可述算術の世界

鈴木佑京

2015 年 2 月 22 日

0　イントロダクション

0.1　今日の目的

- エドワード・ネルソンの可述算術を紹介する。
- 可述算術の（私にとっての）興味深さを説明する。
- （ネルソンの議論の検討は行わない。）

0.2　Edward Nelson(1932-2014)

- 数理物理学・確率論・数学基礎論に業績あり
- 2011 年にペアノ算術の矛盾を”発見”（後に訂正）
- 強い改訂主義的哲学にもとづき可述算術を提案、のちの限定算術の研究に影響を与える

0.3　可述算術とは？

- 古典的算術（ex. ペアノ算術）に対するオルタナティブ
- 直観主義算術よりも遥かに弱い、有限主義算術よりも弱い
- 数学的帰納法が使えない
- 形式的に定式化できるが、形式的に公理化できない（形式体系ではない！）
- 指数関数が使えない（全域性を証明できない）

0.4　今日の目次

1. 可述算術の哲学的背景
2. 可述算術の数学的展開
3. 非改訂主義的視点からの可述算術の興味

1　可述算術の哲学的背景

注：ネルソンの立場に同意する必要はない！可述算術には、哲学から独立した数学的内容がある。その極端さを面白がるのがおすすめ。

1.1 歴史的背景

1.1.1 実在論・構成主義・形式主義

数学的命題の意味論、及び数学的対象・事実の形而上学について、三つの大きな捉え方がある（三つしかないわけではない）。

三つの捉え方のどれかが特権的に正しく、数学的活動を支配すると考えると、いわゆる基礎づけ論争が始まる。

表 1　三つの立場

レッテル	数学的命題の意味	数学的対象の存在	理論の正当化
実在論	意味がある	独立	真であるべき
構成主義	意味がある	人間に依存	真であるべき
形式主義	意味は無い（or どうでもいい）	否定（or どうでもいい）	無矛盾であればいい

実在論（プラトン？ゲーデル？）

- 数学的対象や数学的事実は人間（認識、行為、心的活動 etc.）から独立して存在する。
- 数学的命題は独立して存在する数学的対象について数学的事実を語る。
- 数学的命題は人間（認識、行為、心的活動 etc.）から独立して真偽を持つ。
- たいてい、古典数学に結び付けられる。

構成主義

- 数学的対象や数学的事実は人間（認識、行為、心的活動 etc.）が構成することによって存在する。
- 数学的命題は人間に依存する数学的対象について数学的事実を語る。
- 数学的命題は人間（認識、行為、心的活動 etc.）に依存して真偽を持つ。
- 「構成」の内実によっていくつか立場が別れ、それぞれ異なる数学理論に結びつく。

（強い）形式主義（ハスケル・カリー）

- 数学的命題は意味を持たず、何についても語らない（or 数学的命題の持つ意味は数学的活動にとって本質的ではない）。
- 従って数学的命題は普通の意味での真偽を持たない（or 数学的活動にとって数学的命題の真偽は意味を持たない）。
- 数学的活動の本質は、公理系の中で数学的命題に証明を用意することだけにあり、これはルールに従った記号操作にすぎない。
- 数学的対象や数学的事実といったものは存在しない（or 存在しようがしまいがどうでもよい）
- 無矛盾でさえあればどんな数学的理論も OK

1.1.2 構成主義の諸派

いろいろある。ブラウワー的直観主義（ブラウワー・ハイティンク）、ビショップ流構成的数学（ビショップ）、型理論的構成主義（マルティン＝レーフ）、証明論的構成主義（ダメット・プラヴィッツ）、帰納的数学（マルコフ）、可述主義（ワイル）、有限主義（ヒルベルト・スコーレム）、超有限主義（ファン＝ダンツィヒ・エセーニン＝ヴォルピン）など…

可述主義

- 隠伏的循環性を含む非可述な定義を拒否

非可述な定義とは？→定義されるところのものを含む総体に対する言及を含んでいるような定義。Ex.) リシャールのパラドクス、実数の最小上界

非可述な定義は、構成主義的には認めがたい。なぜなら、数学的対象は定義によって初めて構成されるのに、これから構成されようとするその当の数学的対象に暗黙的に言及することが、悪性の循環であるからである。

