リー代数と量子群
— ディンキン図形の原点 —

谷崎俊之（広島大学）

1　リー代数とは

いきなり天下り式ではあるが，リー代数の定義を述べよう．体[1] $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $\mathfrak{g}$ に双線形写像（ブラケット積と呼ばれる）

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \quad ((X, Y) \mapsto [X, Y])$$

が与えられており，以下の２条件が成立しているとき，$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{K}$ 上のリー代数と呼ぶ：

(A1) $[X, Y] + [Y, X] = 0,$

(A2) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$

$\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列の全体を $M_n(\mathbb{K})$ で表す．$M_n(\mathbb{K})$ は自然に $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になるが，ブラケット積

$$[X, Y] = XY - YX$$

により，さらにリー代数になることが容易に確かめられる（XY は X と Y の行列としての積）．また反対称行列の全体

$$\mathfrak{o}_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = -A\}$$

を考えると（${}^tA$ は行列 A の転置行列を表す），X, Y が反対称行列ならば $[X, Y] = XY - YX$ も反対称行列になることから，やはりこれもリー代数になる．

リー代数は元来，連続的対称性をもつ数学的対象の無限小変換群として，リーにより導入されたものである．この辺のことを少し説明しておこう（ここからの話はやや面倒だし，後で必要なわけでもないので，分かりにくければすぐに次節に進んでも構わない）．

[1] $\mathbb{K}$ は，複素数の全体 $\mathbb{C}$，あるいは実数の全体 $\mathbb{R}$ と思っていて構わない

例として，ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ を自然な正定値内積によりユークリッド空間と思ったものを考える．$\mathbb{R}^n$ のユークリッド空間としての対称性を与えるのは，その線形変換，すなわち n 次正方行列であって，さらに自然な内積を保つものである．これは直交行列に他ならない．よって $\mathbb{R}^n$ の変換群は，直交行列の全体

$$O_n(\mathbb{R}) = \{g \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t g g = E_n\}$$

と一致する（E_n は n 次単位行列）．このように，連続パラメーターをもつ変換群のことを連続変換群（リー群）とよぶ．連続変換群に対して，その一次近似をとることにより，無限小変換群としてのリー代数が得られる．ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の場合で言うと，その変換群 $O_n(\mathbb{R})$ の元の族 $g(t)$（t はパラメータ）であって $g(0) = E_n$ となるものがあるとき，これを

$$g(t) = E_n + g_1 t + g_2 t^2 + \cdots$$

と展開したときの一次の係数

$$g_1 = g'(0) = (t = 0 \text{ における } g(t) \text{ の微分}) \in M_n(\mathbb{R})$$

のことを，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の無限小変換と呼ぶ．今 $g(t) \in O_n(\mathbb{R})$ とすると ${}^t g(t) g(t) = E_n$ であるが，この式を微分することにより，${}^t g'(t) g(t) + {}^t g(t) g'(t) = 0$. これに $t = 0$ を代入して ${}^t g_1 + g_1 = 0$ がわかる．すなわちユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の無限小変換群は，反対称行列の全体 $\mathfrak{o}_n(\mathbb{R})$ と一致する．これがリー代数となるのは先に見たとおりである．

一次近似をとってリー群 G からリー代数 $\mathfrak{g}$ に移行するときに，大事な情報が失われているようにも思えるが，実は G は $\mathfrak{g}$ から（ほぼ）復元することができることが知られており，この意味でリー代数 $\mathfrak{g}$ は元のリー群 G の持つ情報をほとんど含んでいるということができる．従ってリー群という幾何学的対象の研究の多くの部分は，リー代数という純代数的対象の研究に還元されるのである．

2　単純リー代数 — ディンキン図形の登場

リー代数 $\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{h}$ であって $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ をみたすものを $\mathfrak{g}$ のイデアルという．このとき $\mathfrak{h}$ はそれ自身リー代数であるが，商ベクトル空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上にもブラケット積が

$$[X + \mathfrak{h}, Y + \mathfrak{h}] = [X, Y] + \mathfrak{h}$$

により矛盾なく定まり，これにより $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ もリー代数となる．つまり元のリー代数 $\mathfrak{g}$ は，$\mathfrak{h}$ および $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ という 2 つのより小さな構成要素に分けられる．今度は $\mathfrak{h}$ と

