や言語の相互関係を理解するために何か翻訳を必要とするのだから、今述べたような仕方で翻訳概念を捉えることは相互関係の理解という目的にとって不可欠なものである。これは恒等翻訳を擁護するための主張ではなく、本稿で扱う翻訳概念について我々が認めるべき一般的な前提であり、いずれの翻訳も「正しく理解する」の解釈に応じてこの条件を満たしていることは既に見てきた通りである。このことと翻訳の単純性の考慮から、多くの性質を共有しているという条件が成り立つなら共通する言語部分は恒等翻訳すべきである、という基準には一定の妥当性を認められる。

しかし、多くの性質を共有しているという点では、計算可能性翻訳が勝っていることは明白である。単純性は、実際に翻訳の場面に際したときにまずは同じ言葉をそのまま翻訳してみようという実践的な指導原理であって、別の翻訳のほうが性質の共有が多いなら、そちらを優先させるべきではないかという反論が考えられる。こういった反論に対する一つの反論は、単純性は理解可能性に本質的に関る、というものである。複雑過ぎる翻訳は人間の理解を困難にする。計算可能性翻訳の根拠となる realizability semantics による論理式の写像先は実際に元の論理式をある程度複雑にしてしまう。さらに、こういった反論に対する別の反論として、関数概念の独立性と言語の社会性による恒等翻訳の正当化を提案する。この正当化は、規約・意味による真理（分析的真理）という見方に対する反対として、クワインの発想に基きパトナムが行った種類の議論（の一部）の応用として得られる。[31]

パトナムはニュートン力学における運動エネルギーと相対論的力学における運動エネルギーに目を向け、まず、仮想的にニュートン力学における運動エネルギーが例えば物理学者の国際会議で明示的に定義された状況を考え、現実の歴史と同様に後の物理学的研究によりニュートン力学が覆され、相対論的力学が受け入れられるようになったとする。相対論的力学での運動エネルギーは（v/c を 0 に飛ばせば同一になるにせよ）一般にはニュートン力学のものとは異なるが、こういった状況を、相対論的力学では単に異なった運動エネルギーの定義を用いているに過ぎない、と捉えることは妥当ではない。というのも、運動エネルギーという概念が十分広まって以降は、丁度アインシュタインがそうしたように、物理学者は運動エネルギーの元々の定義とそこから導かれる性質を区別せず、いずれにも等しく改訂の可能性を認めるからである。つまり、運動エネルギーは定義を含めてそれが持つ様々な性質の総合体として扱われるのであって、運動エネルギーが実は元々の定義の性質を持っていなかったということが判明する可能性があることになる。こういった考察から、こういった改訂の可能性のある明示的定義は分析的真理とは呼び得ないことが結論できる。論理実証主義者が考えたように、明示的定義は常に分析的真理を生む、ということにはならないのである。ここで我々の考察にとって重要なことは、ニュートン力学と相対論的力学において運動エネ

[31] [Putnam75] と [飯田 85]p223 参照。

ルギーという概念は全く異なるものではなく、それに結び付けられている性質の総体が実際にある程度一致しており、歴史的にそれらが恰も一つの実在する自然法則のように扱われてきたことから、２つの力学における運動エネルギーは一貫して同じ意味を持っていると言い得ることである。

最後の結論を引き出すためには一つ前提が必要だが、それは次の例で明らかにしよう。この事態はブラウワーによる直観主義数学の台頭とほとんど並行的である。つまり、ブラウワーは自身の数学において集合や関数という言葉を通常とは異なる意味で定義すると宣言したのではなく、古典数学で考えられている大きな集合や不連続関数は有限的なケースからの無根拠な類推という誤解に基く偽りの存在であって、実際には存在しないものであると論じたのだが、アインシュタインが運動エネルギーに対してしたように、このとき彼は集合や関数を特定の規約から独立した対象として扱っている。こういった数、集合、関数などの数学的対象を規約から独立した存在として扱う態度は、ブラウワーに限らず大抵の数学者が持っているものであり、規約主義の無根拠さが暴かれた現在（[BP83] や [飯田 89] 参照)、多くの数学の哲学者もまたそのような態度を共有している。実際、特に実数やその上の関数などの概念は最初から厳密な規定の下で扱われてきたのではなく、相当長い間直観的に扱われてきたものが比較的最近になって（ある意味では規約主義の根拠と見なせるような）形式集合論的な基礎が与えられたに過ぎない。集合論的な基礎は数学者が直観的に把握してきた実数やその上の関数といった概念の近似的なモデルであって、数学者が直観的に把握する実数やその上の関数そのものではない。実数上の関数という概念はその起源から現在に至るまで数多の変更を余儀なくされてきたかもしれないし、実際、直観主義数学と古典数学では「関数である」という述語の外延は不連続関数の非存在・存在のために異なる。しかし、それらの関数概念、少なくとも特に我々が問題としている直観主義数学と古典数学は現に多くの性質を共有している。例えば、既に述べたように、Bishop の構成的数学で示される範囲での（非常に豊富な）性質はすべて共有している。関数という概念のコアの部分は同一なのである。

この性質の共有という事実と上で詳しく見てきた関数概念の独立性から、直観主義数学と古典数学で関数という言葉の意味は同一であると結論したいが、そのためには言語の社会性という前提が必要である。この前提の必要性は外延が異なるのに同意味であると主張してよいのかという疑問を考えてみればわかる。これが見かけ上の奇妙さに過ぎないことは、何が道徳的であるかは過去と現在では異なるにも関らず、そこから「道徳的である」という言葉の意味が過去と現在では異なるとは判断しないことを考えてみればよい。例えば、過去のある時期のある地域では奴隷制は道徳的に問題なかったであろうが、現在では言語道断の不道徳だろう。異なるのは語の意味ではなく、我々の道徳的感覚のほうだろう。仮にこういったことから意味が違うということになるとしたら、日本人全体を「美しい」という語を同じ仕方で用いているという同値関係で割れば数多くの同値類に直和

分割されることだろう[32]。これは明白に言語の社会性を破壊する。同一性は人間が与えるものとは言え、果たして日本人の多くは同じ言語を話していないと言うことは適切だろうか。言語は（個人のレベルではなく）ある程度の時間幅まで含めた大きな社会的単位で捉えられるべきであるということ、すなわち言語の社会性は現代哲学の常識であり散々検討されてきたことなので、ここでその議論を蒸し返すことはしない。[33]そういった現代哲学の知見を受け入れるなら、我々は直観主義数学と古典数学で「関数」の意味が同じであると主張しなければならない。

纏めると、古典数学と直観主義数学における関数概念はコアとなる性質を共有しており（性質の共有）、我々が素朴に持っている一般的な関数概念の例化となっていること（関数概念の独立性）から、それらの意味が異なると主張することは言語の社会性を破壊する。したがって、現代哲学のメインストリームのように言語の社会性を認めるなら、以上の議論によって、直観主義数学と古典数学で関数の意味は同一であると言わなければならない。そして、同じ意味の語が互いに対応付けられるべきであるというのは至極当然の結論であり、かくして恒等翻訳に対する一つの正当化が得られた。

なお、特定の数学体系から離れた関数概念を問題にしているので、以上の議論において T3 を（日常言語を含まない）古典数学とすることはできない。メタ理論 T3 の一つの役割は、翻訳の適切さの根拠を考える場を決定することである。T3 として採用した理論の外に根拠があっても、その理論を採用するならそれを比較の根拠として使用することはできない。

2.2.7 暫定的結論

翻訳の適切さの判断基準についてこれまで考えてきたが、この辺で以上の考察の結論をまとめてみよう。

計算可能性翻訳の利点は、それが原始論理式から帰納的に翻訳先が定まるように定義されており、文の理論内での性質（振る舞い）をある程度維持し、さらに直観主義数学の定理の証明を保存した上で（従って恣意的ではない仕方で）矛盾を解消する、すなわち古典的な立場から直観主義数学のモデルを与えるということにあり、このような点を重視して翻訳の適切さを判断するなら、計算可能性翻訳に分があることになる。

ただし、計算可能性翻訳には、それが単に直観主義数学の一つのモデルでしかなく、他のモデルにより表現される直観主義数学の側面を無視してしまう可能性

---

[32] 日本人の人口とほとんど等しくなると思われる。不連続関数が関数であるかどうかは、ジャンプ力の高い人がカッコイイかどうかという問題と同様であり、それらについての相違は「関数」や「カッコイイ」という概念のコアには影響を与えない。

[33] 例えば、そのような議論のうちの一つとして、クリプキがヴィトゲンシュタインのパラドクスに対して提案した「懐疑的解決」が挙げられる。[Kripke82] を参照。

があるという欠点もある。[34]直観主義数学では、計算可能関数が関数のすべてとは限らないのである。また、計算可能性翻訳を擁護する背景哲学は考え難い。さらに、計算可能性翻訳は論理のレベルでさえ、適切かどうか疑わしい側面がある。

一方、恒等翻訳の利点は、ある種の自然な哲学を伴って見た場合の直観主義数学と古典数学の間の対立関係を適切に表現できること、（字面通りの対応付けで）ある程度の性質を共有する場合に共通する言語部分は恒等翻訳すべきであるという単純性を重視する原則に適うこと、そして関数概念の独立性を適切に表現することにあり、このような点ではむしろ恒等翻訳が優れていると言える。恒等翻訳は上に述べたような形で意味を保存する写像になっており、計算可能性翻訳もある程度の性質の共有という点ではやはり意味を保存している。

さて、我々はいずれの優劣の付け方がより適切か見るために、優劣の付け方の優劣についてより深く論じるべきだろうか。優劣というものは特定の価値観に基いてしか付けられるないのだから、こういった考察が我々を無限背進に導くことは容易に予想できる。無限に考察を続けることは我々にはできないにしても、可能な限り多くの有限まで背進してみることが我々の理解を助けるなら、優劣の付け方の優劣の付け方の優劣の付け方の $\cdots$ と続けることは有意義かもしれないが、そういった行為による利益は少ないと見込む著者はここで背進を中断させてもらいたい。

現時点での著者の結論は、ここで提示した二つの翻訳の一方のみが妥当であると主張できるような論拠はなく、優劣の基準に応じていずれが適切か変化する、というものである。ただ一つの最も適切な翻訳が存在するわけではないのだから、翻訳から独立に直観主義数学と古典数学は矛盾する或は矛盾しないと主張することはできない。そして、古典数学と直観主義数学の対立関係の問題も、いずれの翻訳が適切かという問題と連動している。翻訳の適切さの問題に答えることは、対立関係の把握に寄与するし、その逆もまた然りである。対立関係に関する最終的な結論も、両者は対立しているわけでもなければ、対立していないわけでもないという直観主義的なものである。今の所、特定の翻訳とは独立に対立関係について語り得るに十分強い根拠を我々は持っていないように思われる。

2.2.8 幾つかの注意

構成的数学においては、コーシー列により定義される実数とデデキント切断により定義される実数は同型ではない。後者のほうが一般には大きいのである。ただし、AC_{00} を仮定すれば同型性が証明できる。しかし、トポスによる連続性原理のモデルを考える際には、二つの実数が異なるモデルが利用される。また、これは著者にとっては驚くべき事実だったのだが、BISH において不連続関数が定義できるような実数の定義が存在する。構成的数学におけるデデキント実数の標準

[34]realizability の改良により健全かつ完全になるかもしれないので、「可能性がある」としか言えない。

的定義を negative なものにすると、場合分けによる定義が可能になり、不連続関数が定義できてしまうのである。勿論、そのような定義に反対する理由を挙げることは可能だが、古典的にはすべての定義は同値である（以上の事実については [TvD88],[TvD89] 参照）。

実は、realizability semantics を古典論理上で「素朴に」考えると、俳中律が realize されてしまう。これは、命題 P に対する realizer は存在するかしないかであるというメタレベルでの俳中律を使用することにより証明できる。この事態は、古典的な立場から、なぜ構成主義で俳中律が成り立たないのか理解することを難しくしてしまうように思われる。しかし、通常 BHK 解釈で俳中律が必ずしも成り立たないことを納得するとき、我々は特に直観主義的なメタ理論を採用するとか、古典的なメタ理論は採用しないとか、想定しているわけではない。その直観は、realizer（BHK 解釈なら証明あるいは構成）は具体的に提示されるという暗黙の仮定を採用しているからだろう。「具体的に提示される」という概念そのものは普通の数学者でも持っているもので、特に直観主義に固有の概念ではない。したがって、「A is realized」を「自然数（或は帰納的関数）n が具体的に提示され、n realize A」により定義すれば、俳中律は realize されないで済むように思われる。

「具体的提示」という概念は非形式的なもので、そこに違和感を覚えるのは自然である。「A is realized」を「自然数（或は帰納的関数）n が（メタ理論で）存在して、n realize A が古典数学で証明できる」により定義して、メタ理論を有限的な理論にすれば「具体的提示」は形式的に把握できるが、その場合、直観主義数学に対して健全になるということは諦める必要が出てくる。直観主義数学には fan theorem という非有限的な要素が入っているからである。かといってメタ理論を直観主義数学そのものにすると、「直観主義で俳中律が成り立たないことが古典的に理解できる」ということが直観主義数学で理解できるだけで、これではあまり嬉しくないだろう。こういった「具体的提示」に関する問題を避けるため、上の議論における計算可能性翻訳について、メタ理論が古典論理の場合に生じる特有の現象についてはあえて触れないでおいた。この問題をいかに扱うかは今後の課題である。

2.3 構成的再帰数学と古典数学

構成的再帰数学（以下 CRM）は Markov により創始された構成的数学の一派である。BISH に Church のテーゼ（以下 CT）と Markov の原理（以下 MP）を追加したものが、CRM の定式化としてある程度一般的に用いられている。CT は「自然数上の自然数値部分関数はすべて帰納的である」という命題であり、MP は「任意の決定可能な述語 $A(x)$ に対して、$\neg\neg\exists x A(x)$ ならば $\exists x A(x)$」という命題である。砕けた表現を用いれば、MP は、プログラムが停止しないと仮定すると矛盾するならそのプログラムは停止する、という主張である。CRM の公理のうち古典的

に妥当でないものは CT のみだが、CT のそれ以外の公理に対する相対的無矛盾性はやはり realizability model を用いることによって証明できる。

MP は二重否定除去の限定的な場合だが、ここから俳中律が導かれてしまうことはない。[35] もちろん、直観主義数学の場合と同様、これらの命題に関しても多くの変種が存在する。MP は構成主義的な根拠が薄いように思われるが、MP を仮定することによって数学的に豊富な結果を得ることができる。例えば、CRM でも「すべての実数上の関数が連続である」という命題が導かれるが、この命題は MP なしでは証明できない。直観主義数学の場合、自由選列の任意性と関数という有限的手続きの性質からこの命題が導かれたのだが、CRM の場合には再帰的な列しか扱わないのにも関らずこの命題が導かれるという意味で、こちらのほうが数学的にはより深い結果である。

直観主義数学や TTE は実数には規則性や計算可能性を求めず、その間の変換手続きには連続性や計算可能性を要求しているが、これは、計算とは対象の間の変換手続きのみのことであって、対象は外部的に与えられる可能性を許すという見方に基いている。一方、構成的再帰数学や（古典論理に基く）再帰的数学は実数（自然数上の関数）にまで計算可能性を要求するが、これは、計算とは入力の記述から変換手続きまでの過程を全て含むものである、という考えに基いていると考えられる。後者は、計算機が自律的に計算を行う状況を考えればより理解し易いだろう。すなわち、計算機が外部からの干渉を一切受けず自律的に計算を行う場合、入力までをも自身で記述する必要があり、このため入力となる対象は計算可能なものに限られる。計算機にとっては計算可能な対象しか認識できないのだから、計算はその上で行われると考えるほかないのである。

2.3.1 CRM における実数とその上の関数

CRM における実数は、BISH の場合と同様に、収束速度の固定されたコーシー列を表す自然数列として定義される。コーシー列の同値性により同値類を構成することはせず、コーシー列の同値性という等号関係を組にして実数を考える。このようにするのは、実数について構成的に議論する際に、その表現を扱いたい場合が多いからである。同値類を取らない代わりに実数上の関数に対しては、コーシー列の同値性を保存する、という条件を要求する。こういった手法は構成的数学全般で用いられるものである。