- 自然数論については古典数学と同様、全面的な帰納法の妥当性と排中律を認める。

超有限主義

- 「有限主義より弱い構成主義」を雑多に放り込むおもちゃ箱に近い
- 現実的に計算できるかどうかを重視
- 自然数列の一意性を拒否
- 原始再帰関数の全域性を拒否（特に、指数関数）
- ほとんど形式的な研究がなく、具体的にどの程度の算術に当たるか不明

ネルソンの立場は、哲学的には形式主義、可述主義を受け継ぎ、算術的な強さとしては、超有限主義に近いものになっている。

1.2　ネルソンの哲学——形式主義と構成主義

ネルソンの哲学的議論は基本的に、数学的帰納法の妥当性を批判し、帰納法を使わない算術を擁護するものである。

ネルソンの哲学的文章には、形式主義に基づいて書かれたもの [12][10] と、構成主義に基づいて書かれたもの [9][13][15] の二つがある。

両者がどのように関係しているのかは不明確だが、発表者の考えでは、

- 数学にとって数学的命題の意味は非本質的であり、形式体系が無矛盾であればそれでよい（形式主義）が、
- あえて意味や真偽を云々するなら、構成主義的な捉え方を取るべきである（構成主義)。

というのがネルソンの立場であるように思われる。

以上に対応して、ネルソンの議論は、

- 意味を持つ推論原則としての数学的帰納法が妥当とは言えないことを言うもの
- 形式的規則としての数学的帰納法が矛盾を引き起こす懸念があることを言うもの

の二つがある。

1.2.1　数学的帰納法の妥当性を疑う—非可述性の批判

数学的帰納法の妥当性を批判するネルソンの議論は、少なくとも 4 つの種類がある。ここでは、代表的なもっとも代表的な二つを紹介する。

数学的帰納法に対する擁護：

自然数概念は、1）0 を含み、2）後続者関数で閉じ、3）任意の性質について、数学的帰納法が妥当であるようなものとして定義されている。Ex.) フレーゲの構成

そのため、数学的帰納法は、自然数の定義から妥当である。

ネルソンの批判 [9]：

上記の自然数の定義は、非可述性を含んでいる。

上記の自然数の定義においては、「任意の性質について数学的帰納法が成り立つ」という条項が含まれる。しかし、「任意の性質」には、自然数概念を使って定義されるような性質が含まれる（「1 から n までの任意の数で割れるような数が存在する」など)。つまり、自然数概念に対する暗黙的な言及がこの定義においてなされており、ここに非可述性がある。

Cf.) 通常の可述主義は、自然数のシステム自体は与えられたものとして前提する。

1.2.2 数学的帰納法の妥当性を疑う—循環性の批判 [10][15]

数学的帰納法は、原始再帰関数が有限ステップで計算可能であることを証明できる。

しかし、原始再帰関数が停止することを示す証明は循環している。なぜなら、そのような証明は、与えられた引数に対して関数の計算が具体的に何ステップで終了するのかを提示しなければならないはずだが、その際に、当の原始再帰関数を使わなければ提示できないからである。

たとえば、指数関数↑の計算が停止することを示す上で、a,b が与えられたとき、a ↑ b の計算が精々何ステップで終了するかと聞かれれば、a ↑ b ステップと答えるしかない。しかし、この答えが正当な答えであるためには、a ↑ b が自然数を指示すること、つまり a ↑ b の計算が停止することが前提されている必要がある。つまり、循環的な証明しかできない。

このような循環的な証明しかできないことがらまで証明してしまう数学的帰納法は不当である。

発表者のコメント：この批判は、原始再帰関数の停止性の証明について、BHK 解釈を当てはめることを前提とすれば正しい（「ある有限ステップについて…」を証明するために、具体的に何ステップなのかを示さなければならない)。しかし、BHK 解釈を取るのであれば、古典論理ではなく直観主義論理を使うべきである。ネルソンは可述算術の展開において古典論理を使っているので、この批判とは緊張関係がある。