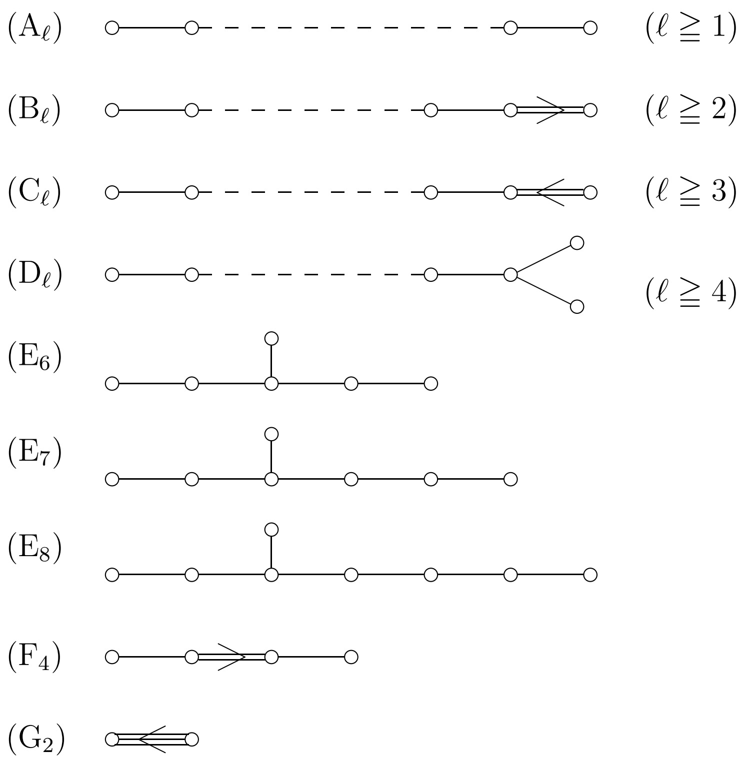


図 1: ディンキン図形

$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ に着目し，これらがイデアルを持てば，また 2 つの構成要素に分ける．これを繰り返すと最後には（$\mathfrak{g}$ が有限次元ならば），$\mathfrak{g}$ はいくつかの最小の構成要素に分けることができる．この最小の構成要素となるようなリー代数を単純リー代数という．1 次元のリー代数（ブラケット積は必然的に恒等的に 0 になる）は当然最小の構成要素になるが，これだけは除外するのが慣用の言葉使いである．従って単純リー代数の正式な定義は次のとおり：次元が 2 以上のリー代数 $\mathfrak{g}$ であって，そのイデアルが $\{0\}$ と $\mathfrak{g}$ のみしかないようなものを単純リー代数と呼ぶ．

はじめに考えるべき問題は，単純リー代数がどのくらいあるかという問題であるが，係数体が複素数体 $\mathbb{C}$ の場合の答は，キリングおよびカルタンにより 100 年以上前から知られており，次のとおり：複素数体上の有限次元単純リー代数は図 1 のディンキン図形と 1 対 1 に対応する[2]．

もう少し詳しく述べると，複素数体上の有限次元単純リー代数があるとき，それからある方法で図形が定まるのだが，こうして得られる図形は図 1 に現れるディンキン図形 $(\mathrm{A}_\ell), \cdots, (\mathrm{G}_2)$ のいずれかに限り，また得られたディンキン図形が同じものになるようなふたつの有限次元単純リー代数は互いに同型である，という

[2]実数体上の有限次元単純リー代数の分類も知られているが，複素数体の場合よりもう少し複雑である．

ことである．

４つの無限系列 $(\mathrm{A}_\ell), (\mathrm{B}_\ell), (\mathrm{C}_\ell), (\mathrm{D}_\ell)$ に対応する単純リー代数は以下のように行列を用いて具体的に書き下すことができる．

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{A}_\ell) & \mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathbb{C}) = \{A \in M_{\ell+1}(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}, \\
(\mathrm{B}_\ell) & \mathfrak{o}_{2\ell+1}(\mathbb{C}) = \{A \in M_{2\ell+1}(\mathbb{C}) \mid {}^tA + A = 0\}, \\
(\mathrm{C}_\ell) & \mathfrak{sp}_{2\ell}(\mathbb{C}) = \{A \in M_{2\ell}(\mathbb{C}) \mid {}^tAJ + JA = 0\}, \\
(\mathrm{D}_\ell) & \mathfrak{o}_{2\ell}(\mathbb{C}) = \{A \in M_{2\ell}(\mathbb{C}) \mid {}^tA + A = 0\}.
\end{array}
$$