CRM における全ての自然数列はその列を生成する帰納的関数に対応付けられるので、実数上の関数は自然数上の部分関数になる。部分関数であるのは、自然数にコードされた自然数上の帰納的部分関数が、常に何らかの実数の表現に対応するわけではないからである。このため、CRM では TTE の場合のような無限文字列上の計算概念は必要なく、通常の有限文字列上の計算概念さえあれば十分である。CRM の場合、実数上の関数といっても、実際は自然数上の関数なのである。

[35] これもまた realizability の手法により証明できる事実である。

実数が帰納的関数ならその個数は可算個しかないことになるが、一方で対角線論法により実数の個数は可算ではあり得ない。しかし、このパラドクスは見かけ上のものに過ぎない。「集合 x が可算である」が「自然数の集合から x への全射が存在する」という条件で定義されているとしよう。この定義のもとで、「実数の集合が可算である」とは「自然数の集合から実数の集合への全射が存在する」ということである。さらに、我々は CRM のもとで考えているのだから、この全射は帰納的でなければならない。ここが肝心である。自然数から実数への帰納的全射が存在すれば、実数の集合は可算であることになるし、帰納的全射の存在から矛盾が導ければ実数の個数は可算ではないことになる。自然数から実数への全射が古典的に存在することは容易に分かるが、自然数列が実数をコードしているかどうかは判定できないように思われるため、帰納的全射を発見することは難しい。実際のところは帰納的全射など存在しないのである。このことは次のようにして対角線論法により証明することができる。

帰納的全射 f が存在すれば、自然数 a に対して $f(a)(a)$（$f(a)$ がコードするコーシー列の a 項目）は計算可能である。有理数 $f(a)(a)$ とコーシー列の収束速度が固定されていることから、実数 $f(a)$ の存在範囲が構成的に絞り込めるので、有理数列 r の各項を、収束速度固定のコーシー列の条件を満たし、かつ r が $f(a)$ の存在範囲と交わらないように構成的な方法で選んでいけば、帰納的全射 f の値域に含まれない実数 r を帰納的に構成することができる（r がそのように選べることは自明ではないが、$r(k)$ を $f(k+1)(k+1)$ と異なるようにとる必要があることと、$f(a)(a)$ はすべて有理数なので等号関係などが決定可能であることに注意して選べばよい）。r は構成の仕方から帰納的な実数である。これは f の全射性に矛盾するため、実数の集合の非可算性が証明された。

丁度スコーレムのパラッドクスの場合のように、自然数から実数への全射は外の古典数学の世界には存在するが、中の CRM の世界ではどこにも存在しないものなのである。ここで、次のような疑問が生じるかもしれない。自然数から実数への全射が外の古典数学の世界に存在するなら、外の世界で帰納的な実数に対して対角線論法を適用することにより帰納的な実数の非可算が証明できるので、やはり矛盾するのではないか。もちろん、この議論は誤っている。外の世界で帰納的実数に対して対角線論法を適用するとき、仮定は「自然数から帰納的実数への全射が存在する」であり、その全射は（外の世界で考えているため）帰納的とは限らないので、対角線から構成される実数は、確かに全射の値域には入らないのだが、帰納的実数である保証もない。したがって、この方法により帰納的実数の（外の世界における）非可算性は証明できない。

ところで、可算の定義は上の定義以外にもあるだろう。例えば、自然数の集合への単射が存在することによって可算性を定義する方法が考えられる。実数の集合の元は帰納的関数であるため、その自然数へのコード化（Kleene index）を返す関数は帰納的であり、同時に単射でもある。ここで、今の可算性の定義において等号関係の保存を仮定しない単射性の定義を用いているとすると、実数の集合は

この意味で可算である。この写像は全射ではないため逆をとれず、上で用いたような対角線論法は適用できないことに注意して欲しい。これは古典的には同値であった可算性の定義が、CRM（BISH といったほうがよい）では分離してしまうことを示している。このような現象は構成主義全般において広く見られるものであり、構成主義では定義の仕方に細心の注意を払う必要のあることをここからも窺い知ることができるだろう。

なお、カントルの超越数の存在証明が非構成的証明の例として挙げられることがあるが、代数的数の帰納的枚挙に対して対角線論法を適当していると考えれば、その証明は実際に超越数を構成する手順を与えており、それは十分構成的な議論である。

2.3.2 病理的現象

CRM では、すべての実数上の関数が連続になる以外にも、古典数学と恒等翻訳で矛盾する幾つかの病理的現象が存在するが、直観主義数学の場合同様ここでも適切な realizability semantics で翻訳を考えれば、これらの矛盾は解消することができる。CRM のほとんど全ての議論は $HA + ECT_0 + MP$ において形式化できると言われるが、Kleene の HA に対する realizability semantics は、メタ理論が古典的であれば、$HA + ECT_0 + MP$ に対して健全になる。ここでは CRM を古典数学に翻訳するのだから、メタ理論が古典的であるという仮定は満たされている。この翻訳も計算可能性翻訳と呼ぶ。

古典解析では有界な単調数列は収束するが、CRM ではこの事実は成り立たない。この事実に対する反例は Specker sequence と呼ばれるが、それは比較的容易に構成できる。次のようにして数列 (x_n) が Specker sequence になるように定義する。実数 x_n の 10 進展開における小数点以下 k 番目の値を、k がコードするチューリングマシンが入力値 k を貰ったとき計算が n ステップまでで停止するなら 3、それ以外なら 4 と定める。[36] k がコードするチューリングマシンが入力値 k を貰ったとき計算が n ステップまでで停止するかどうかは計算可能なので、この数列は帰納的に構成されており、したがって、CRM における数列である。このとき、数列 (x_n) の各項は 1 より小さいので有界であり、x_n の各項は n が増えるにつれて 3 がそのままか 4 に増えるだけなので単調でもある。そして、数列 (x_n) が CRM において収束するなら、収束値は帰納的な実数であるため、k がコードするチューリングマシンが入力値 k を貰ったとき計算が停止するかどうかという停止問題が解けることになるので、数列 (x_n) は CRM において収束しない。

勿論、この数列は古典数学においては収束するが、収束値が帰納的な実数である必要はないので矛盾は生じない。Specker sequence の存在は、古典的には存在する収束値が帰納的ではないため CRM においては存在しない場合がある、ということを示しているに過ぎず、これはそれほど奇妙なことではない。realizability を

[36] 1/10 の桁が小数点以下 0 番目と数える。

用いて説明するなら、そこに現れる自然数上の関数がすべて計算可能であることに注意すればよい。なお、収束速度の固定されたコーシー列は収束するというのは（BISH の定理なので）CRM の定理である。Specker sequence はコーシー列であるが、収束速度は固定されていないので、その存在がこの定理と矛盾することはない。

次に、「$[0,1]$ の測度が 0 である」という CRM における定理について考えよう。この定理は次のようにして証明される。古典的な測度論で可算集合の測度が 0 であることを示すのとほとんど同じ方法である。最初に自然数 k がコードする帰納的関数に $\epsilon/2^{k+1}$ を対応させる。$[0,1]$ 閉区間の元をコードする自然数 k に対して、k を中心とする半径 $\epsilon/2^{k+1}$ の閉球 B_k を考える。ここで、B_k の定義は帰納的になされているため、それらは CRM において存在する。このような B_k の全体は $[0,1]$ を覆うが、それらの閉球の幅の和は ϵ より小さい。ϵ は任意に小さい正の実数に取れるので、$[0,1]$ を覆う閉球全てのの幅の和は幾らでも小さくできる。したがって、$[0,1]$ の測度は 0 である。

古典的には、帰納的関数で表現されるような実数の集合は可算なので、測度が 0 になることは当たり前である。上の証明はこの事実と被覆の取り方を帰納的にできることを用いているだけであり、このように捉えれば、やはりそれほど奇妙な現象ではない。realizability の枠組みで説明する場合は、ϵ に対する被覆 B_k の取り方が帰納的になっていることに注意すればよい。

最後に、もう一つの CRM の定理に触れておこう。それは、「$[0,1]$ 区間上の一様連続ではない連続関数が存在する」というものである。この事実の証明を与えることは少し面倒だが、感覚的には次のようにして説明できる。CRM における $[0,1]$ は（古典的に見れば）非帰納的な実数の部分でたくさん穴があいているので、その穴を一つ選んで、その前後で非有界にしてしまえばよいのである。より具体的に言うと、$[0,1]$ 上の非再帰的な点を a としよう。$[0,a)$ と $(a,1]$ の和集合の上で定義された一様連続ではない連続関数は古典的にみても当然存在する。非帰納的な点 a は CRM の世界では存在しないのだから、この関数は CRM においては $[0,1]$ 全体で定義されていることになる。[37] この事実を realizability によって説明することも容易である。

一般に CRM における病理的現象は、実数上の関数の連続性などの MP に基くものを除けば、CT から導かれる、実数の集合が古典的に見て可算であるという事実を利用している場合がほとんどである。

このように、計算可能性翻訳（realizability）を用いれば、CRM における一見病理的な現象は古典的に理解可能なものである。もっとも個々の事例だけ見るなら、それらが古典的に理解可能であることは realizability に頼らずとも容易に分かるが、計算可能性翻訳の利点は、そのような理解の仕方をすべての文に対してシステマティックに与えていることにある。すなわち、realizability は、個々の事例

[37] 勿論以上の説明は正確なものでは決してない。きちんとした証明は [Beeson85] や [TvD88] を参照してほしい。

の非形式的な理解の仕方を統一する形式的枠組みなのである。

2.3.3 CRM は BISH と整合的か？

直観主義数学、CRM、そして古典数学は、いずれも BISH と矛盾しないと表現されるのが常である。しかし、例えば、CRM では「$[0,1]$ 区間上の一様連続ではない連続関数が存在する」のに対して、BISH では「$[0,1]$ 区間上の連続関数は一様連続」である。また、CRM では「$[0,1]$ の測度が 0」であるのに対して、BISH では「$[0,1]$ の測度は 1」である。このような表面的レベルでは確かに CRM と BISH は矛盾している。したがって、最初の整合性の主張を反駁する少なくとも一つの視点が存在するのである。こういった矛盾は、直観主義数学や古典数学の場合には滅多に存在せず、CRM の場合に比較的多く見られる（と著者は感じる）。

我々の言葉を用いるなら上の現象は、CRM と BISH は（メタ理論 BISH において）恒等翻訳で矛盾する、と表現できるのだろうか。この問いは 2 つの数学の形式化の仕方に依存すると考えられるが、自然な形式化のもとではこの表現は不適切である。例えば、測度や連続性に関する（日常的な意味での）文が、CRM や BISH に対応する形式体系の（閉論理式としての）文にそのまま含まれているなら、両者は恒等翻訳で矛盾すると言うことは正しい。しかし、通常の自然な形式体系には「測度」や「連続」などの語彙がそのまま含まれていることはまずなく、上のような表現は略記としてしか用いられないということに注意すべきである。例えば、ZFC の場合、原始述語は等号とメンバーシップだけであるため、測度や連続性に直接言及する文は論理式の省略記法に過ぎず、正式な論理式ではないため、形式体系間の翻訳の対象となるような文ではない。これは ZFC 以外の通常考えられている様々な構成的数学の形式体系全般についても大抵言えることである。

そして、CRM と BISH の通常考えられている色々な形式体系に対しては、恒等翻訳により矛盾は生じない。例えば、HA^{ω} を BISH と考え、そこに CT と MP を追加した体系として CRM を捉えると、両者は恒等翻訳で矛盾しない。[38] もし両者が恒等翻訳で矛盾すると仮定すると、CRM が矛盾していることになり、CT の相対的無矛盾性から MP つきの BISH が矛盾していることになる。このような古典数学より弱い体系が矛盾しているとは考え難いし、そもそも CRM が矛盾している場合にはそれと BISH が整合的かどうか考えることなど無意味なのだから、MP つきの BISH は無矛盾であると仮定してよい。したがって、通常の自然な形式化のもとでは、CRM と BISH は恒等翻訳により矛盾しない。これは、CRM 以外の直観主義数学や古典数学について言えることであり、「直観主義数学、CRM、そし

[38] BISH を HA^{ω} と捉えることの妥当性は [Beeson85] で検討されているが、そこでは、ある種の構成主義独特の概念を扱うには不十分であるものの、構成的解析を展開するには十分であるという結論が下されている。なお、CRM では、実数やその上の関数が自然数にコードできるように、本質的に高階の概念はあらわれないので、一階の HA に公理を追加するだけでも十分である（[TvD88] p201 参照）。

て古典数学は、いずれもBISHと矛盾しない」という言明はこの意味で解釈すれば正しいと言える。

連続性と測度に関してCRMとBISHの間の矛盾をあらわすように見えた命題は、なぜ通常の自然な形式化のもとで考えれば矛盾にはつながらないのだろうか。その理由は、形式体系は通常色々な数学的概念を直接的に持っているものとしてではなく、そのような数学的概念を定義してそれについての性質を証明するのに十分な道具立てを持っているものとして定義されるからである。そのような道具立ての部分だけ見るなら矛盾は生じないが、そのような道具立てをいかに使用するかというところまで考慮するなら、既に見たような矛盾が生じることもあるのである。より具体的に説明しよう。

BISHでコンパクト空間上の連続関数の一様連続性が導かれるのは、連続性をドメインの任意のコンパクト部分集合上での一様連続性として定義しているからである。このような連続性の定義からコンパクト空間上の連続関数の一様連続が導かれるのは純粋に論理的な事実であり、もちろんそれはCRMでも正しい。したがって、コンパクト空間上の連続関数の一様連続性に関する両者の相違は、単に概念の定義の相違と見なすなら、矛盾はどこにも存在しない。

しかし、一般に何が定義による相違で何が実質的な相違なのかを明確に区別できるとは限らない。そういった定義の仕方が当の理論において本質的な役割を果たしているなら、それは実質的な相違だと捉えるべきかもしれない。実際、BISHは連続性を上のように扱うことで、FTなどの疑問の余地のある仮定を導入することなく、スムースな理論展開を可能にしたのだから、そういった道具立ての用い方まで考慮にいれるなら、連続性についての相違は単なる定義の相違としてではなく実質的な相違として捉えられるべきである、と議論することも可能だろう。また、既に我々は「すべての実数上の関数が連続である」という直観主義数学の定理と古典数学での不連続関数の存在という相違が、単に実数や関数概念の定義の相違なのか、それともそういった概念に関する本質的な相違なのかについて詳細な検討を行ってきたが、どちらか一方の見方のみが正しいと結論付けることはできなかったのである。ただ、実質的な相違だと捉えるべきである場合でも、それを「矛盾」として捉えるべきであるかどうかはさらに別の考察を必要とする。「矛盾」という形でしか、そのような実質的な相違を表現できないわけではないのである。

実数の測度に関する相違も、一つの見方としては、実数や測度という概念の定義に関する相違であると考えることができる。CRMでは実数の測度が0になってしまうが、このような帰結を生む被覆はすべてその被覆の幅の和が非帰納的な実数になる、という特徴を備えている。そのため、幅の和がCRMにおいて収束する被覆だけを考えれば、実数の測度が自明化することは避けられる。しかも、Bishopの展開したBISHにおける測度論は被覆の幅の和が収束することを要求するものであったので、それはCRMにおいても同様に通用するのである。こういったところにBishopの類希な独創性があると思われる。両者における被覆概念が異なっていたのだから、やはり実数の測度に関する矛盾は見かけ上のものであったと考え

るのが自然である。しかし、この場合にも、上に述べたような慎重な考察を要する問題は依然として残されているのであって、安易な即断は危険である。

2.3.4 翻訳の適切性の問題

CRM と古典数学の場合にも、やはり恒等翻訳と計算可能性翻訳の間に翻訳の適切性の問題が生じるだろう。多くの議論は直観主義数学と古典数学の場合と大体同様の仕方で論じることができる。例えば、背景にある哲学的主張の相違に関する部分なら、次のように議論できる。

確かに計算可能性翻訳によれば CRM は古典的に理解可能なものである。しかし、CRM には「すべての数学的対象や操作は計算可能である」という数学の存在論に関する強い信念を感じ取ることができる。一方で古典数学には、べき集合操作の超限的反復により構成されていく豊富な集合論的ユニバースという独自の存在論的主張がある。古典数学を直ちに集合論と捉えることは不適切かもしれないが、古典数学を包括的に展開するためには、$R_{\omega+\omega}$ 内の集合程度が実質的に許容可能な存在論強さをもつ枠組みでなければばらないだろう。このような背景にある信念の相違を表現したい場合には、恒等翻訳にも活躍の場が与えられてしかるべきである。

