Obstructions to deforming space curves lying on a smooth cubic surface

那須 弘和 (東海大学・理学部情報数理学科) *

空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ は代数幾何学の研究の歴史の中でも最も古典的な研究対象の一つである. 中でも非特異 3 次曲面に含まれる空間曲線は, 曲面の持つ美しい性質から良く研究されてきた. $\mathbb{P}^3$ のヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}\,\mathbb{P}^3$ において, 次数 d と種数 g の非特異連結曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ のなす部分スキームを $H(d,g)^{sc}$ により表す. Kleppe [2] は非特異 3 次曲面に含まれる空間曲線の極大族に関する次の予想を与えた.

予想 1 (Kleppe (Ellia による修正版)) *$d > 9$ かつ $g \geq 3d-18$ とする. $W \subset H(d,g)^{sc}$ をその一般元 C が非特異 3 次曲面に含まれるような空間曲線の極大族とする ($W = \overline{W}$). もし C が線形正規であり*, かつ $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) \neq 0$ を満たせば,*

(1) *W は $(H(d,g)^{sc})_{\mathrm{red}}$ の既約成分であり,*
(2) *$H(d,g)^{sc}$ は W に沿って生成的に被約でない (generically non-reduced).*

ここで $d > 9$ ならば W の次元が $d+g+18$ $(= \dim |\mathcal{O}_S(C)| + \dim |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)|)$ に等しいため, 結論 (1) は等式

$$\dim_{[C]} H(d,g)^{sc} = d+g+18 \qquad (\heartsuit)$$

と同値である. またこのとき

$$h^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3}) = \dim W + h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) \qquad (\clubsuit)$$

が成り立つことから, 結論 (2) は (1) より直ちに従う. この予想は空間曲線のヒルベルトスキームの既約成分の分類問題にも関係し, 基本的な問題の一つである. 種数 g が次数 d と比較して十分大きい場合には予想 1 が正しいことが知られている ([2, 1]). 本研究では d, g によらない条件を仮定し, 予想を部分的に証明した.

定理 1 (cf. [4]) *C が 2 次正規, すなわち $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(2)) = 0$ を満たすならば, 予想 1 は正しい.*

予想 1 の曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ に対し唯一つの中間非特異 3 次曲面 $C \subset S \subset \mathbb{P}^3$ が存在する. 射影スキーム X に対し, X のヒルベルト旗スキームを $\mathrm{HF}\,X$ によって表せば, 等式 $(\heartsuit)$ の

本研究は科研費 (課題番号：17K05210, 20K03541) の助成を受けたものです.
* *e-mail address* : nasu@tokai-u.jp
*線形正規性の条件を落とすと予想に反例が存在することが Ellia [1] により指摘され修正された.

右辺は HF $\mathbb{P}^3$ の (C,S) における (期待) 次元 $\chi(\mathbb{P}^3, N_{(C,S)/\mathbb{P}^3})$ に等しい．ここで $N_{(C,S)/\mathbb{P}^3}$ は対 (C,S) の $\mathbb{P}^3$ 内の法束† を表す．定理 1 の証明には次の補題が用いられる．

補題 1 *射影スキーム X に正則に埋め込まれた閉部分スキームの列 $C \hookrightarrow S \hookrightarrow X$ を考える．もし $H^1(X, N_{(C,S)/X}) = H^0(S, \mathcal{I}_{C/S} \otimes_S N_{S/X}) = 0$ が満たされ，さらに任意の $\alpha \in H^0(C, N_{C/X}) \setminus \operatorname{im} p_1$ に対し，その第 1 障害 $\operatorname{ob}(\alpha)$ が零でないならば*

$$\dim_{(C,S)} \mathrm{HF}\, X = \dim_{[C]} \operatorname{Hilb} X$$

が成り立つ．ただし写像 $p_1 : H^0(X, N_{(C,S)/X}) \to H^0(C, N_{C/X})$ は (第 1) 射影 $\mathrm{HF}\, X \to \operatorname{Hilb} X$, $(C,S) \mapsto [C]$ の接写像とする．

予想 1 の C に対し $\operatorname{coker} p_1 \simeq H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3))$ が成り立つ．定理 1 では C が 2 次正規のため，補題 1 の $\alpha \in H^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3}) \setminus \operatorname{im} p_1$ の外成分 $\pi_{C/S}(\alpha)$ は，S 上の適当な直線 $E_1, \ldots, E_k$ に対し，S 上の直線束 $N_{S/\mathbb{P}^3}(E_1 + \cdots + E_k)$ の大域切断 (極付き無限小変形) へリフトする．このリフティングと 3 次元多様体上の曲線の第 1 変形障害に関する結果 ([3]) を組み合わせて用いることにより $\operatorname{ob}(\alpha) \neq 0$ が示される．

もう一つの研究結果としては，非特異 3 次曲面 $S \subset \mathbb{P}^3$ 上の非特異空間曲線 C に対し C の $\mathbb{P}^3$ 内の変形が障害を受けるための十分条件を曲面上の直線を用いて与えた．S 上の直線束 L を $L := \mathcal{O}_S(C) \otimes N_{S/\mathbb{P}^3}^{-1}$ によって定義する．

定理 2 (cf. [4]) *$L + K_S \geq 0$ かつ S 上のある直線 E に対し $m := -L.E > 0$ を仮定する (すなわち L は nef でない)．このとき次のどちらかの条件が成り立てば $C \subset \mathbb{P}^3$ の変形は障害を受ける (obstructed)，すなわち $\operatorname{Hilb} \mathbb{P}^3$ は $[C]$ で特異である:*

(1) $m = 1$,
(2) $2 \leq m \leq 3$ かつ，S 上の因子 $\Delta := L + K_S - 2mE$ に対し制限写像

$$\varrho : H^0(S, \Delta) \to H^0(E, \Delta\big|_E)$$

が全射的である．

一方，$|L + K_S| = \emptyset$ または L が nef の場合は，$C \subset \mathbb{P}^3$ は障害を受けない (unobstructed).

参考文献

[1] P. Ellia. D'autres composantes non réduites de Hilb $\mathbf{P}^3$. *Math. Ann.*, 277(3):433–446, 1987.

[2] J. O. Kleppe. Nonreduced components of the Hilbert scheme of smooth space curves. In *Space curves (Rocca di Papa, 1985)*, volume 1266 of *Lecture Notes in Math.*, pages 181–207. Springer, Berlin, 1987.

[3] H. Nasu. Corrigendum to "Obstructions to deforming curves on a 3-fold, III: Deformations of curves lying on a $K3$ surface". *Internat. J. Math.*, 31(12):2092001, 6, 2020.

[4] H. Nasu. Obstructions to deforming space curves lying on a smooth cubic surface. *Manuscripta Math.*, 25 pp., Published online on 11 June 2022, https://doi.org/10.1007/s00229-022-01404-z.

† 射影スキーム X と正則埋め込み $C \hookrightarrow S \hookrightarrow X$ に対し $N_{(C,S)/X} := N_{C/X} \times_{N_{S/X}|_C} N_{S/X}$