ここで $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して，$\mathrm{Tr}(A)$ は行列 A のトレース（対角成分の総和）をあらわす．さらに J は次で定まる行列である：

$$
J = \begin{pmatrix} 0 & -E_\ell \\ E_\ell & 0 \end{pmatrix}
$$

なおブラケット積は，いずれの場合も $[X, Y] = XY - YX$ で定まるものとする．

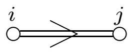
また，残りの５つのディンキン図形 $(\mathrm{E}_6), (\mathrm{E}_7), (\mathrm{E}_8), (\mathrm{F}_4), (\mathrm{G}_2)$ に対応する単純リー代数（例外型単純リー代数と呼ばれる）についても，ケイリー代数やジョルダン代数を用いた具体的記述が知られている．

3　カッツ・ムーディ・リー代数 — ディンキン図形の呪縛は解けるか？

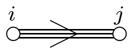
今述べたように，複素数体上の有限次元単純リー代数のうち，４つの無限系列は行列を用いて，また残りの５つの例外はケイリー代数およびジョルダン代数を用いて，具体的に書き下すことができるのであった．しかしこのような個別の作り方以外に，統一的な構成法はないであろうかと考えるのは，自然であろう．

セールは，この方向でのシュバレーおよびハリシュ・チャンドラによる研究をさらに整理して，生成元と基本関係を用いた単純リー代数の統一的構成法を与えた．まずこれについて簡単に述べよう．ディンキン図形の頂点（白丸）に 1 から ℓ までの番号を振って，整数 a_{ij} $(1 \leqq i, j \leqq \ell)$ を次のように定める：$i = j$ のときは $a_{ii} = 2$ とする．$i \neq j$ で頂点 i と頂点 j が線分で結ばれていないときには，$a_{ij} = a_{ji} = 0$ とする．線分で結ばれているときには，図のように a_{ij} を定める．

$\Longrightarrow \quad a_{ij} = a_{ji} = -1$



$\Longrightarrow \quad a_{ij} = -1, a_{ji} = -2$



$\Longrightarrow \quad a_{ij} = -1, a_{ji} = -3$

このようにして定まった正方行列 (a_{ij}) をカルタン行列と呼ぶ．カルタン行列はディンキン図形のもつ情報を数値化したものであるといえる．このとき対応する有限次元単純リー代数 $\mathfrak{g}$ から 3ℓ 個の元

$$\{H_i, E_i, F_i \mid 1 \leqq i \leqq \ell\}$$

をうまく取り出すと，$\mathfrak{g}$ のすべての元はこれらの 3ℓ 個の元を用いて書くことができ，さらにこれらは次の関係式をみたす．

(L1) $[H_i, H_j] = 0 \qquad (1 \leqq i, j \leqq \ell)$,

(L2) $[H_i, E_j] = a_{ij} E_j \qquad (1 \leqq i, j \leqq \ell)$,

(L3) $[H_i, F_j] = -a_{ij} F_j \qquad (1 \leqq i, j \leqq \ell)$,

(L4) $[E_i, F_j] = \delta_{ij} H_i \qquad (1 \leqq i, j \leqq \ell)$,

(L5) $\mathrm{ad}(E_i)^{-a_{ij}+1}(E_j) = 0 \qquad (i \neq j)$,

(L6) $\mathrm{ad}(F_i)^{-a_{ij}+1}(F_j) = 0 \qquad (i \neq j)$.