他の点についても以前の考察から議論の流れが容易に察せられるだろうから、ここでは以前との相違がみられる次の点を注意しておくに留める。上で述べたような CRM の古典数学における近似は、直観主義数学の古典数学における近似よりもある意味で高い精度をもっている。[Beeson85]p48 によれば、どのような定理が証明可能されているかという現実の数学的実践を見る限り、古典論理にもとづく再帰的数学と CRM の間には全く相違がない。これは、再帰的数学で俳中律が用いられる場合、常に MP のような形で用いられるからである。古典論理に基く再帰的数学というものは、CRM を計算可能性翻訳した先の世界と等しいので、計算可能性翻訳は CRM を忠実に古典数学の中に写像すると考えられる。この状況は直観主義数学の場合とは全く異なっている。

しかし、この事実から、計算可能性翻訳は恒等翻訳より優っていると言うことはできない。依然として上に述べたような存在論的相違は存在するからである。また、直観主義数学の場合に用いた恒等翻訳を擁護する他の論法はここでも同様に通用するのである。

2.4 直観主義数学と構成的再帰数学

直観主義数学と構成的再帰数学も矛盾する。すなわち、直観主義数学では FT を用いることにより、「$[0,1]$ 上の連続関数は一様連続である」が導かれるが、CRM では CT から「$[0,1]$ 上の連続関数で一様連続ではないものが存在する」が導かれるので、両者は恒等翻訳で矛盾することが分かる。ここでの一様連続や連続の定

義は共通しており、先ほどの場合のような定義の相違はないため、通常の形式体系を用いても恒等翻訳により矛盾すると考えられる。それでも不安を抱くひとにはKleeneのsingular treeを用いてより直接的に矛盾を示す方法がある（[TvD88]p221参照）。また、CTはWeak Continuityとも矛盾する（[Beeson85]p384参照）。

こういった矛盾を解消するためには、メタ理論に古典数学を採用して、直観主義数学とCRMをrealizability semanticsによりそこへ翻訳する方法が考えられる。これはメタ理論が比較対象となる2つの理論とは本質的に異なる、矛盾の解消の例を与える。realizability semanticsにより直観主義数学をCRMの中で解釈したり、あるいはその逆の解釈をしたりしても、それぞれに個別の原理が齟齬を引き起こすため健全にはならないので、メタ理論は別に用意する必要があるのである。健全にならないのは、前者の場合にはFTがrealizeされず、後者の場合にはMPがrealizeされないことによる。

この場合にも翻訳の適切さの問題は生じるが、これまでの例とは事情が異なっている。これまでの例では古典数学からメタ理論の古典数学への翻訳は恒等翻訳という形で固定されていたのに対して、この例の場合には2つの対象理論のいずれともメタ理論が異なるため、翻訳が本質的に2つあり、その各々について翻訳の適切さの問題が生じるのである。例えば、直観主義数学から古典数学は恒等翻訳するが、CRMから古典数学は計算可能性翻訳するという方法も考えられるが、この場合には、理論間の矛盾の定義より、直観主義数学とCRMは矛盾することになる。一方が恒等翻訳であれば矛盾することになるので、矛盾を解消するためには両方を計算可能性翻訳にしなければならない。その他の点については、これまでと同様の仕方で翻訳の適切さの問題を論じることができるため、これ以上の議論は控える。

なお、両者の興味深い相違点として、構成的再帰数学では連続体仮説の様々な定式化の否定が証明できるのに対して、直観主義数学では弱い形で定式化された連続体仮説が証明できることが知られている（[Beeson85]p79参照）。

2.5 物理学からの例

物理学における例も考えてみよう。一つは古典力学と相対論的力学であり、もう一つは古典力学と量子力学である。一方は他方の近似理論であるという考えがある一方で、クーンやファイヤアーベントが主張したように、両者は通訳不可能であるという考えもある。[39]前者が矛盾を（恣意的にではなく）何らかの尤もらしい仕方で解消する翻訳を支持するのに対して、後者は矛盾を額面どおりに受け入れる恒等翻訳を支持するように思われる。

古典力学と相対論的力学は矛盾する。例えば、（既に述べたように）運動エネルギーの値は等しくないし、光速度の不変性の点でも矛盾するし、同時刻の絶対性

[39]ただし、クーンは極端な通訳不可能性を否定して、より穏健な主張も述べている。[伊勢田03]p85参照。

と相対性のような概念的に難しい矛盾も生じてくるし、基礎方程式である運動方程式もそれぞれで異なっているし、それを不変とする変換も異なる。しかし、周知のように v/c を 0 に飛ばすと、すなわち光速より十分遅い速度しか考えなければ同時性が絶対的になり、運動方程式も同一になり、上に述べた他の矛盾もすべて取り除かれる。ここでは、恒等翻訳の他に、v/c を 0 に飛ばす光速無限大翻訳が存在するわけである。

ここでも翻訳の適切性の問題はこれまでと同様である。古典力学と相対論的力学の背景には異なる哲学的背景がある。すなわち、古典力学には絶対空間と絶対時間の哲学的背景があるのに対して、相対論的力学には時間概念の相対性、時間と空間の不可分性（時空概念)、光速度の不変性などの哲学的背景がある。これらの概念的な対立関係を表現するためには、恒等翻訳のほうが光速無限大翻訳よりも適当である。

直観主義数学と古典数学の間の恒等翻訳を擁護する際、古典力学と相対論的力学における「運動エネルギー」の意味が、理論の変化と共に変化したと考えるべきか否かについてのパトナムの議論を紹介したが、その議論はここでの問題に直接通用する。すなわち、そこでの関数概念の独立性が、ここでは運動エネルギー概念の独立性に対応する。したがって、これに関する議論も以前と同様な形で展開でき、恒等翻訳を擁護できる。

古典力学と量子力学も矛盾する。例えば、古典力学では位置と運動量は同時に測定可能だが、量子力学では次のような位置と運動量の不確定性関係のために同時測定ができない。

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$$

また、古典的には光子は質量が 0 であるため運動量も 0 だが、量子論的には光子は h/λ の運動量をもつ。

古典力学と量子力学のこういった矛盾を解消するためには、「プランク定数 0 での極限では量子力学が古典力学になる」というボーアの対応原理を利用することができる。$\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割った定数で、プランク定数を 0 に飛ばすと $\hbar$ も 0 に近づくため、不確定性は徐々に小さくなってゆき、最終的に不確定性関係は消失する。また、プランク定数 0 での極限では光子の運動量も 0 になる。プランク定数は非常に小さい定数であるため、普段の巨視的世界では近似的に 0 だと見なせるが、ボーアの対応原理はこれを逆手にとったものだと言える。さらに、量子力学では、運動量の期待値と位置の期待値を考えることにより、シュレディンガー方程式を用いて、運動方程式を導くことができる（エーレンフェストの定理)。運動量と位置に関しては運動方程式は成り立たなくても、その平均を考えれば運動方程式が成り立つのである。

しかし、量子力学は（コペンハーゲン解釈のもとでは）対象が一般には確率的にしか存在しないという非決定論的な世界観を描き出すのに対して、古典力学は運動方程式から導かれる決定論的世界観を内蔵しており、両者の世界観は真っ向

から対立していると考えられる。[40]これまでの場合と同様に、このような哲学的背景の点から恒等翻訳を擁護することができるだろう。

2.6 一般論

以上の例の考察を参考にして、理論間の矛盾に関する一般論を述べよう。主な問いは、「矛盾は常に解消できるのか」、「非自明な仕方で３つ以上の理論が矛盾することはあるか」、「翻訳の適切さの基準にはどのようなものがあるか」、「真に矛盾する２つの理論はあり得るか」といったものである。

2.6.1 矛盾の解消

どれだけ矛盾しているように見える２つの理論でも、メタ理論と翻訳を上手く取ることにより矛盾の解消は常に可能である。つまり、２つの理論があったとき、たとえ両者に共通する言語部分があったとしても、メタ理論 T3 に翻訳する際には常に両者を分離させることにすればよい。[41]

例えば理論 T1 の「関数」を「関数 1」、理論 T2 の「関数」を「関数 2」とするといったように翻訳すれば、そしてその翻訳が可能であるほどメタ理論の言語を豊富にしておけば、理論 T1 の翻訳の像と理論 T2 の翻訳の像は共通する語彙を一切含まず、したがって矛盾することはない。より正確には、理論 T1 の像のメタ理論における帰結全体と理論 T2 の像のメタ理論における帰結全体が干渉しないようにしなければならないが、そのためには２つの理論の翻訳先をまたぐような推論規則をメタ理論で許さなければよい。数学的比喩を用いるなら、T1 と T2 の disjoint union を構成して、そこへの injection という２つの翻訳を考えればよいのである。理論と翻訳の圏が適切に定義できるなら、このような構成はたぶん実際に実現できるだろう。しかし、翻訳が合成について閉じるかどうかは難しい問題である（たぶん閉じないだろう）。

このようにして形式的には矛盾は常に解消できるのだが、とにかく矛盾を解消すればよいというものではない。既に行った構成的数学と古典数学の考察から分かるように、必要な矛盾というものも時には存在するのである。上手い矛盾の解消の仕方があるのかどうか、ある手段で矛盾を解消することが果たして適切なのかどうか、といった問題については各々の場合に考察することにより結論を出す他ないように思われる。

---

[40] もっとも量子力学をよく知る人々にはコペンハーゲン解釈を批判するものも多い。シュレディンガー方程式自体は決定論的であるため、ボルンの確率解釈を排せば、何らかの合理的な仕方で決定論的に世界を映し出すことも可能かもしれない。そのようなものの一つがエヴァレット解釈であり、量子コンピュータがうまく働くならエヴァレット解釈が正しいという話もある。だが、その辺の事情に無知な著者に真偽は判断できない。

[41] [Quine92] でもこのような考え方が述べられており、特に新しいアイデアではない。勿論、そこでは我々のような設定のもとで理論を比較しているわけではないが。

2.6.2　矛盾のパターン

３つ以上の理論が矛盾する場合の具体例はこれまで挙げなかったが、それは自然な具体例が見つからなかったという理由による。ただし、人工的なものであれば簡単に作れるので、以下で少し論じてみよう。まず、3 以上の自然数 n に対して、$n-1$ 個の部分集合では無矛盾なのに n 個あわせると矛盾する例は、理論 T_x を標数が x を除く 1 から n の数である体の理論としたとき、T_1 から T_n を考えればよい。標数 0 は有限公理化不能だが、標数が 1 以上の自然数 p であるということは有限公理化可能なので、それを or で結ぶことにより標数が x 以外の 1 から n の数の体の理論を公理化することができる。メタ理論は標数に関する条件のない体の理論で翻訳はすべて恒等翻訳としておけばよい。

任意の無限基数 κ に対しても同様のことができる。つまり、任意の真部分集合は矛盾しないのに、κ 個全部あわせると矛盾する場合がある。κ の元 x に対して、集合 A_x を κ から x を除いた集合と定義する。A_x 全ての共通部分は空だが、真部分集合の共通部分は常に空ではない。あとは、等号と κ までの順序数を表す記号をもつ無限論理でも考えて、$\forall y\, y \in A_x$ ということを無限の or で表現した無限論理の論理式を公理とする理論を T_x とすればよい。

もう少し深く無限基数の性質に関係する次のようなことも分かる。無限基数 κ の元 x に対して、A_x を x より大きい κ の元全体の集合とする。上と同様の方法で構成された理論 T_x の集合 T を考える。κ 個すべてをあわせると矛盾している。選択公理を仮定するなら、κ を ω とは異なる無限基数とするとき、任意の基数 $\lambda < \kappa$ に対して λ 個の T の任意の部分集合が矛盾しないことと、κ が successor cardinal であることは同値である。これは、選択公理の下では successor cardinal が regular（cofinality が自分自身）であるという事実に基いている。ω は limit cardinal だが regular でもあるので、ω に対しても双条件法の左辺は成立する。

2.6.3　翻訳の適切さの基準と真に矛盾する理論

これまでの様々な例の考察から、翻訳の適切さの基準として、単純性、哲学的・文化的背景の保存、性質の共有性（ある程度の健全性）などがあることが分かる。翻訳が恣意的な対応付けではないことを保証するための、原始的な要素から再帰的に定義可能であることという条件も適切さの基準に加えられる。さらに、最初に述べた全ての翻訳が持つべき条件「ある言語の他の言語における合理的解釈を与えること」も、適切性の（根本的な）基準の一つとして考えることができる。上に述べた四つの基準は、このいわばメタ基準から見て、一定の正当化を与えられる基準である。

その理由については直観主義数学のところでもある程度述べたが、ここで改めて説明しておこう。まず、複雑すぎる翻訳は実際に文あるいは文章の翻訳先を（十分有限的に）決定することが難しく、そもそも翻訳先が分からないのだから、そ

れによって相手の主張の合理的理解を得ることはできない。[42]次に、哲学的・文化的背景を無視してしまう翻訳によっては、そのような相手の持つ背景の理解ができないのだから、やはり相手の主張の合理的理解には至らない。そして、ある程度の健全性がなければ、相手の多数の主張がこちらでは誤っているものとなり、互いの主張が食い違い過ぎるので、（おそらくその食い違いを合理的に説明することができないため）相手の理性に疑いが生じて、やはり合理的理解は得られない。最後に、翻訳が原始的要素から再帰的に定義されていなければ、部分の理解から全体の理解が得られないため、我々は膨大な数の個々の文についてその翻訳の仕方を記憶しなければならなくなるが、そのようなことは不可能である。また、そのような翻訳は、論理結合子を保存しないため、文と文との論理的関連をめちゃくちゃにしてしまって、それにより適切な合理的理解を得ることを不可能にする。このような点は論理的関連以外の文と文との（事実的関連性などの）関連性についても言えるだろう。

さて、ここで本節の最後の問い「真に矛盾する二つの理論はあり得るか」に移ろう。一般に共通するタームを分割にすることによって常に矛盾は解消できることは既に述べた。したがって、真に矛盾する場合を探すには、このような分割は不適切であると論じる必要がある。実際、二つの理論に幾つかの共通の語彙があり、それらを恒等翻訳で比較したとき（全く同一ではなくてもある程度）共通の性質を持っているなら、それらの語は互いに関連付けられるべきだろう。そして、今までの考察を踏まえると、真に矛盾する二つの理論を発見するには、相異なる哲学を持っている理論を考えるほか無さそうである。特に、理論に哲学を組み込んで考えれば、背景哲学の解釈の任意性はなくなるので、矛盾する翻訳以外の翻訳は全て不適切と言い得るかもしれない。例えば、直観主義数学の背景哲学を古典数学と明らかに矛盾するものに固定してやればよい。もう一つの有力な方法は、物理理論の比較において十分に経験的な部分は恒等翻訳されるべきである、という原理に訴えるものである。物理理論の場合、経験という理論からある程度独立した評価基準があるため、このような原理が正当化されると思われる。したがって、経験的帰結の異なる 2 つの物理理論は真に矛盾する 2 つの理論であると言えるだろう。

2.6.4 さらなる例

最後に、二つの例と問題を記しておこう。

古典数学 with ヒルベルト的形式主義と古典数学 with プラトニズムを考えれば、ヒルベルト的形式主義では、有限の立場を超え出る命題はすべてそれ自体では無意味であり、それらは有限の立場において有意味な命題（一説として Π^0_1 までの命

[42]翻訳の複雑性とは、写像としての翻訳の複雑性と写像の記述のされ方としての翻訳の複雑性の二つの意味がある。換言すれば、翻訳そのもののと複雑性と翻訳アルゴリズムの複雑性である。いずれが複雑であっても合理的理解は得られない。単純な文の写像結果が複雑になり過ぎたり、それへの写像の適用に長大な時間がかかっては合理的理解は得られないからである。

題のみ）を示すための補助的道具に過ぎないのに対して、プラトニズムではすべての命題が額面通りの意味を持つのだから、両者の哲学は矛盾している。したがって、ヒルベルト的形式主義における無意味な命題をプラトニズムにおける有意味な命題に写す恒等翻訳は適切ではない。数学体系が同じでも恒等翻訳が適切とは限らない。ところで、この矛盾を適切に表現する翻訳はあるだろうか。

ZF-inf と PA を考えよう。有限集合を自然数にコードすることにより前者から後者への翻訳が構成できる。この翻訳は適切だろうか。[Beeson85] では「形式的には sound だが、決して意味保存的ではない」という判断が下されている。