1.2.3 数学的帰納法の無矛盾性を疑う [15]

- 不完全性定理により、ペアノ算術の無矛盾性は有限的に示せないのに対して、ロビンソン算術の無矛盾性は有限的に示すことができる。
- 標準モデルの存在に基づくペアノ算術の無矛盾性証明は、検証不可能な信仰に過ぎない [11]。
- 前節で述べたように、ペアノ算術を意味を持つ公理系として正当化することができない。

1.2.4 可述算術へ

以上の議論に基づきネルソンは、ペアノ算術やハイティンク算術、原始再帰的算術のような、帰納法を含む公理系は自然数論として不適格であると考える。

そこで、帰納法を含まない算術の公理系であるところの、ロビンソン算術に基づいて算術を展開しようとする。

2 可述算術の数学的展開

ネルソンの抱える数学的問題はこれ。

問題 1 数学的帰納法の正当性を前提せずに, トリヴィアルでない自然数論を展開することはできるか？

問題 1 に対するネルソンの解答が可述算術 *1。

2.1 出発点としてのロビンソン算術

まず出発点として, ロビンソン算術 Q を拡大した体系 Q' を取る．論理は古典述語論理とする．Q, Q' の言語 LA は, 非論理的な記号として, 定項 0, 一項関数記号 S, P, 二項関数記号 $+, \times$, 二項関係記号 $\leq$ を含む.

定義 1 次の式のうち, Ax.0-Ax.7 からなる理論をロビンソン算術 Q という．Ax.0-Ax.12 からなる理論を Q' という．Q に, $Ind_{A(x)}$「$(A(0) \wedge \forall x(A(x) \to A(Sx))) \to \forall x A(x)$」という形式の式をすべて公理として加えたものをペアノ算術 PA という．

*1 以下の内容は全て [9] をもとにしている。なお [2] をまとめ方の参考にした。

- Ax.0 $Sx \neq 0$
- Ax.1 $Sx = Sy \to x = y$
- Ax.2 $x + Sy = S(x + y)$
- Ax.3 $x + 0 = x$
- Ax.4 $x \times Sy = x \times y + x$
- Ax.5 $x \times 0 = 0$
- Ax.6 $Px = y \leftrightarrow Sy = x \vee (x = 0 \wedge y = 0)$
- Ax.7 $x \leq y \leftrightarrow \exists z x + z = y$
- Ax.8 $(x + y) + z = x + (y + z)$
- Ax.9 $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$
- Ax.10 $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$
- Ax.11 $x + y = y + x$
- Ax.12 $x \times y = y \times x$

Q の公理は、数学的帰納法も、数学的帰納法に訴えなければ正当化できない命題も含んでいないので、ネルソンの立場からしても問題はない。

一方, Q' には問題がある（Ax.8-Ax.12)。だが、これは、これから紹介するある“トリック”を応用して, 正当化することができる前提である。なのでとりあえず、Q' は可述的に受け入れることができる理論であることにし、これを出発点とする。

2.2 相対化による帰納法

論理式 $F(x)$ を, $F(x) \equiv \exists z(2 \times z = x \times Sx)$ として定義する。

$\forall x F(x)$ を Q' で示すことができない. $F(0)$ と $F(x) \to F(Sx)$ は Q' で簡単に示せる. しかし数学的帰納法は公理にない. $\forall x F(x)$ を可述的に認めることは, 諦めるしか無いのだろうか.

2.2.1 ネルソンのトリック

- 全ての数について F が成り立つ, ということを示すことができない。
- 発想を逆転して、逆に, F が成り立つものを数と呼ぶことにすればいいのではないか？自然数の概念を改訂すればよいのでは？

式の相対化を次のように定義する.

定義 2 自由変数が一つしか含まれない式を一項論理式と言う.