ここで $X \in \mathfrak{g}$ のとき $\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は $(\mathrm{ad}(X))(Y) = [X, Y]$ で定まる線形写像である．セールが示したのは，$\mathfrak{g}$ において成立する関係式はどのようなものであれ，実は上に挙げた (L1), . . . ,(L6) の帰結として得られるものになっている，ということである．言い換えると，ディンキン図形 に対応する単純リー代数 $\mathfrak{g}$ は，$\{H_i, E_i, F_i \mid 1 \leqq i \leqq \ell\}$ を生成系とし (L1), . . . ,(L6) を基本関係式とするリー代数として，一意的に定まるのである．

100 年以上前のキリング，カルタン以来現在に至るまで，複素数体上の有限次元単純リー代数に関しては，その表現論を中心に，さまざまな美しい理論ができあがっているが，それらは（少なくとも原理的には）ディンキン図形あるいはカルタン行列だけから定まる関係式 (L1), . . . ,(L6) のみを出発点として，展開することができるのである．

さて，ここで一旦 “ディンキン図形の呪縛” を解いて，発想の転換を行う．図 1 のディンキン図形に限らない一般の図形を考えると，それから定まる “一般カルタン行列” に対しても，$\{H_i, E_i, F_i \mid 1 \leqq i \leqq \ell\}$ を生成系とし (L1), . . . ,(L6) を基本関係式とするリー代数を考えることができる．こうしてできるリー代数はもはや有限次元ですらないが，それでも，有限次元単純リー代数に関して成立していた多くの美しい理論が，このクラスの無限次元リー代数まで自然に拡張できるのである．これが，1960 年代半ばにカッツとムーディにより独立に導入されたカッツ・ムーディ・リー代数である．[3]

[3]カッツとムーディがディンキン図形を一般の図形に置き換えるという単純な発想から出発したのか，あるいはもっと別の動機があったのかどうか，私は知らない．

成立当初は，このような拡張は拡張のための拡張であって，どちらかといえば人工的な対象なのではないかという見方をする向きもあったようであるが，その後，数理物理等を中心にさまざまな応用がみつかり，現代数学における一つの中心として，確固たる位置を占めるようになった．

無限次元カッツ・ムーディ・リー代数のうちの最も重要なクラスであるアフィン・リー代数について簡単に説明しておこう．アフィン・リー代数には，ひねりのないものとひねりの入ったものの２種類があるのだが，ここでは簡単のためにひねりのはいっていない非ツイスト型アフィン・リー代数についてのみ述べる．非ツイスト型アフィン・リー代数は，有限次元単純リー代数と 1 対 1 に対応して定まる．$\mathfrak{g}$ を複素数体上の有限次元単純リー代数とする．複素係数のローラン多項式 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n$ (有限和) の全体のなすローラン多項式環 $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ まで $\mathfrak{g}$ を係数拡大して，$\mathfrak{g}[t,t^{-1}]$ を考える．これを $\mathbb{C}$ 上の無限次元リー代数とみるとき，その 1 次元の中心拡大として，リー代数

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[t,t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$$

が定まる．例えば $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ なら，

$$\mathfrak{g}[t,t^{-1}] = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{C}[t,t^{-1}], a+d=0 \right\}$$

であり，従って $\mathfrak{g}[t,t^{-1}]$ の元は $\sum_{n\in\mathbb{Z}} t^n X_n$ $(X_n \in \mathfrak{g})$ の形の有限和に一意的に表される．このとき $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[t,t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$ は，ブラケット積

$$[(\sum_{n\in\mathbb{Z}} t^n X_n) + ac, (\sum_{n\in\mathbb{Z}} t^n Y_n) + bc] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} t^n (\sum_{k+\ell=n} [X_k, Y_\ell]) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} n \operatorname{Tr}(X_n Y_{-n}) c$$

によりリー代数になる．

$\mathfrak{g}$ のディンキン図形に頂点をもう一つ加えて自然に定まる，ディンキン図形の親玉のような図形（拡大ディンキン図形と呼ぶ）があるのだが，実は $\tilde{\mathfrak{g}}$ はこの拡大ディンキン図形に対応するカッツ・ムーディ・リー代数であることが分かる．これをアフィン・リー代数と呼ぶ．アフィン・リー代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ は有限次元単純リー代数 $\mathfrak{g}$ を使って具体的にかけてしまうので，カッツ・ムーディ・リー代数だなんだと大仰なことを言わなくてもいいような気もするかも知れないが，重要なのは，有限次元単純リー代数 $\mathfrak{g}$ を用いて具体的に書けるリー代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ が，実は (L1), . . . ,(L6) の形の新たな生成元と基本関係式による表示をもつということである．

なお先ほど「ディンキン図形の呪縛を解いて」と述べた．確かに，さまざまな一般論は一般の図形に対応するカッツ・ムーディ・リー代数というクラスで成り立つ（あるいはこのクラスで理論展開するのがふさわしい）のであるが，実際の応用が知られているのは，実はほとんど全部が，拡大ディンキン図形に対応するア