3　理論の決定不全性と翻訳の不確定性

本節では、クワインが主張した物理理論の経験的な決定不全性と日常言語間の翻訳の経験的な不確定性のテーゼについて論じる。非常に大雑把に表現すれば、前者は経験的な証拠からは正しい物理理論が一意に定まらないという主張であり、後者は経験的な証拠からは正しい翻訳理論が一意に定まらないという主張である。[43] より精密な定式化については後に詳しく議論する。定式化の仕方によって自明な結論が導かれてしまうこともあるので、定式化の仕方は重要である。

もちろんクワイン自身は当初２つのテーゼが正しいと主張したのだが、その後の分析哲学の流れの中では、２つのテーゼは間違っている（つまり決定不全性や不確定性は存在しない）、あるいはより弱く、２つのテーゼが十分な根拠を持つとは言えないことを示そうとする議論も数多くなされており、現在でも分析哲学者の間でのコンセンサスがあるとは言い難い状況である。[44]例えば提唱者のクワイン自身でさえ、後には、理論の決定不全性や翻訳の不確定性は未だ完全には立証されてはいない、という考えに同意していると言われる。[45]そのため、ここで改めて２つのテーゼについて考察してみることは十分意義のある行為だろう。

理論の決定不全性の問題にしても翻訳の不確定性の問題にしても、決定的な結論が得られないことの一つの理由は、誰もそれらのテーゼを立証する具体例を提出していないということにある。著者の目指す方向は、前節で展開してきた議論を援用することにより、実際に２つのテーゼを立証すると考えられる具体例を提示してみせ、積年の論争に決定的な終止符を打つことである。[46]

[43] これらのテーゼは [Quine64] で包括的に論じられている。

[44] もっとも哲学においてコンセンサスのある事柄など相当希ではあるが、中でもこれらのテーゼは意見が真っ向から対立している感がある。

[45] [Dummett74] や [染田 88] 参照。勿論、これはクワインが２つのテーゼに対する支持を取り下げたということではない。そもそも哲学の命題に決定的な議論ができる場合は極めて希なのだから、「完全には立証されてはいない」と言うことにはあまり意味がないかもしれない。

[46] しかし、これはあくまで方向であって、完全な決着が得られたとは著者も考えていない。

3.1 理論の決定不全性とその含意

理論の決定不全性とは、あらゆる物理的観察データと合致するにも関らず異なる複数の物理理論が存在する、という主張である。ここで、物理理論があらゆる物理的観察データと合致するとは、その物理理論が導く経験的に検証可能な命題全てのクラスが現実に経験的に正しい検証可能な命題全てのクラスと一致する、ということとする。

ここで、経験的に検証可能な命題とそれ以外の命題の区別というものが、綜合的と分析的の区別を連想させるかもしれないが、もちろん後者の意味で前者の区別を捉えているのではない。物理理論の命題の中には直接的に実験にかかる命題が含まれているはずであり、そのような直接実験可能な命題を「経験的に検証可能な命題」と呼んでいるのである。直接実験可能かどうかという区別も、厳密な区別ではなく境界の曖昧な区別として捉えている。境界が曖昧だからといって、区別そのものが無意味になるわけではない（「砂山である」は無意味な区別だろうか）。こういった事情のため、「一致する」は「大体一致する」と捉えることになる。

また、全ての物理的観察データと合致するという条件は実際には検証する方法がないことと、現実の物理理論を考える限り経験との完全な一致が見られる物理理論というものは現在では絵空事に過ぎないという問題がある。こういった事情を考慮すると、現在の我々にできる最善の方策は次の三つのいずれかを示すことだろう。一つめは、これまで得られた観察データと大体一致するという程度の穏健な条件を用いて決定不全性を示す。二つめは、もしあらゆる経験的証拠との一致をもつ理論が得られれば、そこから同様に経験と完全に一致する別の理論を構成できる。三つめは、同じ経験的帰結をもつにも関らず異なる理論の存在を示す。以下で見るように、この三つの主張はすべて単一のアイデアに基いて根拠付けられる。

より簡単に表現すれば、経験的なデータという制約のみから正しい物理理論は一意的には定まらない、とも言える。「異なる複数の理論が存在する」がより強い主張「互いに矛盾する複数の理論が存在する」に置換される場合があることを除けば、理論の決定不全性のこのような定式化は一般的に用いられているもので、その意味ではこのテーゼに定式化の問題はない。しかし、このことは、上の定式化に何の問題も無いことを意味しない。上の定式化には幾つかの問題があるが、それらについて述べる前に理論の決定不全性の含意について先に簡単に触れておきたい。

仮に理論の決定不全性が立証されたとしよう。そのとき得られる教訓の一つは、世界についての唯一の正しい見方が存在するわけではない、という相対主義的なものである。勿論、ここでの「正しい」とは経験との合致という基準でみたときの正しさであって、理論の単純性などの経験との合致以外の要素を考慮するなら、「唯一の正しい見方」が存在する可能性も排除できない。クワインはこの教訓を「世界を思い描く様々な仕方があって、そのどれもが擁護可能である」と表現している。

また、もう一つの考えられる教訓は、この世界における存在者の総体は一意的に確定しない、という一見直観に反するものである。ここでも、「存在者の総体は量化の変項の値となるもの全体のクラスである」と考える。異なる物理理論は一般に異なる存在論を持つと考えられるため、物理理論に応じて「この世界に何が存在するか」は異なることになる。したがって、正しさの基準を経験との合致のみに求めるなら、何が正しい存在者であるかは一意に確定しないのである。しかし、その場合でも、すべての物理理論に共通に存在する対象については、ある種の絶対的な存在者と考えることができるので、存在者の総体の中で確定的な部分も存在するだろう。勿論異なる理論の間で存在者の同一性をどのように捉えるかという問題はあるが、日常的な対象はおそらく確定的な部分に該当すると考えるのが自然であると思われる。

さらに、理論の決定不全性は、論理実証主義者が考えたように、一切の（理論的）命題を経験的に検証可能な観察命題へと還元することが不可能であることをも示している。もしそのような還元が可能だとすると、物理理論を（その理論的命題を観察命題へと還元することにより）観察命題のクラスと見なすことができることになり、観察的データから理論が一意に確定してしまうことになるため、決定不全性に矛盾するからである。

3.1.1 物理理論の同一性と決定不全性の自明化

例えば、ニュートン力学の運動方程式の左辺に十分小さい有理数 ϵ を加えた式 $F+\epsilon=ma$（F と a と ϵ はベクトル量）を基礎方程式とする新たな力学体系を考えよう。ここで、ϵ を人間の測定限界より小さくとっておけば、この新たな力学体系と通常のニュートン力学の間に経験的な相違はない。したがって、一方が経験と照らし合わせて正しい理論なら、他方もそうである。一般にこういったトリビアルな改変はいかなる物理理論の基礎方程式に対してでも可能と思われ、この改変を現在正しいとされている物理理論に対して施せば、そうしてできる２つの理論は（現時点で最もよく）経験と合致するにも関らず異なる理論であって、いとも簡単に理論の決定不全性が立証されたかのように見える。

しかし、クワインの意図した理論の決定不全性のテーゼは、このような自明な主張では決してないだろう。仮にこのような自明な主張なら上の議論で容易に立証されてしまうのだから、クワインの意図が何であれ、我々はより自明ではない定式化を問題にすべきである。上の例が示唆する問題点は、我々の定式化における「異なる」とは一体いかなる意味でのものか、ということである。少なくとも、上の例のような改変を行ったとしても理論は変化しない言える程度に、物理理論の同一性という同値関係は強くあるべきである。

ここで、物理理論の同一性に関する一つの可能な提案がある。それは、物理理論の同一性を物理理論の経験的予測の完全な一致（経験的同値性）を以て定義するというアイデアである。すなわち、２つの物理理論が正しいと予測する経験的

に検証可能な文の全体が一致しているとき（そしてそのときのみ）、２つの物理理論は同一であるとする、という見方である。物理理論が我々の住まう自然における現象を説明する理論である限り、物理理論にとって最も重要なことは、それがどういった経験的に観察可能な帰結をもたらすか、ということだろう。こういった考えからすれば、経験的に同値な２つの物理理論を同一と見なそう、という提案は尤もらしいものであると思われる。しかし、経験的同値性によって物理理論の同一性を定義することは、定義から直ちに理論の決定不全性のテーゼを反駁する。

このように、物理理論の同一性の定義は弱すぎると決定不全性を自明に正しいものとしてしまうし、強すぎると決定不全性の否定を自明に導いてしまうのである。したがって、非自明な物理理論の決定不全性を確立するためには、丁度良い強さの同一性の定義を発見しなければならない。さらに、その丁度良い強さの同一性の定義は、物理理論の同一性の定義として直観的な根拠を持つ必要がある。

3.1.2 決定不全性を立証する具体例

さて、実際に決定不全性を証明するために有効に見える具体例を探してみよう。決定不全性が成り立つとすれば、その証拠となる２つの物理理論について、経験的に検証可能な命題の部分では相違は存在しないのだから、相違はそれ以外の理論的な部分に存在するはずである。ここでは、そういった理論的な部分の中でも数学的な部分に注目してみよう。例えば相対論におけるリーマン幾何学、量子力学における関数解析のように、現代的な物理理論は必ずといってよいほどその中で大きな数学的道具立てを用いている。通常そのような数学的道具立ては古典数学の中でモデル化されるとものとして考えられているが、だからといって物理理論で用いられる範囲での数学的な道具が古典数学の中にしか収まらないと言える根拠は何も無い。それどころか、BISH 学における包括的な関数解析の展開が示すように、例えば量子力学に用いられる数学は構成的数学でも展開できると信じるに足る一定の根拠がある。[47]したがって、古典数学と構成的数学のいずれに依拠しても、観察データと合致する物理理論を構成できると考えることには一定の根拠が認められる。

古典数学に基く物理理論と構成的数学に基く物理理論を決定不全性を立証する具体例としたいのだが、そのためには幾つかの前提と細工が必要である。まず、この２つの物理理論が異なるだけではなく互いに矛盾するものとするために、構成的数学は CRM（あるいは直観主義数学）として捉えることにしよう。矛盾するというのはもちろん恒等翻訳を採用した場合だが、既に見たようにどんな２つの理論も矛盾しないように解釈できるのだから、一定の根拠を持つ翻訳で矛盾するこ

[47] この点については、Hellman と Bridges,Richman の間で議論があった。Hellman は Gleason の定理が構成的に成り立たないことを一つの根拠として構成的数学は量子力学に不十分であると論じたが、Bridges,Richman は Gleason の定理の構成的バージョンを見つけた。非有界な作用素に関しても議論が生じている。これらについては [Hellman93]、[Hellman93*]、[Bridges95]、[RB99] を参照。

となる以上の「矛盾」を要求することは不可能である。ただし、物理理論間の翻訳のみを考察の対象とする場合、十分に観察的な命題はそれ自身に写像される、という条件をつけることが妥当であると考えられるため、(観察的な命題の部分で) より強い意味での矛盾も生じ得る。しかし、理論の決定不全性で対象となる理論は同等の経験的帰結を持つことが要請されるので、決定不全性を示す例となるような理論間にこのような矛盾が生じることはない。

さらに、上で論じた、物理理論の間の同一性をいかに定義するかという問題があるが、この例を決定不全性を立証する例に仕立て上げるためには、同一性の定義は物理理論が依拠する数学的基盤を無視するものであってはならない、つまり数学的基盤が異なれば異なる物理理論と見なされるような同一性の定義でなければならない。このような定義に対して、数学的基盤が異なるだけで異なる物理理論と見なすことは適切ではない、という反論が考えられる。しかし、数学的基盤の相違はそうした反論者の想像以上に物理的帰結を持つのである。例えば、一般相対性理論はリーマン幾何学を採用したが、この数学的基盤の採用が、ニュートンの絶対空間の概念を否定する時空の構造に関する重要な物理的帰結を生んだことは周知の事実だろう。数学的概念と物理的概念は互いに密接な関係があるのである。構成的数学の場合で言うなら、CRM は、古典数学の実数構造からみれば隙間がたくさんの (古典的測度が 0 である) ある意味離散的とも言える実数構造を持っている。[48]そして、CRM における実数と古典数学における実数とでは、そもそも (古典的な意味での) 濃度が異なるのであって、両者では自然世界に存在する無限的構造が本質的に異なることになる。[49]CRM と古典数学の場合のように、数学的基盤の相違がこういった物理的対象に関する帰結・モデルに関する帰結を持つ場合には、それぞれの数学的基盤をもつ物理理論は異なると見なされるべきである。

また、別の根拠として、存在論の異なる (何が存在するかが異なる) 物理理論は異なる物理理論と見なされるべきである、という要請を挙げることができる。この要請自体は直観的に自然なものであろう。一般に異なる数学理論は異なる存在論を持っている。古典数学と CRM の場合で言うなら、不連続関数の存在・不存在のために両者の存在論は異なるのである。したがって、それぞれの数学を基礎とする物理理論の存在論も異なることになり、先の要請によって、両者は異なる物理理論であることになる。この二つの根拠によって、古典数学に基く物理理論と構成的数学に基く物理理論は (観察データと合致するのにも関らず) 異なる物理理論であることが帰結する。

以上の議論によって、最初に述べた経験との一致の問題をどのように扱うかについての三つの主張のいずれに対しても、次のようにして肯定的に論じることが

---

[48] もっとも超準的実数から見れば通常の実数もある意味スカスカなのだが、超準的実数の中での通常の実数の測度が 0 になったりすることはない。

[49] これは最初の例で述べたような意味での、数学の哲学における構造主義者に大きな影響を及ぼす。

可能となる。一つめの経験との大体の一致という条件を物理理論に課すなら、現代の物理理論に使われる数学を構成的に展開できることを考えればよい。[50]二つめの主張に対しては、経験的証拠と完全に一致する物理理論が得られたとき、その数学的基盤を構成的に扱えると予測できることから、異なる数学に基く二つの物理理論を手に入れることができるだろう。三つめの主張に対しては、例えば初等解析しか用いないニュートン力学なら、古典的にも構成的にも展開できることは今や明白である。そして、これらの異なる数学に基づく物理理論は、上で述べた同一性に課されるべき条件により、異なる物理理論であることになる。なお、一定の根拠をもつある翻訳（恒等翻訳）のもとで矛盾するという意味で、これらの「異なる」を「矛盾する」に置換することができる（繰り返しになるが、今の場合、根拠を持つある翻訳で矛盾するという以上の強い意味で、矛盾という事態を表現する手段はない）。

構成的数学に基く物理理論というものに強い疑念を持つ人に対しては、次のような例を挙げることもできる。そのような人でも古典数学に基いて経験と合致する物理理論を構成できることは疑わないはずである。ところで、古典数学といっても、その形式化の仕方は種々存在する。例えば、$ZF+V=L$ と $ZFC+\neg CH$ はいずれも通常の数学のほとんどすべてを形式化できる理論であるが、恒等翻訳で互いに矛盾する。[51]ここで、前者を採用する物理理論には「存在論はできるだけ慎ましくあるべきだ」という根拠があり、後者を採用する物理理論に対する擁護としてはCHから導かれる直観に反する命題群を挙げることができる。[52]先ほどと同様に、「存在論が異なれば物理理論は異なる」という命題に訴えれば、$ZF+V=L$ と $ZFC+\neg CH$ のそれぞれに基く物理理論は異なる物理理論である。そして、「古典数学に基いて経験と合致する物理理論を構成できる」という妥当な仮定により、$ZF+V=L$ と $ZFC+\neg CH$ のそれぞれに基き経験と合致する物理理論を構成すれば、上に述べた三つの意味のいずれでも、そして最も強い最初の定式化の意味でも、物理理論の決定不全性を示す具体例となる。この場合も、一定の根拠をもつある翻訳のもとで矛盾するという意味では、矛盾する二つの理論を与える。

3.1.3 観察の理論負荷性と観察データ

ここでは定式化に潜むもう一つの問題について考えてみよう。

観察の理論負荷性とは、異なる理論（言語）を持っている観察者は同じ現象を目にしても何を観察として報告するか異なる場合がある、という主張である。こ

[50]もっとも本当に最近の物理理論でどのような数学が用いられるのか著者は知らないし、相対論で使われるような微分幾何学については構成的研究はまだ始まったばかりのようであるが、これまでの構成的数学の成功を見る限り、何らかの形で構成的に展開できると予想してよいだろう。