定義 3 一項論理式 $C(x)$ があるとき, A の $C(x)$ による相対化 $A_{C(x)}$ とは, A における量化子の出現 $\forall x B(x), \exists x B(x)$ を, すべて $\forall x(C(x) \to B(x)), \exists x(C(x) \wedge B(x))$ に置き換えたものとする.

$Q'[\forall x F(x)]$ を, 量化のドメインを $F(x)$ に相対化することによって（ここが, 自然数概念を 自然数$_0$ から 自然数$_{F(x)}$ に改訂していることにあたる）, Q' の中で解釈する.

定義 4 LA の自由変数について適当に自然数を対応させ順序を付けておく. 任意の一項論理式 $C(x)$ と, 任意の式 A について, A に含まれる全ての自由変数をこの順序で並べた列 $x_0, x_1, ..., x_n$ を取ったとき, $C(x_0) \wedge C(x_1) \wedge ... \wedge C(x_n)$ を $C(freeA)$ と書く.

問題 2 次を示せ. 任意の LA の式 A について,
$Q'[\forall x F(x)] \vdash A \Rightarrow Q' \vdash F(freeA) \to A_{F(x)}$

一旦これが示せれば , $Q'[\forall x F(x)]$ における定理は解釈によってすべて Q' の定理でもあるわけだから, $Q'[\forall x F(x)]$ を新しい理論として採用し, この中で算術を展開してよい. つまり, $\forall x F(x)$ を認めることができる。

2.2.2 相対化図式

このアイデアはしかし, すぐには実行できない.

1. Q' における $F(x)$ が 0 を含み, 後続者関数・足し算・掛け算で閉じていなければならない.
2. $Q'[\forall x F(x)]$ の一部である Q' の公理が, ドメインを $F(x)$ に相対化してもちゃんと成り立たなければならない。
3. $\forall x F(x)$ が, 量化のドメインを $F^3(x)$ に相対化して Q' で解釈しても成り立たなければならない。

最初の二つは次の定義と定理で一気に解決できる.

定義 5 相対化図式 一項論理式 $C(x)$ に対して, $C^1(x), C^2(x), C^3(x)$ を次のように定義する.

- $C^1(x) \equiv \forall y(y \leq x \to C(y))$
- $C^2(x) \equiv \forall y(C^1(y) \to C^1(y+x))$
- $C^3(x) \equiv \forall y(C^2(y) \to C^2(y \times x))$

定理 1 $Q' \vdash C(0) \wedge \forall x(C(x) \to C(Sx))$ のとき, 次が Q'の定理となる.

- $C^3(x) \to C(x)$
- $(C^3(x) \wedge y \leq x) \to C^3(y)$
- $C^3(0) \wedge \forall x(C^3(x) \to C^3(Sx))$
- $C^3(x) \to C^3(Px)$
- $(C^3(x) \wedge C^3(y)) \to (C^3(x+y) \wedge C^3(x \times y))$
- $(C^3(x) \wedge C^3(y)) \to (x \leq y \leftrightarrow \exists z(C^3(z) \wedge x+z=y))$

証明 Q' の中で次を順番に証明していく.

1. $C^1(x) \to C(x)$
2. $(C^1(x) \wedge y \leq x) \to C^1(y)$
3. $C^1(0) \wedge \forall x(C^1(x) \to C^1(Sx))$
4. $C^2(x) \to C^1(x)$
5. $(C^2(x) \wedge y \leq x) \to C^2(y)$
6. $C^2(0) \wedge \forall x(C^2(x) \to C^2(Sx))$
7. $(C^2(x) \wedge C^2(y)) \to C^2(x+y)$
8. $C^3(x) \to C^2(x)$
9. $C^3(x) \to C(x)$
10. $(C^3(x) \wedge y \leq x) \to C^3(y)$
11. $C^3(0) \wedge \forall x(C^3(x) \to C^3(Sx))$
12. $C^3(x) \to C^3(Px)$
13. $(C^3(x) \wedge C^3(y)) \to (C^3(x+y) \wedge C^3(x \times y))$
14. $(C^3(x) \wedge C^3(y)) \to (x \leq y \leftrightarrow \exists z(C^3(z) \wedge x+z=y))$(証明終)

$F(x)$ のケースでは, 三つ目の問題点もクリアできる.