フィン・リー代数についてのみであり，その意味で，我々はまだ“ディンキン図形の呪縛”から解き放たれているわけではない．

歴史の常であるが，カッツ・ムーディ・リー代数，特にアフィン・リー代数は，それ自身が主役として登場する以前から，現代数学史のところどころにその片鱗をとどめていることが，後になってみるとわかる．そのうちの幾つかについて述べよう．

初めの例は，p 進体上の代数群に関するものである．本稿の初めにリー群の例として $O_n(\mathbb{R})$ を挙げたが，実数体 $\mathbb{R}$ を別の体 $\mathbb{K}$ に変えることにより，

$$O_n(\mathbb{K}) = \{g \in M_n(\mathbb{K}) \mid {}^t g g = E_n\}$$

という群を考えることができる．このようにリー群の場合の実数体 $\mathbb{R}$ を一般の体 $\mathbb{K}$ で置き換えて得られる群を，$\mathbb{K}$ 上の代数群と呼ぶ．特に $\mathbb{K}$ が，p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ や，有限体 $\mathbb{F}_p$ 上のべき級数体 $\mathbb{F}_p((t))$ のような p 進体と呼ばれる体の場合の代数群は，いろいろな面から特に重要な対象であり，以前から多くの研究がなされてきている．べき級数体 $\mathbb{F}_p((t))$ の場合，有限体 $\mathbb{F}_p$ を $\mathbb{C}$ で置き換えて，さらにべき級数とローラン多項式を同じようなものだと思ってしまえば，べき級数体 $\mathbb{F}_p((t))$ 上の代数群とアフィン・リー代数は似たもの同士であるという見方が成立する．従って，p 進体上の代数群の理論の中にカッツ・ムーディ・リー代数的なものの見方が現れていても不思議はないであろう．実際，p 進体上の代数群の重要な部分群として岩堀部分群と呼ばれるものがあるが，カッツ・ムーディ・リー代数の立場からみると，これはボレル部分代数の類似物であり，非常に自然なものであることがはっきりする．[4]

もう一つ例をあげておこう．この話題はカッツ・ムーディ・リー代数の創生期に，その重要性を強力にアピールする宣伝係の役割を担ったものである．関数 $\varphi(x)$ を

$$\varphi(x) = \prod_{m=1}^{\infty}(1 - x^m)$$

で定める．これに関して昔からよく知られている公式として

$$\varphi(x)^3 = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)x^{m(m+1)/2} \qquad \text{（ヤコビの３重積公式）}$$

がある．これは（無限積）＝（無限和）の形をしていることに注意されたい．1970年代初頭にマクドナルドは，複素数体上の有限次元単純リー代数 $\mathfrak{g}$ ごとに，無限積 $\varphi(x)^{\dim \mathfrak{g}}$ を無限和の形に書き下す公式を与えた（$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の場合がヤコビの３重積公式にあたる）．これが有名なマクドナルド恒等式である．有限次元単純

[4]岩堀部分群は代数群ではないので，当初はその意義について疑問視する人もいたという話を，岩堀長慶先生に伺ったことがある．

リー代数に関して，分母公式と呼ばれる（有限積）＝（有限和）の形の公式があるが，マクドナルドはその“アフィン類似”として（無限積）＝（無限和）の形の“アフィン分母公式”を与え，これを特殊化することによりマクドナルド恒等式を得たのであった．ただしアフィン分母公式の無限積サイドには，有限次元リー代数のみをみていたのでは意味の分からない，いわゆる“ミステリアス因子”というものが含まれていたのであった．ところが，その後分母公式がカッツ・ムーディ・リー代数まで拡張されてみると（カッツによる），アフィン・リー代数の分母公式はまさにマクドナルドのアフィン分母公式そのものであり，ミステリアス因子の意味もアフィン・リー代数の立場からごく自然なものであることがわかったのである．なおマクドナルド恒等式に関しては，著名な物理学者ダイソンによる読み物“missed opportunities” [5]を読まれるとおもしろいと思う．「見逃してしまった好機」と呼べる歴史上のエピソードが幾つか述べられているのだが，その最初の話題は，ダイソン本人がマクドナルド恒等式の一歩手前まで近づきながらこれを見逃してしまった経緯に関するものである．

