# 3次元多様体上の曲線の第1変形障害について

那須 弘和 (東海大学・理学部情報数理学科) *

$X$ を基礎体 $k$ 上定義された射影スキームとし, $C \subset X$ を正則に埋め込まれた $X$ の閉部分スキームとする. 種々の変形理論において接空間と障害類の空間が定まっているが, $X$ のヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}\, X$ の場合には, 法束 $N_{C/X}$ のコホモロジー群 $H^0(C, N_{C/X})$ と $H^1(C, N_{C/X})$ がそれぞれ $[C]$ における接空間と障害空間に対応する. $\tilde{C} \subset X \times \mathrm{Spec}\, k[t]/t^2$ を $C \subset X$ の1位無限小変形とし, $\alpha$ を対応する $N_{C/X}$ の大域切断とすれば, $\tilde{C}$ が2位変形 $\tilde{\tilde{C}} \subset X \times \mathrm{Spec}\, k[t]/t^3$ にリフトするためには, **第1障害** *(primary obstruction)* $\mathrm{ob}(\alpha) \in H^1(C, N_{C/X})$ が零であることが必要十分である. ここで $\mathrm{ob}(\alpha)$ は $\alpha$ の2次のカップ積 $\alpha^2 (= \alpha \cup \mathbf{e} \cup \alpha)$ に等しく, 一般には計算が容易で無い. Mumford [2] の与えたヒルベルトスキームの非被約成分の例の一般化を目的として, [1] では $X$ が3次元多様体, $C \subset X$ が曲線の場合に, $\mathrm{ob}(\alpha) \neq 0$ となるための十分条件 (**障害性判定定理**) が与えられた. 後続の研究 [3] では, その定理の2つの一般化が与えられたが, 最近一方に誤りが見つかり修正された ([4]). 本講演ではその修正内容と障害性判定定理の一般化の現状について報告する.

$X$ を3次元射影多様体, $C \subset X$ を既約曲線とし, 埋め込み $C \hookrightarrow S \hookrightarrow X$ が正則であるような中間曲面 $S$ の存在を仮定する. $\alpha$ を $N_{C/X}$ の大域切断とする. 自然な射影 $\pi_{C/S} : N_{C/X} \to N_{S/X}\big|_C$ による $\alpha$ と $\mathrm{ob}(\alpha)$ の $H^i(C, N_{S/X}\big|_C)$ $(i = 0, 1)$ 上の像をそれぞれ $\alpha$ と $\mathrm{ob}(\alpha)$ の**外成分** *(exterior component)* と呼び, 記号 $\pi_{C/S}(\alpha)$ と $\mathrm{ob}_S(\alpha)$ によって表す. $E_i \subset S$ $(1 \le i \le k)$ を互いに交わりを持たない $C$ と異なる $S$ 上の既約曲線とし, $\bigcup_{i=1}^k E_i$ に台を持つような $S$ 上の任意の有効因子 $D, D'$ に対し, $D \le D'$ ならばコホモロジー群の自然な写像 $H^1(S, \mathcal{O}_S(D)) \to H^1(S, \mathcal{O}_S(D'))$ が単射的であると仮定する. 次の定理が [3, 定理 3.3] の修正版である.

**定理 1 (cf. [4])** *$E = \sum_{i=1}^k m_i E_i$ $(m_i \in \mathbb{Z}_{>0})$ を $S$ 上の有効因子とし, $\tilde{C}$ または $\alpha \in H^0(C, N_{C/X})$ を $C$ の $X$ 上の1位無限小変形とする. $H^1(S, N_{S/X}) = 0$ を仮定し, $\alpha$ の外成分 $\gamma := \pi_{C/S}(\alpha)$ の $H^0(C, N_{S/X}(E)\big|_C)$ における像 $r(\gamma, E)$ が大域切断 $\beta \in H^0(S, N_{S/X}(E))$ へリフトすると仮定する* (図 1 参照). もし次の2つの条件が成り立てば $\mathrm{ob}(\alpha)$ の外成分は (したがって $\mathrm{ob}(\alpha)$ も) 零でない:*

(a) *$S$ 上の因子 $\Delta := C + K_X\big|_S - 2E$ に対し, $E$ の被約部分 $E_{\mathrm{red}} := \sum_{i=1}^k E_i$ への制限写像*

$$H^0(S, \Delta) \xrightarrow{|_{E_{\mathrm{red}}}} H^0(E_{\mathrm{red}}, \Delta\big|_{E_{\mathrm{red}}})$$

本研究は科研費 (課題番号：17K05210, 20K03541) の助成を受けたものです.