定理 2 $Q' \vdash F^3(x) \to F(x)_{F^3(x)}$
証明 以下を元に Q' の証明を構成する. $F(x)_{F^3(x)}$ を書き下すと次のようになる. $\exists z(F^3(z) \wedge 2 \times z = x \times Sx)$. $F^3(x)$ を仮定する. すると定理 1 より, $F(x)$. つまり, $2 \times z = x \times Sx$ なる z が存在する. だが, 定理 1 より, $F^3(x), F^3(Sx), F^3(x \times Sx). z \leq x \times Sx$ なので, $F^3(z)$. よって, $(F^3(z) \wedge 2 \times z = x \times Sx)$ なる z が存在する. つまり, $F(x)_{F^3(x)}$. (証明終わり)

定理 3 任意の LA の式 A について, $Q'[\forall x F(x)] \vdash A \Rightarrow Q' \vdash F^3(freeA) \to A_{F^3(x)}$

証明 次の二つを証明すればよい.

- 任意の式 A, A' について, A から古典述語論理で A' が帰結するなら, $F^3(freeA) \to A_{F^3(x)}$から $F^3(freeA') \to A'_{F^3(x)}$ が古典述語論理で帰結する.
- $Q'[\forall x F(x)]$ の任意の公理 A について, $Q' \vdash F^3(freeA) \to A_{F^3(x)}$

前者は定理 1, 後者は定理 1 と 2 から直ちに帰結する. (証明終わり)

従って, 自然数概念を 自然数$_{F(x)}$ に改訂し, $Q'[\forall x F(x)]$ を新しい理論として採用して, $\forall x F(x)$ を認めることができる。

F^3 の定義には, 非可述性は全く含まれていないことに注意。

2.3 可述算術の展開方法

現在の理論が T だとする. このとき,

1. 帰納法で示したい式 $\forall x C(x)$ があるとする.

   だが帰納法は使えないので, 代わりに以下のステップを踏み, 理論の方を強める.
2. C を C^3に強める.
3. $T[\forall x C(x)]$ の任意の公理 A について, $T \vdash C^3(freeA) \to A_{C^3(x)}$ を示す. 特に, $T \vdash C^3(x) \to C(x)_{C^3(x)}$ を示す. **(このステップが実行できるかどうかは C に依存する！)**
4. $T[\forall x C(x)]$ を, ドメインを C^3によって相対化し,T で解釈する.
5. $T[\forall x C(x)]$ を新しい理論として採用する.

Q' から初めて, 1 から 5 を繰り返すことによって, どんどん理論を強めていく. どれだけ理論を強めていっても, 最終的には Q' で解釈できるので, 可述的に認められない部分はない. 帰納法によって示したい事実を、自然数概念を改訂することによって, 認めていく。

ちなみに, 1-5 を応用すれば, Q' を Q で解釈することができる.

2.4 可述算術でできること・できないこと

2.4.1 できること

- 限定帰納法（bounded induction)。
- 有限自然数列のコーディングと、一定範囲のメタ数学（定理 3 を含む)。
- 一定範囲の解析。

定義 6 任意の式 A について, A の任意の量化子の出現が $\forall x(x \leq t \to B(x)), \exists x(x \leq t \wedge B(x))$ という形式をしている時, A を明示的に縛られた式 manifestly bounded formula と言う. ただし, t は x を含んではならない.

定義 7 任意の式 A, と任意の変数 x について, A の自由変数のうち x を除いたものを定義 4 の順序で並べた変数列を $x_0, ..., x_n$ とするとき, $\forall x_0 \forall x_1 ... \forall x_n A$ を $A_x(x)$ と書く.

定義 8 LA の任意の明示的に縛られた式 $B(x)$ に対して, 次の式を $BI_{B(x)}$ と呼ぶ.