アフィン・リー代数の応用として当初喧伝されたのは，上に述べたマクドナルド恒等式の場合と同様の，指標公式の特殊化によるさまざまな恒等式の導出が主であった．しかし，伊達悦朗・神保道夫・柏原正樹・三輪哲二によるソリトン型方程式の研究にみられるように，アフィン・リー代数そのものが無限可積分系の無限小変換群として捉えられるようになって以後は，数理物理等の分野における基本的な道具としてのアフィン・リー代数の役割が，確立したのであった．

4　量子群 — リー代数の枠組みを越えて

量子群はカッツ・ムーディ・リー代数のひとつの q 変形であり，1985 年頃神保道夫とドリンフェルトにより独立に導入された．それはもはやリー代数ではなく，正確に言えばリー代数の包絡代数の q 変形として得られる結合代数である．

ともかくその定義を述べよう．(a_{ij}) を一般カルタン行列とし，$\{H_i, E_i, F_i \mid 1 \leqq i \leqq \ell\}$ を生成系とし (L1), . . . ,(L6) を基本関係式として定まるカッツ・ムーディ・リー代数を $\mathfrak{g}$ で表す．$\mathfrak{g}$ の包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ は，複素数体 $\mathbb{C}$ 上の結合代数であり，それは $\{H_i, E_i, F_i \mid 1 \leqq i \leqq \ell\}$ を生成系とし，関係式 (L1), . . . ,(L6) に現れるブラケット積 $[X, Y]$ をすべて交換子積 $XY - YX$ で 置き換えて得られる式を結合代数としての基本関係式として定まるものである．量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ は，この $U(\mathfrak{g})$ の q 変形であるが，簡単のために一般カルタン行列 (a_{ij}) が対称行列の場合にのみ，その定義を述べる[6]．対称一般カルタン行列 (a_{ij}) に付随する量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ とは，変数 q に関する有理関数体 $\mathbb{C}(q)$ 上の結合代数であって，4ℓ 個の元 $\{k_i, k_i^{-1}, e_i, f_i \mid 1 \leqq i \leqq \ell\}$ を

[5]Bulletin of the American Mathematical Society **78**(1972) 635–652.

[6]雰囲気をつかむにはこの場合だけで十分であろう．詳しくは，神保道夫「量子群とヤン・バクスター方程式」（シュプリンガー・フェアラーク東京）などを参照されたい．

生成系とし，以下の (Q1), . . . ,(Q6) を基本関係式として定まるもののことである：

(Q1) $k_i k_i^{-1} = k_i^{-1} k_i = 1 \qquad (i = 1, \dots, \ell), \qquad k_i k_j = k_j k_i \qquad (1 \leqq i, j \leqq \ell)$,

(Q2) $k_i e_j k_i^{-1} = q^{a_{ij}} e_j \qquad (1 \leqq i, j \leqq \ell)$,

(Q3) $k_i f_j k_i^{-1} = q^{-a_{ij}} f_j \qquad (1 \leqq i, j \leqq \ell)$,

(Q4) $e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{k_i - k_i^{-1}}{q - q^{-1}} \qquad (1 \leqq i, j \leqq \ell)$,

(Q5) $\sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \left[\begin{smallmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{smallmatrix}\right] e_i^m e_j e_i^{1-a_{ij}-m} = 0 \qquad (i \neq j)$,

(Q6) $\sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \left[\begin{smallmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{smallmatrix}\right] f_i^m f_j f_i^{1-a_{ij}-m} = 0 \qquad (i \neq j)$.

ここで $\left[\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix}\right]$ は２項係数 $\binom{m}{n}$ の q 類似であり，２項係数 $\binom{m}{n}$ の定義

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n(n-1)\cdots 1}$$

に現れる自然数 k をすべてその q 類似

$$[k] = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}} = \sum_{r=1}^{k} q^{k+1-2r}$$

で置き換えて

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \frac{[m][m-1]\cdots[m-n+1]}{[n][n-1]\cdots[1]}$$

により定まるものである．関係式 (Q1), . . . ,(Q6) において形式的に

$$q = \exp(\hbar), \quad k_i^{\pm 1} = \exp(\pm \hbar H_i), \quad e_i = E_i, \quad f_i = F_i$$