[51]$R_{\omega+\omega}, R_{\omega+\omega+\omega}, \ldots$ という階層を考えれば大きな圏を扱う議論も形式化できる。集合論的ではない数学は $R_{\omega+\omega}$ 程度で十分展開できるからである。

[52]前者を肯定する者としてはクワインを、後者を肯定するものとしてはゲーデルを挙げることができる。[クワイン 99]p142 や [BP83] 所収のゲーデルの論文"What is Cantor's Continuum Problem?" を参照。

れは最初ハンソンの”Patterns of Discovery”という本において述べられたもので、（クーンや）ファイヤアーベントらはこれを利用し、異なるパラダイムをもつ理論間の通訳不可能性を主張した。観察の理論負荷性を説明するとき頻繁に用いられるものは、アヒルにもウサギにも見える絵であるが、これは余りにも有名なので、他の例を挙げてみよう。

例えば、うなぎ犬を見たとき、「変なうなぎがいた」と報告する人もいれば「変な犬がいた」と報告する人もいるだろう。「うなぎ犬」という語彙を持っている人なら、「うなぎ犬がいた」と報告する人もいるだろうし、「犬」や「うなぎ」といった語彙を持っていないため、「何か生き物がいた」としか表現できない場合も考えられる。これは観察者がどのような生物学的理論（言語）を持っているかによって報告が異なるという意味で理論負荷性の一例である。

また、実数 x に対して $f(x) = 0$ (if $x = 0$), $f(x) = 1$ (if $x \neq 0$)、という関数の定義を見て、古典数学の支持者なら全域的な関数が定義されたと考えるだろうが、直観主義数学の支持者ならこの関数が全域的であるとは考えないだろう。直観主義的には、0 かどうか判定できる実数 x に対してしか、この関数は定義されていないからである。これは観察者がどのような数学的理論を持っているかによって報告が異なるという意味で理論負荷性の一例である。

さて、理論の決定不全性テーゼは、全ての物理的観察データと合致するにも関らず異なる複数の物理理論が存在する、という主張だが、観察の理論負荷性を考慮した際に生じる疑念は、物理的観察データの全体というものは理論と独立に確定していると考えてよいのか、というものである。もし観察データそのものが理論に相対的にしか決まらないなら、観察データの理論独立性を仮定して記述されている決定不全性テーゼはあまり意味を成さないことになる。また、もし観察の理論負荷性が正しいなら、物理理論が経験（観察命題）と合致するかどうかを特定の物理理論とは独立に確かめられないということになり、経験との合致により物理理論の優劣をつけることができなくなる、という状況に陥ることを我々は余儀なくされる。経験との合致は物理理論の正しさを評価するための（ほとんど唯一の）根本的基準であることを考えると、観察の理論負荷性が正しいなら、客観的に正しい物理理論という概念はほとんど維持不可能なものになるだろう。

この疑念に対する著者の回答は、理論負荷的に見える観察命題は現実的には理論から独立した観察命題へと還元できるため、物理的観察データというものを理論とは独立に想定できる、というものである。「現実的には」という限定をつける理由は、日常的に認められている程度の一定の理論は仮定するからである。そもそも何の理論（言語）も仮定しなければ観察を言語で記述できないのだから、その意味での理論負荷性は避けようが無い。

還元のアイデアは単純である。観察というものは、主に視覚によるものだろうが、より広めに考えても人間の五感を用いてなされるものである。したがって、五感に与えられた情報あるいはその情報を与える手続きを記録して、それ自体を観察とすればよいのである。もちろん、ここでも「五感」などの理論的な語彙が混

ざっているが、ここでの「五感」の使用は、例えば人間の視覚に関する現在の科学理論のすべてを仮定しているということではなく、単に人間は目で見ることによって観察を行うという程度の日常的な経験的事実しか仮定していない。先に述べた「日常的に認められている程度の一定の理論は仮定する」というのは、このような意味においてであって、こういった日常的な経験的事実を「理論」と呼ぶことは大げさ過ぎるだろう。さて、２つの方法の概略についてより詳しく説明しよう。いずれも、「観察の際の状況そのものをデータ化して観察として扱えば、観察に理論負荷性はない」という考えに基いている。

一つめの方法として、視覚データと聴覚データを記録するには、ビデオなどのメディアを利用すればよい。嗅覚データ、触覚データ、味覚データなどはこのような記録が現在では難しいが、空想的にはそういった感覚を生じさせる感覚神経への刺激方法を記録するという方法がある。より現実的には、嗅覚は化学の実験で用いられるものの、触覚や味覚が物理的実験で本質的に用いられることはまずないと思われ、嗅覚データについては言語による表現（刺激臭がしたなど）も可能であるためそれで満足する、という手段が考えられる。ここではビデオなどのメディアの原理に関する理論が仮定されているのではないかと思われるかもしれないが、重要なのは、ビデオが視覚データや聴覚データを再現するという日常的な経験的事実であって、どのようにデータの再現が可能になっているのかという理論的・原理的側面は上の議論では仮定されていない、ということである。したがって、特定の理論への本質的な依存はない。なお、観察命題という言語的な対象が、映像などの非言語的な対象に置き換えられることに抵抗があるなら、デジタルメディアを用いて映像などの情報をビット列という言語的対象で表現してしまえばよい。

観察がなされた状況の構成手続きを与えることにより観察を理論から自由にするのが２つめの方法である。「観察とはその構成的手続きである」と決めれば、そこに最早理論負荷性はない。それは次のようにして分かる。物理的観察というものは、物理的実験を通じて行われるものであり、実験に再現性は不可欠である。[53]そして、観察に再現性があるということは、観察を再現する手続きがあることになり、したがって、物理的観察の手続きへの還元は常に可能である。実験手続きの記述自体は、「どのような装置をどのように操作してどのような測定を行うか」といったことを記述するだけなので、本質的に何らかの理論に依存するということは起こり得ない。実験装置が何を観測するものなのかなど実験装置のメカニズムや役割にまで踏み込めば理論負荷的になるが、実験手続きは単に実験者の行動の仕方を指し示すだけのものであるので、実験者がいかなる理論を持っているかとは無関係であり、その実験手続きすなわち観察には理論負荷性はないのである。もし実験手続きに理論に依存する表現や条件が含まれて実験手続きが理論負荷的に

[53]勿論、どの程度の再現性を要求すべきかなど、この点について細かな問題はあるが、客観的・実証的な実験であるためには、基本的に再現性が要求されることは間違いない。再現性に関する議論は [伊勢田 03] 参照。

なるなら、そうした実験手続きはその理論を持たない者には再現不能となり、実験の再現性の要請に反するため最早正当な実験とは言えない。[54]

例えば、うなぎ犬の例はうなぎ犬をビデオで撮っておけばその映像自体に理論負荷性はないし、関数の定義も文字列をそのまま記録しておけば、それは古典主義者にも直観主義者にも同じに見える文字列であって、やはりそこに理論負荷性はないのである。これらは物理的実験ではないため、その再現手続きを与えることは少し困難だが、例えば、どこに行ってどのようにすればうなぎ犬や文字列を見ることができる、といった手続きなら与えることができるかもしれない。実際の物理実験については、それに再現性が要求されるおかげで、確実にその手続きを記述できるものとなっている。

観察の理論負荷性の問題をこのような手段で解決した場合、決定不全性テーゼの「理論が観察データと合致する」という部分は、解決手段に応じてそれぞれ「理論が五感のデータ（現象）と合致する」とか「理論が物理的実験の結果と合致する」という意味になる。

ここで、次のような反論が寄せられるかもしれない。確かに観察を情報の記録や手続きの記録により表現するなら観察の理論負荷性はなくなるが、そのときは観察データの解釈に理論に依存する多義性が生じるため、「理論が観察データと一致する」ということが理論負荷的になり、結局理論負荷性は回避できていない、という反論である。しかし、理論が観察データと一致するかどうかは、予め当の理論が固定された上で判断されるのであるから、その時点で観察データとの一致の考慮は既に理論負荷的である。したがって、理論の観察データとの一致が理論負荷的であるというのは当然であって、そこにはいかなる問題も生じてはいないのである。

感覚情報やそれを与える手続きの記録は、観察の理論負荷性の問題を解決するための原理的方法だが、現実の科学の幾つかの実験の中に観察の理論負荷性を探し求めても見つからない、という実際的な反対根拠もある（[内井 95] 参照）。また、たとえ上で述べた著者の方法に本質的な難点が見つかったとしても、観察の理論負荷性に反対する根拠を他の幾人かの論者に求めることができる（[内井 95] 参照）。

3.2　翻訳の不確定性

翻訳の不確定性とは何か述べる前に、我々は（ガウスではなく）クワインのようにはじめてみよう。自身の言語とは異なる言語コミュニティの中に入って行き、クワインは全く白紙の状態から翻訳の作成を試みるものを根底的翻訳者（radical translator）と呼ぶ。彼は、根底的翻訳者が異なる言語コミュニティの人々の外的振る舞いのみを頼りにして翻訳を進めていくプロセスを詳細に分析した上で、そ

[54]科学技術が発達すれば、精密なロボットに実験を行わせて観察（実験）の理論自由性を実地証明することも可能だろう。もっともロボットのプログラムにプログラマーの理論や意図・願望が影響しないようにしなければならないが。

のようなプロセスによって異なる根底的翻訳者が（実際の使用に耐える）同一の翻訳に到達するとは限らないと論じた。なお、ここで根底的翻訳者は分析対象の言語コミュニティのすべての外的振る舞い（質問に対する応答、文章など）を考慮することができると仮定しても、なお翻訳は不確定であると主張される点が重要である。[55]

古典数学と直観主義数学の関係を考えるに当たって、著者は一人の根底的翻訳者であった。著者の言語は古典数学の言語であり、直観主義数学の言語の色々な側面を見ながら、両者の間の翻訳をいかに作成するべきか思案した結果、出来上がった翻訳が恒等翻訳と計算可能性翻訳である。既に述べたように、いずれの翻訳にも一定の根拠があり、いずれか一方の翻訳のみが正しい翻訳であると言い得る根拠は（現時点では）存在しないため、古典数学と直観主義数学の間には互いに矛盾する 2 つの翻訳が存在することとなったのである。この例が（若干の改変によって）クワインによる翻訳の不確定性のテーゼを事実立証するということを以下で示そう。

3.2.1 翻訳の不確定性の定式化

翻訳の不確定性テーゼとは何か、これは様々な意味で困難な問題であるが、大雑把には次のように述べることができる。翻訳の不確定性とは、ある 2 つの日常言語 L1 と L2 の間には、L1 の言語コミュニティの外的振る舞いすべてを合理的に説明するにも関らず、互いに矛盾する L1 から L2 への 2 つの翻訳が存在する、という主張である。[56]ここで、言語 $L1$ から言語 $L2$ への 2 つの翻訳 $t1, t2$ が互いに矛盾するとは、$L1$ のある文 S が存在して $t1(S)$ と $t2(S)$ が $L2$ において矛盾することとする。この「翻訳の矛盾」の定義は 2 つの翻訳をダイレクトに比較した場合のものであって、より厳密には「理論の矛盾」の場合のように、2 つの翻訳理論を比較するメタ理論とそこへの 2 つの翻訳理論の翻訳を用意した上で「翻訳の矛盾」を捉えるべきであろう。決定不全性の場合のように、この素朴な定式化を吟味することによってさらなる問題点の所在を明らかにしていく。

最も大きな問題は、「翻訳とは何か、何であるべきか」というものである。より詳しく言えば、翻訳とは言語の文全体のクラス間の写像なのであるが、その写像が翻訳足り得るための必要十分条件は何か、という問題である。勿論、その条件の数学的に厳密な記述を求めるのは見込みの極めて薄い行為であるため、インフォーマルな直観的記述で満足する他はない。だが、その場合にさえ、ここには繊細な問題が潜んでいる。

翻訳とは一方の言語を他方の言語の中で理解するための道標である、と言うことはそれほど的を外してはいないだろう。少なくとも翻訳の最も重要な側面が、異

[55] これはきわめて大雑把な書き方である。正確な思考のプロセスは [Quine64] で読める。

[56]「互いに矛盾する」はより弱い主張「異なる」に置き換えられる場合もある。「より弱い」と無条件に言うことは一般にはできないかもしれないが、これについては「翻訳の同一性と不確定性の自明化」でより詳しく扱う。

なる言語間における相互理解を可能にするという点であることは確実であると思われる。なお、ここでいう相互理解には（翻訳の向きと同様の）向きがあることに注意してほしい。以下常に相互理解という用語は、想定されている翻訳と同様の向きを有しているものとして使用する。そして、異なる言語間における相互理解を可能ならしめるなら、それ以上に翻訳に要求すべきことは何も無いのではないか。翻訳が直観的な意味で正しい翻訳かどうか確かめる際に最も有効な方法は、丁度科学理論の検証がそうであるように、その翻訳を実際に使用してみて齟齬を来たさないことを確かめるというものである。そこで、写像が翻訳になるための条件はその写像が相互理解を可能にすることである、とする方法が思い浮かぶが、この条件の適切さは次のようにしても根拠付けることができる。

翻訳とは一方の言語の文から他方の言語の文への「意味」を保存する写像である。この考えに反対する者はいないだろう。ここで「意味」とは何だろうか。言語の使用実践に表出する以上の内容を持つものとして「意味」という概念を捉えることには数多くの批判がなされてきた。クワインの翻訳の不確定性からの一つの教訓もそのようなものであるが、意味というものは言語の使用実践に表出する限りの内容しか持たない、すなわち意味とは使用のされ方であるという考えを支持する議論は他にもたくさん存在している。したがって、翻訳の不確定性が立証されていない現在の段階でも、意味とは使用のされ方である（meaning as use）という考え方を採用することができる。この考えの下では、文の意味を保存する写像とは、文の（各々の言語における）使用のされ方を保存する写像である。

ここで、「文の使用のされ方を保存する」とはいかなることだろうか。一方の言語での文の使用のされ方と、他方の言語での文の使用のされ方に対して、どのような同一性が定義されているのか。例えば「雨が降っている」などの場面文であれば、外部状況との関連があるため、その外部状況と照らし合わせることによって「使用のされ方」が一致しているかどうか確かめることができる。[57]すなわち、外部状況との照合により「使用のされ方」の同一性を定義できるのである。しかし、外部状況に依存しない定常文、高度に概念的な文については、外部状況との照合という手段を使用することはできない。

高度に概念的な文の翻訳に際して我々になし得る最善の行為は、その概念的な文の翻訳の結果となる文が、いかなる視点においても筋の通らない意味不明の文にならないように翻訳する、ということである。翻訳の結果がある程度整合性のある筋の通ったものになれば、我々はそれで満足するほかないのである。これは我々が直観主義数学の関数概念を翻訳する際に実際に直面した事態でもある。すなわち、翻訳の適切さに関する一定の根拠をもつ幾つかの視点では適切と判断されるという以上のことを、恒等翻訳や計算可能性翻訳に要求することはできなかっ

[57]場面文とは、その真理値が外部状況に依存して決まる文のことを指す。その反対の、真理値が外部状況に依存しない文のことを定常文と呼ぶ。勿論、翻訳の初期段階においては何が場面文であるのかは明白ではないだろうが、その文に対する同意・不同意の反応（翻訳の対象としている言語の話者の反応）が時点に関らず不変であるかどうかはある程度経験的に検証可能な事柄である。したがって、場面文と定常文の区別をある程度つけることは可能である。

た。「使用のされ方」に関する、実際に検証（反証）できない超越的な同一性の概念を持ち出したところで、与えられた写像が文の使用のされ方に関するその同一性の条件を保存するかどうか我々には検証（反証）できないのだから、我々にとってはそのような検証（反証）不能な超越的同一性の概念は無意味であると言わざるを得ない。

纏めると、結局「翻訳が文の使用のされ方を保存する」は、高度に概念的な定常文に関しては「翻訳の結果にある視点から一定の整合性が存在する」という条件に置き換えるほかないということである。さて、「翻訳の結果にある視点から一定の整合性が存在する」ということは「翻訳により相互理解が可能になる」ということと（大体）同値であると言える。[58]さらに、場面文に限れば、「翻訳が使用のされ方を保存する」と「翻訳により相互理解が可能になる」は（大体）同値である。なぜなら、まず、使用のされ方が保存されていれば、その共有する外的状況によって相互理解が可能になる。この逆は、もし場面文について使用のされ方が保存されていなければ、その保存が不成立になる場面において相互理解は不可能になることから分かる。したがって、「写像が翻訳になるための条件はその写像が相互理解を可能にするということである」という主張が（ある程度）根拠付けられた。