$BI_{B(x)} \equiv (B_x(0) \wedge \forall x(B_x(x) \to B_x(Sx))) \to B(x)$

定理 4 Q' に, 任意の明示的に縛られた式 $B(x)$ について $BI_{B(x)}$ を付け加えたものを Q_1 と呼ぶ. $D_0, ..., D_n$ が Q_1 の定理であるとき, Q' に $D_0, D_1, ..., D_n$ を付け加えた理論 $Q'[D_0, D_1, ..., D_n]$ は, Q' において, 適当な式による相対化で解釈できる.

2.4.2 できないこと

- 指数関数の全域性
- 指数関数に対する相対化図式
- 述語論理のカット除去

2.4.3 形式化

問題 2 可述的に認めることができる, つまり Q で解釈できるようなどんな理論 T よりも強く, かつそれ自体可述的に認めることができるような理論 PR が存在しないだろうか.

もし存在するのであれば, 段階を踏んで理論を強くしていくというステップを踏む必要はなく, この PR の中で算術を展開すればそれでよい。

問題 3 $Q[A], A[B]$ が Q で解釈可能であるような任意の式 A, B について, $Q[A \wedge B]$ も Q で解釈可能か？

これはネルソンが [9, Ch. 15] で提起した問題だが, ソロヴェイによって否定的に解かれた [2]. 従って, $Q[A], Q[B]$ が Q で解釈可能だが, $Q[A, B]$ は Q で解釈できないような A, B が存在する。

そのため PR は存在せず、可述算術は本質的に非形式的である。

3 非改訂主義的視点からの可述算術の興味

3.1 証明のパラドクス

ダメットの「推論のパラドクス」[4]
論理的推論の妥当性と有用性をどう説明するか？

- 妥当性を説明するためには、結論と前提の間に概念的距離がないことを言う。
- 有用性を説明するためには、結論と前提の間に概念的距離があることを言う。

この問題を数学的証明に当てはめてみよう。

- 数学的証明が妥当であるためには、公理系と定理の間に概念的距離がないことを言わねばならない。
- 数学的証明が有用であるためには、公理系と定理の間に概念的距離があることを言わねばならない。

伝統的な説明によれば、数学的証明は、公理系に既に含まれている内容を定理として既に取り出しているに過ぎない。証明は何も新しいものを与えない。
→妥当性は説明できるが、有用性が説明できない。

可述算術は、証明のパラドクス（改訂主義とは関係なく問題になりうる）に関して有用な洞察を与えることができる。

3.2 ウィトゲンシュタイン的描像——概念形成としての数学

ある解釈によれば、ウィトゲンシュタインは、証明が、概念を変革し、概念の運用についての、それまでは受け入れられていた基準とは異なる（公理には含まれていないような）全く新しい基準を導入するものであると捉えている。

> 私が、証明が新しい概念を導入すると言ったのは、次のようなことを意味している：証明は、言語の範型 (paradigm) に新しい範型を加える：絵の具を混ぜて特別な赤っぽい青の色を作る時に、色のある特別な混ぜ方を確立し、名前を与えるのと同様に。しかし、たとえ証明をそのような新しい範型とみなしたくなるとしても——そのような概念のモデルと証明の間は、正確にはどのように類似しているのだろうか？次のように言いたくなる。証明は言語の文法を変え、我々の概念を変える。証明は新しい連関を作り出し、この新しい連関の概

念を作り出す。（証明は、連関が存在することを示すのではない ; 連関は、証明が創りだすまでは存在しなかったのだ。）([19],II,S31)

証明が新しい概念を創りだすという考えは、おおよそ次のように表現できるかもしれない。証明は、証明の土台に推論規則を足したものではなく、新しい建築である——それはなんらかの様式の例ではあるのだが。証明は新しい範型である。証明が創りだす概念は、例えば、推論についての新しい概念かもしれないし、正しく推論することについての新しい概念かもしれない。([19],II,S41)

例。証明 p によってペアノ算術からゴールドバッハ予想が導かれたとする。ペアノ算術とゴールドバッハ予想の間の論理的関係は、この証明が概念を変革することによって初めて実現したことである。証明 p が現れるまでは、ペアノ算術からゴールドバッハ予想が導かれるということは、事の次第として存在しなかった。