とおいて，$\hbar \to 0$ （従って $q \to 1$）の極限を考えると，これがリー代数（の包絡代数）の関係式 (L1), . . . , (L6) に一致している．この意味で，量子群はカッツ・ムーディ・リー代数の包絡代数の q 変形であるという言い方をする．

定義はひととおり分かってもらえたのではないかと思うが，有限次元単純リー代数からカッツ・ムーディ・リー代数へという，言われてみれば誰でも思いつきそうな拡張に比べると，なぜカッツ・ムーディ・リー代数のこのような変形を考えたのかと言うことは，その定義からは自明でない．実際，神保，ドリンフェルトはともに数理物理における可解モデルの研究からヒントを得て量子群に至ったようであり，この辺のことは筆者のような物理のことのわからない純粋数学者（ ?? ）

にはその動機の説明をする能力はない[7]．むしろ 1985 年当時の筆者には，量子群は遠い星の世界から舞い降りてきた宇宙人のように見えたことを記しておこう．

量子群の研究は，その誕生のいきさつからして当然であるが，可解モデルの研究などの数理物理への応用が先行した．そこで特に重要だったのは，量子群から生ずる R 行列の理論であった（R 行列は，数学的には，量子群のホップ代数としての非余可換性との関連で理解するのが自然である）．

柏原正樹は可解モデルの絶対零度での振る舞いに対応して，量子群の $q \to 0$ の極限を考察し，量子群の表現の $q = 0$ （絶対零度）での基底（結晶基底）を導入し，またさらにこれを "溶かす" ことにより q が一般での大域基底を導入した．この結晶基底・大域基底は量子群のみならずカッツ・ムーディ・リー代数の表現論でも重要な役割を果たすようになった．一方リンゲルは，有限体上での箙（えびら）の表現に関してある種の合成積を用いてホール代数を考え，これから量子群の関係式が得られることを示した．ルスティックはこの観点をさらに推し進め，箙の表現の幾何学的考察から，量子群の標準基底と呼ばれるものを導入した．柏原の大域基底とルスティックの標準基底は，ほぼ同時期に独立に，しかも全く異なる発想の下で導入されたものであるが，後にこれらは同じものであることが判明した．[8]

最後にもう一言だけ余計なことを付け加えるのをお許しいただこう．10 年ほど前のある晩のことであった．１日中量子群に関する計算をしていた男が，まだ頭の何処かでちらちらと踊っている計算式を追い出すために，日本酒の助けを借りつつぼんやりしていたところであった．

男はふと思う．

「もしも数理物理からの影響がなかったとしたら，数学の世界の住人は量子群にたどり着くことはなかったのだろうか？」

量子群研究のこれまでの発展経過を振り返ってみた男は，物理を経由せずに数学から直接量子群にたどり着ける道として，箙の表現論経由のパスがあることに気づくのだった．

「リンゲルが箙の表現の合成積から量子群の関係式を導いたのは，量子群が世に出た後だったが，それがもっと早ければ量子群は数学の中で見つかっても不思議はなかったのだ」

ここで男は，はっとして思い出すのだった．かつて箙の表現論とリー代数の直接的な関係を見いだそうと夢見た学生時代の日々があったことを．また，もう少し後のＫ氏との共同研究において，旗多様体の合成積を日常的に使っていた日々があったことを．80 年代前半の自分にとっては，箙の表現論も合成積もどちらも

[7]物理的発想から数学的に重要な対象が生まれ，その数学的研究の進展とともに，出発点の物理や近隣数学諸分野への影響を与えつつ研究が展開し新たな分野が生まれたりするということは，今述べた可解モデルと量子群の場合のみならず，最近ほかにも多くみられるが，２１世紀の数学（と物理）のあり方を示唆するもののひとつであろう．

[8]同じものにふたつの名前が付いているのは感じがよくない．そこで私はこれを勝手に，単純自己双対基底と呼ぶことにしている．

ごく身近な存在だったのだ.

「もしもその頃の自分が，箙の表現で合成積を考えてみようとしていたら … 」

男は，以前自分が書いた草場公邦著「行列特論」の書評[9]の一節を思い出しながら，呟くのだった.

「これは自分にとっての “missed opportunity” なのだろうか？」

[9]数学 36 巻 (1983) 87–88