ところで、相互理解が可能であるとは、一体どういったことなのだろうか。自身とは異なる言語の話者（以下、相手）の主張や議論（外的振る舞い）を翻訳して理解しようとするとき、相手の色々な主張や議論が尽く全く支離滅裂なものなった場合、それは翻訳の仕方が悪いのだと考えほうが自然である。そのような状況では相手の振る舞いの合理的説明は不可能になり、そのため相互理解はできない。したがって、翻訳により相互理解が可能であるための必要条件として、翻訳により命題の真理性がある程度保存される必要がある、というものを採用すべきである。ここで、「相手の振る舞いの合理的説明が不可能なら、相互理解はできない」に着目しよう。まず、この命題は正しい。合理的説明ができないということは、相手の振る舞いが理解不能だということである。そこで、この命題の対偶をとれば、「相互理解できるなら、相手の振る舞いの合理的説明が可能である」になる。したがって、代わりに相互理解可能性という概念を用いることにより、不確定性テーゼの主張から「あらゆる振る舞いを合理的に説明する」は除去できる。

しかし、命題の真理性の保存（ある程度の健全性）の条件は相互理解可能であるための十分条件であるとは必ずしも言えない。例えば、あまりに複雑な翻訳は人間の有限性のために相互理解を実質的に不可能にしてしまうことがあるため、真理性が保存される複雑すぎる翻訳によっては相互理解が可能とはならない。[59]相互理解可能性の中には、真理保存性だけではなく、翻訳の単純性に関する考慮も含

[58]一定の整合性を持つ視点があれば相手の主張は理解できるし、逆に相手の主張が理解できるということは相手の主張を意味不明にしない解釈の仕方・視点を既に所有していることになるので、このように言える。

[59]既に述べたように、ここでの「複雑な翻訳」にも、写像の複雑性と写像の記述のされ方としての複雑性の二つの意味がある。

まれているのである。また、ある翻訳を用いて相手の主張を解釈したとき、たとえその主張が間違っているものであったとしても、それが２つの言語コミュニティの間に生じている何某かの重要な差異に基づいていると考えられる場合には、その相手の主張を自身の言語における正しい主張に写像するように計らうことが正しいとは限らない。より具体的には、前節で論じたように、直観主義数学から古典数学への恒等翻訳が、両者の間の哲学的差異を表現していると見なすなら、その翻訳により生じる２つの数学の間の齟齬は適切なものなのであって、それを排除する翻訳は逆に（哲学的差異を無視するという意味で）不適切なのである。そして、哲学的差異の認識は相手の言語の自身の言語における理解に関るものなのだから、これもまた相互理解の一部なのである。より一般には、相互理解可能性の中には、翻訳が言語間の（哲学的・文化的などの）差異の適切な表現も含まれているということである。さらに、これも既に述べたことだが、文とそれを構成する単語の関連や、文と文の間の論理的関連を表現するために、翻訳はそれぞれに対応する原始的構造から再帰的に定義可能である必要がある。

このように、相互理解が可能であるという条件には、実に多様な条件が含まれていると考えられる。そこで、以下では相互理解の核となる条件である真理保存性とそれ以外の条件を分けて扱うことにしよう。以後、「翻訳により相互理解が可能である」は「翻訳が命題の真理性をある程度保存する」の意味とし、「２つの翻訳が同等に適切である」を「２つの翻訳が翻訳の適切さに関する様々な基準の総体的考慮について同等である」の意味で用いることにする。翻訳の適切さに関する様々な基準の一部として、単純性や哲学的・文化的差異の表現や原始的構造からの再帰的定義可能性といったものがあり、そういった様々な考慮を総合して考えたとき、２つの翻訳のうち特に一方がより優れていると見なすことができない場合に、「２つの翻訳は同等に適切である」と表現するのである。

最終的な翻訳の不確定性テーゼの定式化は、ある２つの日常言語 L1 と L2 の間には、いずれを用いても相互理解可能かつ同等に適切な、互いに矛盾する L1 から L2 への２つの翻訳が存在する、という主張である。

3.2.2　翻訳の同一性と不確定性の自明化

翻訳の不確定性を「互いに矛盾する翻訳の存在」ではなく「異なる翻訳の存在」として定式化した場合には、決定不全性の場合のように、翻訳の同一性とは何かということがやはり問題となる。そして、同一性をある仕方で定義すれば不確定性は自明に正しいものとなり、別の仕方で定義すれば不確定性は自明に誤っているものとなるのも、決定不全性の場合と同様である。

例えば、「He has a wife.」という英語の文を「彼は妻を持つ」と「彼は妻帯者である」に翻訳する２種類の翻訳が異なるものとして捉えるられるような同一性の定義を採用すれば、不確定性は全く自明の事実である。また、翻訳の唯一の手掛かりである、翻訳の対象となる言語コミュニティの振る舞い（その言語の話者

の振る舞い、その言語の文書など）に関するデータの総体が同一であれば、そこから推測される翻訳も同一であるという性質をその同一性が備えているなら、翻訳の不確定性は当然あり得ないことになる。したがって、「異なる翻訳の存在」のバージョンの不確定性テーゼを非自明なものとして立証あるいは反駁するためには、やはり強すぎず弱すぎない程度の同一性の定義を採用する必要がある。

しかし、著者が目指す方向は、「互いに矛盾する翻訳の存在」を主張する不確定性テーゼなのだから、同一性の定義について考えを巡らす必要はなく、矛盾する翻訳の定義だけで十分であり、実際この定義については既に述べた。不確定性テーゼの素朴な定式化を与える際に、「互いに矛盾する翻訳の存在」は「異なる翻訳の存在」よりも強いと述べたが、これは「互いに矛盾するなら異なる」ということを前提している。しかし、矛盾と同一性が別々に定義されるなら、この条件が成り立つ保証はどこにもない。ある見方のもとで矛盾する２つの翻訳が、別の見方のもとでは同一の翻訳である可能性を排除することはできないのである。実際、次の節「理論の同一性」で詳しく論じるが、$ZFC+CH$ と $ZFC+\neg CH$ はある見方のもとでは矛盾する一方で、別の見方のもとでは同一であると考えることもできる。これは理論の場合だが、たぶん翻訳の場合にも同様な例が存在するだろう。したがって、厳密には、「互いに矛盾する翻訳の存在」から「異なる翻訳の存在」が常に導かれるわけではない。

しかし、以上はあくまで一般論である。著者が不確定性を立証すると考える例、すなわち前節で検討した恒等翻訳と計算可能性翻訳について、両者が同一の翻訳であると言い得る翻訳の同一性の定義で、しかも翻訳の同一性として直観的に妥当な根拠のある同一性の定義が存在するとは考え難い。恒等翻訳と計算可能性翻訳は直観主義数学の全く別の側面を反映するよう定義されているからである。したがって、この例を「不確定性を立証する例の存在証明」で説明する仕方で用いることにより、、「互いに矛盾する翻訳の存在」と「異なる翻訳の存在」のいずれのバージョンの不確定性も立証されるものと著者は考える。

3.2.3　不確定性を立証する例の存在証明

以下では、直観主義数学と古典数学の間の恒等翻訳と計算可能性翻訳が、実際に翻訳の不確定性テーゼを立証する例であることを示そう。再度確認しておくと、ここで言う翻訳の不確定性テーゼは、ある２つの日常言語 L1 と L2 の間には、いずれを用いても相互理解可能かつ同等に適切な、互いに矛盾する L1 から L2 への２つの翻訳が存在する、という主張である。

まず、不確定性テーゼが扱うのは数学の言語ではなく日常言語であるため、数学の言語を日常言語の中に埋め込んで、あるいは数学の言語を含むように日常言語を拡張して考える必要があるが、ここでは次のように仮定する。直観主義数学を明示的に含み、古典数学を明示的には含まない日常言語 $L1$ と、古典数学を明示的に含み、直観主義数学を明示的には含まない日常言語 $L2$ が存在するとする。こ

の仮定は次のようにすれば満たされる。すなわち、数学的語彙を含まない日常言語 $L0$ を持ってきて、その言語に直観主義数学を付け加えたものを $L1$ とし、その言語に古典数学を付け加えたものを $L2$ とすればよい。どんな日常言語でも自然数に関する語彙（一、二、三など）は含まれると考えられるが、通常日常で使用される程度の自然数論などは直観主義数学とも古典数学とも調和するものなので、その点に特に問題は無い。このような言語が現実に存在しても不思議ではない。直観主義数学のみしか知らない民族と古典数学のみしか知らない民族が存在すれば、彼らの（数学を含めた）言語はおそらく $L1$ や $L2$ のようなものとなっているだろう。また、数学的言語を付け加えた言語が「日常」言語なのかという疑問が生じるかもしれないが、数学が日常の一部であるような（数学マニアの）民族が存在することもあり得ることである。さらに、以上で言及してきた特殊な民族について、我々が実際に介入して人工的にそのような民族を構成することも可能であると思われる。最後に、数学の間の恒等翻訳と計算可能性翻訳を日常言語 $L1$ と $L2$ の間の翻訳に拡張するためには、$L0$ の部分を恒等翻訳とすることによって、2つの翻訳を $L1$ 全体で定義されるようにすればよい。

次に、恒等翻訳と計算可能性翻訳が互いに矛盾することは、例えば「すべての実数上の実数値関数は連続である」という命題（に対応する $L1$ の命題）のそれぞれの翻訳による像を考えてみれば明らかである。

さらに、いずれの翻訳を用いても相互理解は可能である。この点について何より注意すべきことは、いずれの翻訳の場合にも、大きな共通の土台の上に幾らかの相違が存在するに過ぎない、という事実である。恒等翻訳のもとでは直観主義数学と古典数学の相違が相当大きな部分に渡るように見えるかもしれないが、BISH ＋ FT の部分は両方の体系に共通しており、しかもこの共通部分は包括的な数学を展開するのに十分なものである。計算可能性翻訳の場合には、BISH ＋ FT ＋連続性原理というさらに多くの部分を両者は共有している。[60]すなわち、こういった部分では真理保存性が言えるということであり、いずれの翻訳でも相互理解は可能であることが定義より導かれる。[61]

さて、恒等翻訳と計算可能性翻訳が同等に適切であることは、前節で考察した通りである。以上によって、翻訳の不確定性テーゼが立証された。

既に考察した別の例を用いても、不確定性テーゼを裏付けることができる。例えば、古典力学を採用する言語と相対論的力学を採用する言語である。この場合にも、上と同様に、日常言語部分を同じにして翻訳を言語間に拡張して考えればよい。古典力学と相対論的力学が調和可能なのか、通訳不可能なのかについて数々の議論が生じてきたが、それはまさに翻訳の不確定性を示す具体例であったと見なすことができるのである。こういったことは直観主義数学と古典数学について

[60]この共有部分の多さは、真理保存性の点ではプラスの要素だが、哲学的差異の適切な表現の点ではマイナス要素でもある。

[61]相互理解を広い意味で捉えたとき、恒等翻訳により古典数学の支持者と直観主義数学の支持者の間で相互理解が可能であることは、歴史が証明している。意味のある論争が可能であるということは、お互いが相手の主張をある程度理解していない限り不可能である。

も言えるだろう。
ここであげた例はクワインの意図にも適っていると思われる。彼は [クワイン 99]p68 において、「なぜなら、その手続きは共約不可能な価値の間の評価を含んでいるからである。例えば、原住民に合理的な信念を帰属させるためならば文法と意味論をどの程度まで異様なものにしてよいのか。逆にまた、原住民の文法や意味論を単純化させるためならば原住民にどの程度まで異様な信念を帰属させてよいのか」と述べている。これは、翻訳の適切さを計る異なる基準があり、いずれを用いるかでどちらの翻訳も擁護できる、すなわち同等に適切である、ということを述べている。ただ、この文章からするとクワインは、異様な信念を帰属させることが時に正当なことであることを見逃しているのかもしれない。

3.2.4 善意の原則

翻訳を構成していくときの指導原理として、「対象としている言語コミュニティの信念を自身の言語コミュニティの信念とできるだけ一致するように翻訳する」という善意（寛容）の原則（the principle of charity）と呼ばれるものがある。より砕けた表現を用いれば、相手の主張ができるだけ正しくなるように好意的に翻訳しよう、という原則である。善意の原則は、クワインにより述べられ、その高弟ディヴィドソンにより強調された。これに従うなら、直観主義数学の「すべての実数上の関数は連続である」は、古典数学の「すべての計算可能な実数上の関数は連続である」に翻訳されるべきであるので、恒等翻訳より計算可能性翻訳を採用すべきだと考えられるかもしれない。
しかし、善意の原則を適用することが常に適切とは限らない。既に述べたように、自身の言語コミュニティと相手の言語コミュニティにおける何らかの哲学的・文化的差異を表現するためには、相手の言語コミュニティで支持されている命題を、自身の言語コミュニティで支持されていない命題に翻訳することも時には適切なのである。「すべての実数上の関数は連続である」もある見方からはそのような命題と考えられることは既に見たが、数学以外での例を挙げれば、「神は存在する」という信念を持っている言語コミュニティと、「神は存在しない」という信念を持っている言語コミュニティを考えてみよう。そして、「この世界の創造主が存在する」という命題について、神が世界を創ったと考える前者は真と判断するが、後者は偽と判断するとしよう。この真理値の相違は神の存在に関する重要な文化的差異に根ざしているとも考えられるのであって、それを翻訳の複雑化により無理に調和させることは事態を歪曲することにつながる可能性がある。このように、必ずしも善意の原則に従うべきではない場面もあり得るのであって、善意の原則は常に従うべきという意味での原則としてではなく、場合によっては例外を認める原則として捉えるべきである。

3.2.5 翻訳の不確定性の意義

クワインによると、翻訳の不確定性は「文の意味としての命題という観念が維持できない」([クワイン 99]p152) ことを示す。これは、命題とは特定の言語に依存せず存在する観念であって、色々な言語の個々の文にはその意味を表象する一定の命題が割り当てられている、という哲学において伝統的であった考えが整合的ではない、という主張である。翻訳の不確定性によれば、なぜこのような命題という観念が維持不可能なものになるのだろうか。

仮に、どんな文にもその意味を表現する特定の命題が結び付けられているとしよう。すると、直観主義数学の「すべての実数上の関数は連続である」という文 S0 にも一定の命題 P0 が割り当てられているはずである。上で述べた翻訳の不確定性によれば、この文は古典数学における「すべての実数上の関数は連続である」(S1) に翻訳してもよいし、あるいは「すべての実数上の計算可能な関数は連続である」(S2) に翻訳してもよい。どんな文にも命題が結び付けられているのだから、この S1 と S2 にも何らかの命題が結び付けられているはずであり、その命題をそれぞれ P1、P2 としよう。既に考えたように翻訳によって同意味性が保存されるのだから、P0=P1 と P0=P2 が成立する。したがって、P1=P2 である。ここで、S1 と S2 とは一方は（古典数学において）真であり他方は偽であるため、S1 と S2 に結び付けられている命題は同一ではありえない。意味という言葉をどのように解釈しようとも、真な文と偽な文が同意味であるとは言えないからである。これは P1=P2 に矛盾する。したがって、どんな文にもその意味を表現する特定の命題が結び付けられているという考えは誤りである。

しかし、ここで次のような反論が可能である。例えば「直観主義数学と古典数学」の小節で恒等翻訳が意味を保存していると論じたとき、既に文の言語内の振る舞いとしての意味（meaning as use）という考えを用いていたのだから、上の議論は最初から意味概念が言語独立的な命題概念とは異なると仮定していたのであり、その議論を上の論証の「翻訳により結び付けられている文は、互いに同意味である」という部分で援用することはできない。この批判はそれ自体では正しい。確かにそこでは意味概念を命題概念とは考えなかった。しかし、「直観主義数学と古典数学」で恒等翻訳の意味保存性を擁護したときの議論は、文の意味を命題とする意味概念を用いても同様に通用するのである。したがって、そのような置換を施したものを上の論証に代入すれば、上の論証は妥当なものとなる。

上の論証は少し改変すれば、言語間の同意味性という概念を否定するように思われる。すなわち、S0 と S1 が同意味であり、S0 と S2 が同意味なら、S1 と S2 が同意味になるが、これは矛盾である。しかし、この議論は同意味性が推移的であることを仮定している。曖昧性をもつ関係に対して推移性がなりたつとする根拠はどこにもない。上の議論も命題の同一性が推移的であることを仮定しているが、命題とは一つの抽象的存在者（abstract entity）と考えられているのだから、その同一性に対して推移性を要求すべきだろう。特に、曖昧性をもつ同一性関係しか

