

夏だ!数学やろう!

第3回数学教室

図形で解く数学

独立数学研究所

屋代 司

4 August 2019

Contents

- 1 数学とはどんな学問か
- 2 図形を用いて数学をやる
- 3 ベッチナンバー
- 4 漢字のベッチナンバー
- 5 結び目と絡み目
- 6 メビウスバンドと絡み目
- 7 レポートを書く

数学とはどんな学問か

数学は抽象的

数の概念は抽象的である。

「5」は数字であるが、数そのものではない。数字の「5」が表す何かが数である。

数学の特徴

- 洋の東西を問わず、抽象性のせいで数学が敬遠される。
- 抽象的であるから「自由である」とも言える。

数学をやると何を得られるのか？

数学的思考方を得られる。

数学をやると何を得られるのか？

数学的思考方を得られる。

数学的な考え方とは「本質を見抜く」事。

数学をやると何を得られるのか？

数学的思考方を得られる。

数学的な考え方とは「本質を見抜く」事。
実社会においてもっとも役にたつ能力。

図形を用いて数学をやる

つるかめ算

つるかめ算

何羽かのツルと、何匹かの亀が柵の中にいる．頭の数をかぞえると全部で 12 個ある．足の数を数えると全部で 38 本ある．つると亀の数を求めよ．

「足をそれぞれの頭に分配してツルとカメを作れ．」という問題．

つるかめ算

つるかめ算

何羽かのツルと、何匹かの亀が柵の中にいる．頭の数をかぞえると全部で 12 個ある．足の手数を数えると全部で 38 本ある．つると亀の数を求めよ．

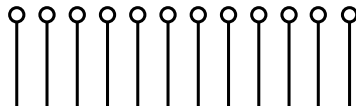
図式による解答．

つるかめ算

つるかめ算

何羽かのツルと、何匹かの亀が柵の中にいる．頭の数をかぞえると全部で 12 個ある．足の数を数えると全部で 38 本ある．つると亀の数を求めよ．

頭が 12 個あるから，頭と胴体を 12 個描く．

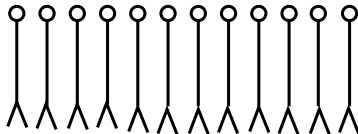


つるかめ算

つるかめ算

何羽かのツルと，何匹かの亀が柵の中にいる．頭の数をかぞえると全部で 12 個ある．足の数を数えると全部で 38 本ある．つると亀の数を求めよ．

つるの足は 2 本，亀の足は 4 本である．少ないほうの 2 本ずつ頭に分けて行く．足は 38 本あるから，24 本振り分けたところで，14 本残る．

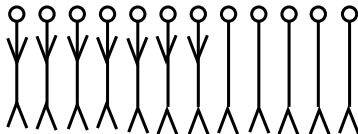


つるかめ算

つるかめ算

何羽かのツルと、何匹かの亀が柵の中にいる．頭の数をかぞえると全部で 12 個ある．足の数を数えると全部で 38 本ある．つると亀の数を求めよ．

残った 14 本の足を 2 本ずつ加えていくと下の図のようになる．ここで足が 2 本なのはつるで足が 4 本なのは亀であるから、つるが 5 羽、亀が 7 匹であることが分かる．



計算手順 (アルゴリズム)

ツルカメ算を解くときの計算手順は次の通り：

$$\begin{aligned}(\text{足の本数} - 2 \times \text{頭の数}) \div 2 &= \text{カメの数} \\ \text{頭の数} - \text{カメの数} &= \text{ツルの数}\end{aligned}$$

問題 1

問題 1

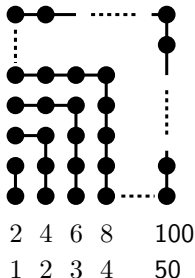
ウサギとキジの頭の数 が 32 . 足 の数 が 94 の時 , ウサギとキジはそれぞれ何羽か .

数列の和

偶数の列 , 2, 4, 6, 8, 10, ... 100 の和はいくらか .

数列の和

偶数の列, $2, 4, 6, 8, 10, \dots, 100$ の和はいくらか.



数列の和

偶数の列, $2, 4, 6, 8, 10, \dots, 100$ の和はいくらか.

$$\begin{aligned}2 + 4 + \dots + 100 &= 50 \times 51 \\ &= 2550\end{aligned}$$

問題 2

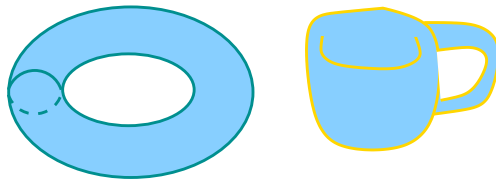
問題 2

奇数の列の和 , $1, 3, 5, 7, \dots, 99$ の和はいくらか .

図形を数字に変える

ベッチナンバー

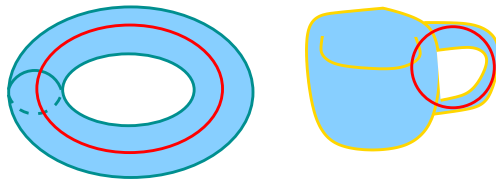
ある図形 X が含む本質的な円周の個数を 1 次元ベッチナンバーと呼び, $\beta_1(X)$ で表す.



ソリッドトーラスのベッチナンバーは 1 である.

ベッチナンバー

ある図形 X が含む本質的な円周の個数を 1 次元ベッチナンバーと呼び, $\beta_1(X)$ で表す.