* *e-mail address*： `nasu@tokai-u.jp`

* ここで $\beta$ は $S \subset X$ の**極付き無限小変形**と呼ばれる.

が全射的である．

(b) $\beta$ の極 $E_i$ に沿っての主要部 *(*すなわち $\beta$ の $E_i$ への制限 $\beta\big|_{E_i}$*)* を $\beta_i \in H^0(E_i, N_{S/X}(m_iE_i)\big|_{E_i})$ とし，$\partial_{E_i}$ を $E_i$ 上の層短完全列

$$[0 \longrightarrow N_{E_i/S} \longrightarrow N_{E_i/X} \longrightarrow N_{S/X}\big|_{E_i} \longrightarrow 0] \otimes_{E_i} \mathcal{O}_{E_i}(m_iE_i)$$

の第 1 余境界写像とする．このときある $i = 1, \ldots, k$ が存在し $E_i$ 上のカップ積 $m_i\partial_{E_i}(\beta_i) \cup \beta_i$ が零でない.†

$\alpha$ と $\beta_i$ の関係については図 1 を用いて説明される．定理 1 は技術的で複雑に見えるが,

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0(C, N_{C/X}) & \ni & \alpha & & & & H^0(E_i, N_{E_i/X}(E)) \\
{\scriptstyle \pi_{C/S}}\big\downarrow & & \big\downarrow & & & & {\scriptstyle \pi_{E_i/S(E)}}\big\downarrow \\
H^0(C, N_{S/X}\big|_C) & \ni & \gamma & & H^0(S, N_{S/X}(E)) & \longrightarrow & H^0(E_i, N_{S/X}(E)\big|_{E_i}) \\
{\scriptstyle r}\big\downarrow & & \big\downarrow & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
H^0(C, N_{S/X}(E)\big|_C) & \ni & r(\gamma, E) & \overset{res}{\longleftarrow\!\!\shortmid} & \beta & \overset{res}{\longmapsto} & \beta_i
\end{array}$$

図 1: $\alpha$, $\beta$, $\beta_i$ の関係

実は (非特異 3 次曲面上の) 空間曲線のヒルベルトスキームに関する Kleppe-Ellia 予想の 2 次正規な場合の証明に用いることが可能である．

**注意 1** *[1]* では $E$ の非特異既約性と $E = (-1)$-$\mathbb{P}^1$ または $E^2 < 0$ が仮定されていた．定理 *1* の証明において $\mathrm{ob}_S(\alpha) \neq 0$ は $\mathrm{ob}_S(\alpha) \cup \mathbf{k}_C \neq 0 \in H^2(S, \mathcal{L})$ を経由して示される *(*ただし $\mathbf{k}_C$ は拡大類 $\mathbf{k}_C := [0 \to \mathcal{O}_S(-C) \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_C \to 0]$ を表し，$\mathcal{L}$ は $S$ 上の直線束 $\mathcal{L} := N_{S/X}(-C)$ を表す*)*. *[3,* 定理 *3.3]* の証明でも同じ手法が用いられたが，条件 (a) における因子 $\Delta$ の定義が定理 *1* と異なり，そのため $\mathrm{ob}_S(\alpha) \neq 0$ を結論づけるには不十分であった．実際に反例も見つかった *([4,* 例 *4])*.

# 参考文献


[1] S. Mukai and H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold, I: A generalization of Mumford's example and an application to Hom schemes. *J. Algebraic Geom.*, 18(4):691–709, 2009.

[2] D. Mumford. Further pathologies in algebraic geometry. *Amer. J. Math.*, 84:642–648, 1962.

[3] H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold, III: Deformations of curves lying on a $K3$ surface. *Internat. J. Math.*, 28(13):1750099, 30, 2017.

[4] H. Nasu. Corrigendum to "Obstructions to deforming curves on a 3-fold, III: Deformations of curves lying on a $K3$ surface". *Internat. J. Math.*, 31(12):2092001, 6, 2020.


†ただし $\partial_{E_i}(\beta_i) \cup \beta_i$ においてカップ積写像は $H^1(E_i, \mathcal{O}_{E_i}((m_i+1)E_i)) \times H^0(E_i, N_{S/X}(m_iE_i - C)\big|_{E_i}) \xrightarrow{\cup} H^1(E_i, N_{S/X}((2m_i+1)E_i - C)\big|_{E_i})$ を考える．