ない場合、考えられている二つのものが同一か異なるかが明確に規定できないのだから、それを確固たる存在（entity）と認めることはできないと思われる。あるいは、これが受け入れられないなら、次のように言ってもよい。すなわち、推移性を満たす厳密な同一性関係が定義されるような確固たる存在としての命題概念は維持不可能なのである。

3.2.6 翻訳の非閉包性？

翻訳の非閉包性とは、翻訳が合成について閉じるとは限らない、という主張である。伝言ゲームにおいて、各段階での内容のずれは小さいのに、最初と最後では言明の内容が著しく変化してしまうことがあるように、翻訳も合成していくことによって、それぞれのワンステップでは比較的小さく問題にならなかったズレが、全体としてみれば見逃せないほどに大きくなってしまう、ということが起こり得ると考えることはある程度自然だろう。もし翻訳が合成可能なら、一つの言語をある翻訳で他方の言語に翻訳して、今度は最初の翻訳と矛盾する別の翻訳で元の言語に引き戻せば、同一言語間でも翻訳の不確定性が生じることが分かる。同一言語間で不確定性はあるのだろうか。クワインやダメットは翻訳を簡単に合成してしまっているように見えるが、果たしてそれは適切なのだろうか。[62]著者は、この問題については未だ思案中である。

3.2.7 解釈の不確定性

ここに、脳に電極を差し込まれた猿がいる。猿を箱に入れ、猿が箱の中にあるレバーを下げると電極を通じて、猿の脳のある部位が刺激される。猿が進んでレバーを下げるという状況が観察されたとしよう。このとき、猿は快感を感じているから、進んでレバーを下げているのだろうか。それとも、猿は不快感を感じているのだが、何かの強迫観念に駆られてレバーを下げているのだろうか。また、このとき、猿はレバーを下げることを好んでいると言えるのだろうか。それとも、猿はレバーを下げることを嫌っているにも関らず、何かの強迫観念に駆られてレバーを下げているのだろうか。もしその猿が実は巧妙に作られたロボットだったらどうだろう。そもそもロボットは好んだり嫌ったりするのだろうか。

ある種の脳状態は人間にとって快感をもたらすものだとされている。例えば、ベータエンドルフィンが分泌されると人間は快感を覚えると言われる。しかし、それが本当に快感の証拠であるとなぜ分かるのか。不快感の証拠であると言ってはなぜいけないのか。

相手にどのような信念を帰属させるかは、相手の振る舞いからは決定できない。翻訳の不確定性は、このような解釈の不確定性に基いているとも考えられる。

---

[62]もしかしたらどこかできちんと論じているのかもしれない。

4　理論間の同一性

本節で目的とするのは、論理学で扱われる形式体系という意味での理論に対する同一性の定義を与えることである。そのため、本節では「理論」や「翻訳」といったタームは専ら論理学的な意味で用いて、日常的な意味での使用は行わない。勿論、論理学的な意味での「理論」や「翻訳」が事実上一意的な意味を持つわけではない。これまでの節のように日常的な意味も含むような形でこれらの用語を用いることはないということである。また、proof theorist は、例えばカット除去の仕方などまでを論理の性質として捉えるなど、論理を演繹体系それ自体と近いものに見なす傾向があるが、本節の考察ではそういった証明論的要素を論理の性質と捉えることはしない。

4.1　なぜ同一性が重要か

導入で「古典命題論理とは何か」という問いを提示した。この問いに対して、例えば、シークエント計算による演繹体系を指して「これが古典命題論理だ」という人もいるだろう。しかし、それは論理の表現の仕方の一つ、しかも演繹体系としての表現の仕方の一つに過ぎず、それ自体が論理であるとは言えない。同様に、真理関数的２値意味論による回答も、それが特権的な地位を占めるべきものであるにせよ、やはり意味論的表現の一つに過ぎないことに変わりはない[63]。これは丁度、有限フォン・ノイマン順序数全体は自然数そのものではなく、自然数のモデルの一つに過ぎないのと同種の事実である。ソクラテスの有名な言葉を借りれば、美の例を枚挙することは「美とは何か」という問いに対する解答とはなり得ない[64]。「自然数とは何か」という問いに対しては、デデキントとペアノにより解答（と大多数の数学者が見なすもの）が与えられたが[65]、「古典命題論理とは何か」という問いに対する、一定のコンセンサスのある解答は未だ得られていない（と著者は思う）。

「意味とは何か」という問題は古来からの哲学の大問題であったが、エイヤーなどの論理実証主義者（logical positivist）は、この問題を同義性（同意味性）を用いて解決することを考えた。すなわち、文の全体を同義であるという同値関係で割ることにより得られる同値類を、そこに属する文の意味とするのである。丁度、集合全体のクラスを全単射があるという関係で割った同値類により基数を定

[63] ２値意味論が特権的というのは、それが我々に古典論理の自然な直観的理解を与えるからである。また、２値の構造は分配束となる代数のクラスを統制する働きを持つので、その意味でも特権的である。この事実は古典命題論理の代数（的意味論）における２値構造の特徴づけを与える。

[64] もちろん、美の例の枚挙は美という言葉の理解をある程度保証するものであることは否定しない。

[65] 勿論、算術の一階の真理集合でさえ RE ではないという事実と人間の有限性を考慮すれば、（集合論のモデルなどに）相対的な解決でしかなく、その意味では永遠に未解決という解決と言わなければならない。

義するのと同様の発想に基いている。[66]既に予想されるように、論理（より一般に理論）というものも、同一性が定義できれば、その表現全体を同一性で割った同値類により定義することができる。ここで、直観に反する例を除くために、表現全体は証明概念を含むような表現（証明論的表現）である必要があるのだが、これについては後に論じる。このような定義は勿論（与えられた表現形式全体と相対的にではあるが）特定の表現形式に依存しない。

クワインの「同一性無くして存在者無し」という標語を冒頭で引用したが、それでは、論理に対する同一性がなければ、論理というものは存在しないのだろうか。我々は現に色々な論理体系について学び、研究しているではないか。クワインが何を意図したのか真実は分からないが、著者の考えは次のようなものである。ここで、論理に対するいかなる意味での同一性もなかったとしてみよう。このとき、論理というものは、いかなる同一視も前提されないのだから、思惟される場所に相対的な存在者となる。したがって、研究室の机で古典命題論理について考えるときと、布団の中で古典命題論理について考えるときでは、ひとは異なる古典命題論理について考えていることになる。さらに、人に対する相対性、時間に対する相対性、それを考えるときの体温に対する相対性など、論理は際限のない相対性に曝されて無限に分裂した概念となってしまうのである。こういった相対性は、論理だけに限られるものではなく、我々の思考するほとんどいかなる対象にも当てはまるだろう。こういった無限の分裂から対象を救っているものこそ、我々が暗に持っている対象に対する同一性の概念に他ならない。そして、我々は無限に分裂した概念など有意味に思考することはできない、言い換えれば、有意味に思考できる限りは一定の同一性の概念が前提されているのである。そして、その暗に前提されている論理（一般には理論）に対する同一性概念の分析と精密化がここでの目的なのである。

4.2　不十分なアプローチ

4.2.1　論理式間の演繹関係を保つ翻訳・リンデンバウム代数の同型性

２つの代数が同じとはその間に演算を保存する全単射が存在することと通常は定義されるが（もっとも、一般には圏論的な定義のほうが有用だが)、論理もまた論理式と論理結合子が形成するある種の代数であるという観点から、２つの論理が同じとは、論理式の間に結合子を保存する全単射が存在することである、とするのは自然な発想だろう。

この定義の直ちに分かる問題点は、対象とする２つの論理の間に丁度同じだけの結合子が対応しているとは限らない、ということである。冒頭に述べた古典命題論理をどのような結合子で書いても同じだという直観を表現したければ、最初から丁度同じだけの結合子があると仮定することは適切ではない。さらに、たと

[66]同値類を集合サイズにするためにはランク最小のものだけに絞るなどすればよい（ZF の場合)。

え同じだけの結合子が存在していても、Gödel translation のように必ずしも結合子を保存するとは限らない「翻訳」も存在する。また、結合子を見かけ上人為的に入れ替えた体系の場合を考えても、結合子は保存しない「翻訳」が可能である。こういった考慮からどんな結合子が存在するのかについての仮定を設けないとするなら、最早結合子の保存を条件にすることはできないが、それでは論理式間の写像に一体何を保存させることができるのか。

論理である以上、２つの論理式の間の演繹（deduction）の関係はあるだろう。このようなものがなければ、論理の上の理論を考えることができなくなり、それは最早論理とは言いがたい代物である。また、先の古典命題論理の例でも演繹関係は存在しているなど、我々の扱いたい具体例を排除することも無い。よって、これを条件として採用することにしよう。すなわち、論理 L_1 から L_2 への翻訳 T は任意の L_1 の論理式 A, B に対して次を満たすとする。

$$A \vdash B \quad \text{in} \quad L_1 \Leftrightarrow T(A) \vdash T(B) \quad \text{in} \quad L_2$$

古典命題論理の様々な形の公理化や Gödel translation に対しては実際にこれを証明することができる。しかし、例えば古典命題論理を not,imply で書いたものと not,or で書いたものを考えた場合、自然に構成できる２つの翻訳を合成しても恒等写像とはならず、したがって、翻訳が全単射になることは要求すべきではない。[67]ここで注意すべきことは、確かに論理式間の全単射にはなっていないものの、同値な式を潰してみれば全単射になるということである。理論の同一性を与える翻訳に対しては、さらにこの条件を採用するものとする。

この条件の重要性は次のような迷走を見れば了解されるだろう。Gillies は、Gödel translation が「古典論理と直観主義論理は同じ論理である」という主張を導かないように、formally correct translation と adequate translation という区別を導入して、Gödel translation は formally correct だが adequate ではなく、したがって両者は同じ論理とは言えない、と論じた（[Gillies96]p84）。ここで、adequate translation の定義には論理結合子の意味を保存するという条件があるが、Gillies は論理結合子の意味とは何かについてほとんど何も述べていない。意味という概念をまったくもって曖昧なまま導入するのでは、両者は異なる論理だから異なるのだ、というトートロジー以外には何も述べていないに等しいと言わざるを得ないだろう。

さて、この問題が我々の設定ではどうなるのか考えてみよう。例えば、命題変数 p, q に対して、直観主義論理の論理式 $p \vee q$ と同値な論理式を Gödel translation の像とするような古典論理の論理式は存在しない。なおこの事実は、直観主義の「または」を古典論理で表現することはできない、ということを表している。よって、Gödel translation は同値性で割った論理式上の全単射にはなっていないため、そこから古典論理と直観主義論理が同じ論理であると結論されることは我々の定義でも起こらない。しかも、Gillies の定義とは異なり、我々の定義は曖昧なご都合主義的概念を含まない十分に明確なものである。

[67] これは圏論的な同型の概念が適切ではない場合もあることを示している。

これまで述べてきた定義は、$\vdash$ は前順序関係であることを考えて代数的な言葉で表現し直せば、要するにリンデンバウム代数の順序構造が同型であると言っている。しかし、順序構造から定義できない結合子をもつリンデンバウム代数もあるので、リンデンバウム代数の「同型」と表現することはミスリーディングかもしれない。[68]このような条件の下でも順序関係から定まる演算（例えば束演算や直観主義論理の imply）は保存される。

次のこのアプローチに対する大きな困難を述べるが、それは同一性の定義として用いる場合の困難であって、リンデンバウム代数という概念自体の重要性を損なうものではないことを注意しておく。また、次の反例はリンデンバウム代数が同型であっても同じ理論とは言えないことを示すものなので、位相空間に対する

ホモロジー群のように、リンデンバウム代数を論理に対する不変量として用いることは可能である。つまり、同一性に対する必要条件ではあるので、同一ではないことを示すためには有効である可能性はある。

4.2.2 上のアプローチに対する反例

上の定義では順序構造から決定されない結合子は必ずしも保存しない点から、そのような場合を考えても反例は構成できると思われるが、結合子は保存するのに直観的に同じとは言えないという、より致命的な反例が存在する。導入で述べた「$ZFC + CH$ と $ZFC + \neg CH$ の間には再帰的同型写像が存在する」という事実がそれである（[KP67] 参照）。特に集合論に限定されるわけではなく、例えばロビンソン算術の無矛盾な RE 拡大の間には常に再帰的同型写像が存在する。ここで、同型写像の定義は、演繹関係と not と imply を保存するというものである。これは not と imply のみで記述された理論で考えられているだけであって、省略記号として追加すればすべての命題的結合子を保存すると言える。選択公理などを使うわけでもなく再帰的に構成される写像なので、その構成の仕方に文句をつけることは出来ない。[69]ロビンソン算術の無矛盾な RE 拡大がすべて同じ理論であると言えるだろうか。勿論そんなはずはないというのが我々の直観だろう。再帰的同型写像という同値関係が研究に値しないものであるということでは決して無いが、少なくともそれは我々の求める理論間の同一性の定義を与えてくれはしない。

なお、ストラスバーガーは、[Straßberger] において、リンデンバウム代数の同型性が論理間の同一性の定義として適切であると主張し、さらに、それはロジシャンの間の folklore であるとまで言っている。リンデンバウム代数の「同型」は順序構造以外のものも含めて考えていると思われるので、この節の最初に述べた仕方で反例を構成できる可能性は低い。上の反例は「理論」に対して述べたもので「論理」に対するものではないので、上の反例を直接適用することもできないかもし

[68]例えば、ある種の部分構造論理ではそのような結合子が現れる。

[69]無矛盾性の仮定に問題があると感じられるかもしれないが、理論が矛盾している場合には、その理論と別の理論が同一かどうかは極めて容易に判定できるため、無矛盾な理論のみに同一性の考察を絞ることができる。

れない。[70]それでは、リンデンバウム代数の同型性はよく知られている通常の論理に対しては正しいのだろうか、そうではない。２階論理はその中で算術を展開するのに十分であることは、遥か昔にフレーゲが示して見せた通りである。[71]内包公理の強さを変えることにより異なる２つの２階論理が構成できるので、その２つの理論に対しても再帰的同型写像が存在することになる。特に２階論理に拘らず３階論理などを考えても同様に再帰的同型写像が存在する。したがって、高階の論理は論理ではないという哲学的立場を取らない限り、リンデンバウム代数の同型性は論理間の同一性の定義としても不適切である。

4.2.3　理論がなす圏の同値性

一つ論理があれば、その上の理論を考えることができる。そして、その上の理論のリンデンバウム代数を対象、準同型（すべての結合子を保存する写像）を射とする圏を構成できる。この圏の同値性によって論理の同一性を定義する、という方法も考えられる。なお、理論に対してもその上の理論が考えられるので同一性の定義の仕方は全く同様だが、用語上の混乱を避けるためここでは論理という用語を用いて議論する。

残念ながらこの定義もまた不十分なものであることが次の例から判明する。ウカシェヴィッツ n 値論理に対して、その上の理論のリンデンバウム代数のなす圏を $\boldsymbol{L_n}$ としよう。このとき、$\boldsymbol{L_n}$ と $\boldsymbol{L_m}$ が圏同値であることは、$(n-1)$ の約数の順序構造と $(m-1)$ の約数の順序構造が同型であることと同値であることが知られている（[Maruyama07]）。したがって、例えば $\boldsymbol{L_3}$ と $\boldsymbol{L_{102}}$ は同型になる。果たして 3 値論理と 101 値論理は同じ論理と言ってよいだろうか。小さな自然数と大きな自然数の間に質的な差異を認める ultra-finitist なら、決して同じとは言わないだろう。

多値論理の利点の一つはいわゆるソリテスパラドクスを解決することに用いられるという点である。ソリテスパラドクスとは、0 個の砂は砂山ではないことと、n 個の砂が砂山ではないなら $n+1$ 個の砂も砂山ではないことから、何個砂が集まっても砂山ではない、という結論を引き出すような曖昧さのある述語に関するパラドクスのことである。多値論理では、n 個の砂が砂山ではないとき、$n+1$ 個の砂が砂山になるわけではないが、砂山であるということの真理値（「砂山度」）が少し上がると考えられるので、ここのステップは妥当ではないことになりパラドクスが解消されるのである。