ソリッドトーラスのベッチナンバーは 1 である.

図形としての漢字

漢字を図形ととらえてベッチナンバーを計算出来る .

田中角栄

$\beta_1(\text{田}) = 4, \beta_1(\text{中}) = 2, \beta_1(\text{角}) = 5, \beta_1(\text{栄}) = 0.$
 この名前のベッチナンバーは 11.

自分の名前のベッチナンバーを計算しよう．

問題 3

自分の名前を図形とみなしてそのベッチナンバーを計算せよ．

漢字のベッチナンバー

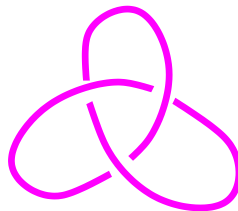
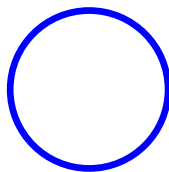
漢字のベッチナンバー

字体を固定したときに、ベッチナンバーの異なる漢字は違う漢字である。

図形を動かす

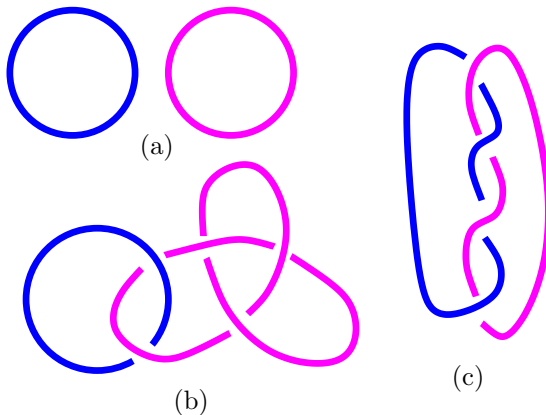
結び目と絡み目

結び目とは数学的には空間に置かれた円周のこと。



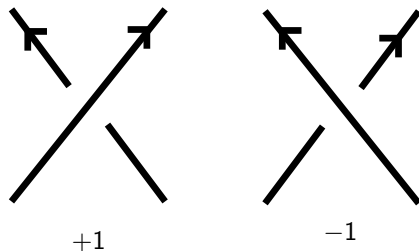
結び目と絡み目

絡み目とはいくつかの結び目の互いに交わらない和集合．
絡み目の中の各結び目を成分と呼ぶ．



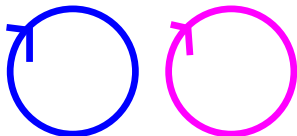
絡み目数

絡み目の異なる成分の間の交差点の符号の総和の半分を絡み目数と呼ぶ。

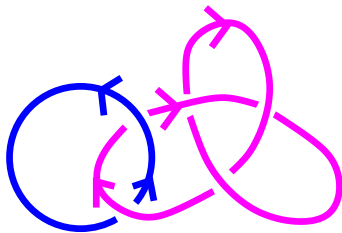


絡み目数

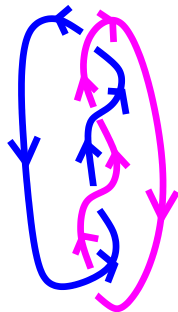
絡み目数の例



(a) $\text{Lk}(L) = 0$

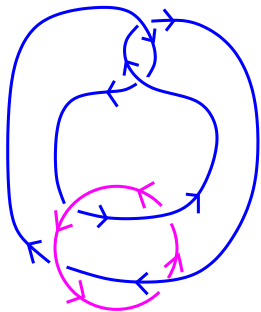


(b) $\text{Lk}(L) = \frac{-1-1}{2} = -1$



(c) $\text{Lk}(L) = \frac{1+1+1+1}{2} = 2$

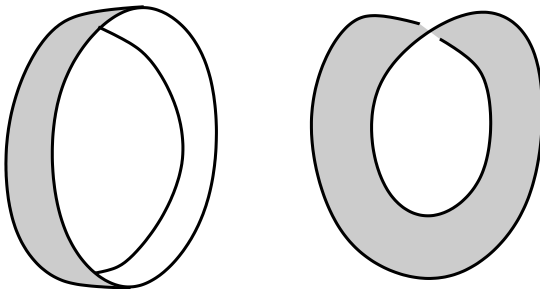
絡み数がゼロの絡み目



ホワイトヘッド絡み目は絡み数がゼロであるが成分は分離しない。

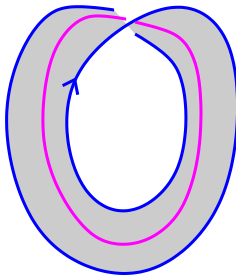
メビウスバンド

メビウスバンドは細長い帯の両端を 180 度ひねってつないだ物 .



左はアニュラス , 右はメビウスバンド .

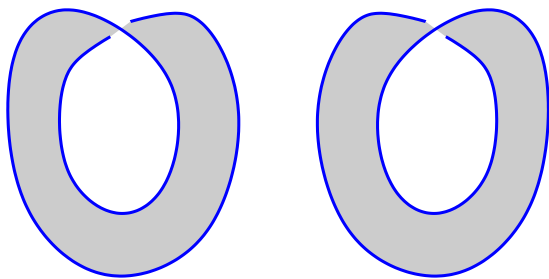
メビウスバンドは2種類ある



問題 4

メビウスバンドは 3 次元空間の中では 2 つあることを示せ.

メビウスバンドには2種類ある



レポートを書く

勉強したことをレポートにまとめることを勧めます．特に中学生は「夏休みの自由研究」に出来る．