しかし、このとき、3 値論理で「砂山度」を判定しようとすれば、どこに砂山度 0 と砂山度 1/2 の境界があるのだろうか。小さな有限値の場合、それぞれの値の境界がどこにあるのかという形で、ソリテスパラドクスが再現されてしまうという問題がある。n 個の砂が砂山度 0 なら、１粒増えたとき 0 か 1/2 の二択しかないな

[70]しかし、技術的には理論と論理を区別する意味はないが。部分構造論理は FL 上の理論だし、古典論理は直観主義論理上の理論である。

[71]そのときの彼の体系は矛盾していたが、現在ではその矛盾を取り除いて算術を展開する方法が知られている。

ら砂山度 0 と結論するのが自然だろう。一方、十分大きな有限値の場合、このような問題は生じない。１粒増えれば真理値が僅かに増えていく様子を捉えられるのである。もちろん、正確に幾ら砂山度が増えるのかという問題があるが、この問題は砂山度を確定した値ではなく一定の範囲のある値で捉えることにより乗り越えられる。一方、このような技法は 3 値のように小さな値では通用しない。したがって、3 値論理と十分大きな素数 p に対して $p+1$ 値論理は異なる論理と考えるのが自然である。これは、両者のリンデンバウム代数が同型ではないということからも根拠付けられる。一方で、それらの上の理論がなす圏は圏同値であるため、理論全体の圏の同値性は論理の同一性の定義としては適切ではない。

4.3 同一性の適切な定義へ向かって：証明論的意味の保存

不十分なアプローチを幾つか見てきたが、それでは一体どうすれば同一性の見込みのある定義が得られるのだろうか。[KP67] の Pour-EL と Kripke の定理の証明と例えば Gödel translation により定理が定理に写像されることの証明には一つの大きな相違がある。それは前者が論理式の間の対応関係を見ているのに対して後者は証明の間の対応関係を見ているという点である。さらに、古典命題論理をどのような結合子で書いても同一であるなどの具体例では、実際に推論規則の書き換えを示すことにより証明の間の再帰的変換を与えることが可能である。NBG 集合論は、ZF 集合論では省略記号として導入するクラスに対する語彙を持つように保存拡大したものなので、同一の理論と見なすこともできるが、両者の間にも証明の構造を保存する再帰的変換が存在することが知られている。したがって、証明の構造の保存に関する条件を付け加えれば、先の反例を排除してなお重要な具体例を排除しない同一性の定義を得ることができるのである。

数学者にとって定理と証明は不可分のものである。定理の主張を見ながら証明を書くのは当然のことながら、証明の途中や終了後に（必要な仮定を追加したり不必要な仮定を除去したりして）定理の主張を書き換えることもあるし、定理の主張の直観的意味というものは証明の内容を見ることによって明確になる場合もある。したがって、数学理論の間の翻訳を考えるとき、証明の保存まで要求するのはある意味でとても自然なことだろう。さらに、Prawitz などが提案している証明論的意味論という立場によれば、論理式の意味はその証明の集合によって与えられるとされる。証明を保存する写像というものは、その意味で論理式の意味を保存する写像であると言える。「翻訳」が「意味」を保存するのは当然のことだろう。

演繹を保存する翻訳という証明論的概念にリンデンバウム代数間の準同型という代数的・意味論的対応物が存在したように、証明を保存する翻訳という概念にも代数的・意味論的対応物が存在する。リンデンバウム代数では２つの対象の間には高々１つの射しか存在しないが、２つの論理式をつなぐ演繹は一般には多数存在する。この事実を表現するのに適切な場は圏であろう。すなわち、論理式を対象とし、論理式間の演繹を射とする圏を考えることができる。恒等射に対応する概

念や合成の定義の仕方によっては証明の間に一定の同値関係を入れて考える必要があるが、そのような前提のもとでは論理式と証明の圏が定義可能である。こういった圏の間の同値は、２つの論理式の間にどのような射が存在するかという点にまで関ってくるので、単に論理式の間の演繹関係や結合子を保存する以上の要求が課される。証明を保存する翻訳との相違は、圏の場合には射となる証明の内容にまで踏み込まないことである。つまり、前者はそれぞれの証明の内容がどのようなものであるかに関るのに対して、後者はそれぞれの証明がどのような相互関係で存在するかに関るのである。なお、量化子の保存の条件を加えても、Pour-EL と Kripke の結果は適用できなくなると思われ、その方向でも同一性の自然な定義が可能かもしれない。

5　まとめと今後の課題

本論文は、複数の理論を比較する一般的枠組みを定義し、その枠組みにおいて理論間の矛盾と理論間の同一性の問題を扱っている。理論間の矛盾を考える際の例として、構成的数学の主要な学派と古典数学との関係や幾つかの物理理論の相互関係を取り挙げた。こういった例の考察は、それぞれの理論間の相互関係を適切に理解するために、それ自体重要なものである。特に、種々の構成的数学に対して多くの紙数を割いて、数学の基礎概念である実数や関数といったものが、そこではどのようなものとして捉えられているのかを明らかにするように努めた。構成的数学には一見通常の数学と矛盾するように見える事例も多いが、詳しく見れば古典数学と整合的な解釈も可能である。そのような整合的な解釈は realizability semantics により統一的に捉えることができる。そして、こういった例の考察から、分析哲学において議論の種となってきた、クワインによる物理理論の決定不全性テーゼと翻訳の不確定性テーゼの立証を試みた。理論間の同一性に関しては、論理学的な理論のみに対象を絞って、考えられるどのような定義がなぜ不十分であるか、そういった不十分な点を解消するために、どのような定義が考えられるかについて考察した。

複数の理論を比較する枠組みとは次のようなものである。すなわち、二つの理論 T1,T2 の比較は、一般にその二つとは異なるメタ理論 T3 の中で、T1 から T3 への翻訳 t1 と T2 から T3 への翻訳 t2 と相対的に行われると考えるのである。簡単のため、ここでは二つの理論の比較に限定したが、本文ではより一般的に定義されている。この枠組みのもとで理論間の矛盾は次のようにして定義される。

理論 T1 と理論 T2 がメタ理論 T3 において翻訳 t1,t2 と相対的に矛盾するとは、T1 の真理集合の t1 による像と T2 の真理集合の t2 による像の合併を仮定すると T3 においてある命題の肯定と否定が共に導かれることである。

こういった多少複雑な枠組みを採用する最大の動機は、実際に特定の二つの理論

が矛盾するかどうかという問題を考える際、まさにこのような枠組みが必要とされることがあるからである。次に、そういった例を挙げよう。

「直観主義数学と古典数学は矛盾するか」という問題は、両者の文をどのような対応付け（翻訳）のもとで比較するかということに依存している。メタ理論 T3 として二つの数学を含む日常言語の世界を考え、T2 から T3 への翻訳は何もしない翻訳すなわち恒等翻訳とする。メタ理論 T3 は、いずれの翻訳が適切であるかを判断する根拠の場を提供している。根拠がメタ理論 T3 の中になければ、それはメタ理論 T3 を採用する設定のもとでは根拠とはならない。T1 から T3 への翻訳として多くの翻訳が考えられるが、本論文では恒等翻訳と計算可能性翻訳というものを主に扱った。恒等翻訳のもとでは、直観主義数学で真な連続性原理が古典数学に翻訳されたとき偽になるため、二つの理論は矛盾していることになる。計算可能性翻訳は realizability semantics と呼ばれるものである。それは、計算理論を利用して構成的数学を古典的な数学の立場で理解することを可能にする。計算可能性翻訳のもとでは矛盾は生じず、計算可能性翻訳がより適切な翻訳であるように思われるが、必ずしもそうではないことを示した。特に、両数学の存在論の違いに目を向けると計算可能性翻訳は不適切である。いずれの翻訳に対してもそれぞれを擁護する視点（翻訳の適切さの基準）が存在するため、無条件に一方の翻訳のみを擁護することはできないというのが結論である。

このテーマにおける今後の課題は、直観主義数学における俳中律の不成立を古典的に理解するために本質的な「具体的提示」に関る問題、この問題と関連して、BHK 解釈が直観主義論理の適切な意味論を与えるのかという問題が、今後の重要な課題である。後者に対しては現時点では否定的な解答が予想される。より適切な意味論の候補として、ハイティング代数に対するストーン双対性を用いて、論理式をそれが真となるモデル全体としての開集合と捉える方法が考えられる。ストーン双対性が成り立つような論理に対しては、常にこのような方法が可能であり、こういった手法についての正確な考察も今後の研究課題としたい。

理論間の同一性を除く本論文の全ての部分において、翻訳というものは、ある言語の他の言語における合理的解釈という特徴を根幹に備える概念として捉えられている。上の例もこのような見方をもとに論じている。このような見方とある程度合致する翻訳の適切さの判断基準には、単純性、哲学的・文化的背景の保存、性質の共有性（ある程度の健全性）などがある。翻訳が恣意的な対応付けではないことを保証するための、原始的な要素から（論理構造などを保存する形で）再帰的に定義可能であることという条件も適切さの基準に加えられる。[72]

翻訳に対する上記のような見方は、日常言語間の翻訳についても同様に言えることである。クワインの翻訳の不確定性テーゼは、日常言語間の翻訳はあらゆる経験的証拠を考慮に入れても不確定であることを述べている。[73]したがって、上の

[72]なぜ合致するのかは本文を参照して欲しい。

[73]勿論、これはいい加減な表現であって、正確には本文を参照されたい。これは以下の物理理論の決定不全性の場合にも同様である。

例を用いてこの意味での不確定性テーゼを論じることも可能であると予想される。実際、相互理解可能性という概念を軸として緻密に不確定性テーゼの定式化を考察することにより、このような予想が実現可能であることを示した。一方で、翻訳の非閉包性やそれと関連する同一言語間での不確定性については、結論を先延ばしにした。これらは今後の課題である。

同じくクワインによる物理理論の決定不全性テーゼは、あらゆる経験的証拠を考慮しても正しい物理理論が複数存在することを述べる。これを示すために、物理理論の数学的基盤を置換することにより、異なる物理理論が構成できることを考察した。勿論、異なるという言葉は適切に定義される必要がある。単にそれが依拠する数学が異なるだけでは異なる物理理論とは見なし難いという反論が予想されるが、例えば物理的な時空の構造は実数などの数学的対象の構造に基いて定まるのであって、物理的な概念に対する数学的基盤の影響度は見逃すことができないほど強いと考えられること、異なる数学理論を採用する物理理論は存在論的コミットメントの基準により異なる存在論を持つことになることなどによって、こうした反論を退ける議論を展開した。

理論間の同一性の問題に関しては、最初に同一性の定義が、論理学的意味での理論を特定の形式体系に依存しない形で定義することを可能にすることを述べた上で、論理式間の演繹関係を保つ翻訳、リンデンバウム代数の同型性、その上の理論がなす圏の同値性などの同一性の定義が、明白に異なっている理論を同一にしてしまうという意味で不十分であることを論じた。そして、このような欠陥を補う方法として、単に論理式間の関係だけを見るのではなく、証明概念（証明間の構造）まで考慮した同一性の定義を用いることを提案した。数学という営みにとって証明という概念が本質的であることを顧みれば、理論が同一であるために証明の間の変換が与えられる必要があるという条件は、非常に自然なものと思われる。本論では最終的にきちんとした定式化を与える余裕はなかったので、それを今後の課題としたい。

参考文献

[AC] M. Adelman and J. V. Corbett, Quantum Numbers viewed intuitionistically, preprint [74]

[Beeson85] M. J. Beeson, Foundations of Constructive Mathematics, Springer-Verlag, 1985

[Beeson05] M. J. Beeson, Constructivity, Computability, and the Continuum, in Essays on the Foundations of Mathematics and Logic, Volume 2, Polimetrica, 2005

[Benacarraf73] P. Benacerraf, Mathematical Truth, Journal of Philosophy, 1973

[74] preprint と書かれている文献の大部分は Citeseer に（2008 年 1 月に）掲載されていたものである。

[BP83] P. Benacerraf and H. Putnam, Philosophy of Mathematics, 2nd ed., Cambridge University Press, 1983
[Bishop67] E. Bishop, Foundations of Constructive Analysis, McGraw-Hill, 1967
[Bridges95] D. Bridges, Constructive mathematics and unbounded operators - a reply to Hellman, Journal of Philosophical Logic, 1995
[Colyvan01] M. Colyvan, The Indispensability of Mathematics, Oxford University Press, 2001
[Detlefsen90] M. Detlefsen, Brouwerian Intuitionism, Mind, New Series, Vol. 99, No. 396, 1990
[Dummett74] M. Dummett, The Significance of Quine's Indeterminacy Thesis, Synthese 27, 1974
[Friedman73] H. Friedman, The Consistency of Classical Set Theory Relative to a Set Theory with Intuitionistic Logic, The journal of Symbolic Logic, Vol. 38, No. 2, 1973
[Gillies96] D. Gillies, Artificial Intelligence and Scientific Method, Oxford University Press, 1996
[Hellman93] G. Hellman, Gleason's theorem is not constructively provable, Jounal of Philosophical Logic 22, 1993
[Hellman93*] G. Hellman, Constructive mathematics and quantum mechanics, Journal of Philosophical Logic 22, 1993
[Kripke82] S. Kripke, Wittgenstein on Rules and Private Language, Harvard University Press, 1982
[KP67] S. Kripke and M.B. Pour-El, Deduction-preserving " recursive isomorphisms " between theories, Bull. Amer. Math. Soc. Volume 73, 1967
[KV65] S. C. Kleene and R. E. Vesley, The foundation of intuitionistic mathematics especially in relation to recursive functions, North-Holland, 1965
[Lietz04] P. Lietz, From Constructive Mathematics to Computable Analysis via the Realizability Interpretation, Dissertation, University of Edinburgh
[Longley00] J. R. Longley, Notions of Computability at Higher Types, Logic Colloquium 2000
[Maruyama07] Y. Maruyama, Stone Duality for Łukasiewicz n-valued Logic, preprint
[Moschovakis] J. R. Moschovakis, Notes on the Foundations of Constructive Mathematics, preprint
[Osten02] J. van Oosten, Realizability: A historical essay, Mathematical Structures in Computer Science, 2002
[Plisko] V. Plisko, Primitive Recursive Realizability and Basic Propositional Logic, preprint
[Putnam75] H. Putnam, The Analytic and The Synthetic, in Mind, Language and Reality, 1975

[Quine64] W. V. Quine, Word and Object, Mit Press, 1964
[Quine80] W. V. Quine, From a Logical Point of View, Harvard University Press, 1980
[Quine92] W. V. Quine, Pursuit of Truth, Harvard University Press, 1992
[RD99] F. Richman and D. Bridges, A constructive proof of Gleason's theorem, Journal of Functional Analysis 162, 1999
[Sato] K. Sato, The 4-Valued Logic in terms of Substructural Logics, preprint
[Schuster05] P. Schuster, What is Continuity, Constructively?, Journal of Universal Computer Science, vol. 11, no. 12, 2005
[Skvortsova05] E. Z. Skvortsova, A faithful interpretation of the intuitionistic propositional calculus by means of an initial segment of the Medvedev lattice, Siberian Mathematical Journal, 2005
[Straßberger] L. Straßberger, What is a Logic and What is a proof?, preprint
[Shapiro00] S. Shapiro, Thinking about Mathematics, Oxford University Press, 2000
[Troelstra] A. S. Troelstra, History of constructivism in the 20th century, preprint
[TvD88] A. S. Troelstra and Dirk van Dalen, Constructivism in Mathematics volume I, North-Holland, 1988
[TvD89] A. S. Troelstra and Dirk van Dalen, Constructivism in Mathematics volume II, North-Holland, 1989
[飯田 89]　飯田隆、言語哲学大全　　意味と様相（上）、勁草書房、1989
[飯田 95]　飯田隆編、リーディングス　数学の哲学、勁草書房、1995
[伊勢田 03]　伊勢田哲治、疑似科学と科学の哲学、名古屋大学出版会、2003
[内井 95]　内井惣七、科学哲学入門、世界思想社、1995
[クワイン 99] W.V. クワイン著、伊藤春樹・清塚邦彦訳、真理を追って、産業図書、1999
[染田 88]　染田靖、不確定性と不完全決定性ー翻訳の不確定性のテーゼの一解釈ー、哲学論叢、1988
[丹治 97]　丹治信治、クワインーホーリズムの哲学、講談社、1997