ダメットの批判 :

- 証明は概念を変革し、運用の新基準を与えるので、新しいものを与える。つまり、有用性は説明できる。
- 妥当性は説明できない。証明が妥当であるのは、その証明が概念を正しく運用しているからである。だが、証明によって概念が変わってしまうのであれば、なんでもありになってしまうのではないか？

3.3 概念形成としての可述算術

可述算術は、ウィトゲンシュタイン的な証明観に形式的なモデルを与えたものであり、かつ、ダメットの批判をくぐり抜けるような形でそれを行っているものであると言える。

表 2 可述算術とウィトゲンシュタイン的描像

ウィトゲンシュタインにとっての証明	概念変革	運用の新しい基準	妥当性はどう説明する？
可述算術における数学的帰納法	自然数概念の改訂	理論を強化	元の理論での解釈

従って可述算術は、

- ウィトゲンシュタイン的描像に形式的モデルを与える
- ウィトゲンシュタイン的描像が妥当性を説明できないというダメットの批判に反例を与える
- 結果として、数学的証明の妥当性と有用性の双方を説明するモデルを与える

3.4 古典的算術との関連

可述算術は古典的算術よりも遥かに弱いので、古典的算術における証明に対しても同様のモデルを与えられるかは定かではない。

1. 古典的算術には別のモデルを用意する。
2. 可述算術に与えたモデルをなんとか古典的算術に拡大する。
3. 古典的算術は無視する。（改訂主義）

という三つの道がある。

参考文献

[1] Buss, S. 1986, *Bounded Arithmetic*, Bibliopolis.

[2] Buss, S. 2006, Nelson's Work on Logic and Foundations and Other Reflections on Foundations of Mathematics, in *Diffusion, Quantum Theory, and Radically Elementary Mathematics* (ed. Faris W.), Princeton

University Press, 2006.

[3] Dummet, M. The Philosophical Significance of Gödel's Theorem, *Ratio* 5,140-155.

[4] Dummett, M. 1974, The Justification of Deduction. in his Truth and Other Enigmas. Oxford.

[5] Feferman, S. 2005, Predicativity, in *Handbook of the Philosophy of Mathematics and Logic*, (ed. S. Shapiro), Oxford University Press.

[6] フレーゲ,G. 2001,『算術の基礎』, 勁草書房.

[7] 飯田隆. 1989,『言語哲学大全　意味と様相 (上)』, 勁草書房.

[8] カント, I. 1961,『純粋理性批判（上)』篠田英雄訳, 岩波書店.

[9] Nelson, E. 1986, *Predicative Arithmetic*, Princeton University Press.

[10] Nelson, E. 1993, Taking Formalism Seriously, *the Mathematical Intelligencer* 15(3),8-11.

[11] Nelson, E. 2000, *Mathematics and Faith*, his talk at Jubilee for Men and Women from the World of Learning, Vatican.

[12] Nelson, E. 2001, *Syntax and Semantics*, his talk at Foundations and the Ontological Quest, Rome. https://web.math.princeton.edu/ nelson/papers/s.pdf https://web.math.princeton.edu/ nelson/papers/faith.pdf

[13] Nelson, E. 2005, *Completed versus Incomplete Infinity in Arithmetic*, his talk at Infinity in Science, Philosophy, and Theology, Vatican City. https://web.math.princeton.edu/ nelson/papers/e.pdf

[14] Nelson, E. 2007, *Hilbert's Mistake*, sildes for his talk at the Second New York Graduate Student Logic Conference, New York. https://web.math.princeton.edu/ nelson/papers/hm.pdf

[15] Nelson, E. 2011, Warning Signs of a Possible Collapse of Contemporary Mathematics, in *Infinity: New Research Frontiers* (eds. Heller, M. and Hugh, W.), Cambridge University Press, 2011.

[16] Parsons, C. 1992, The Impredicativity of Induction, in *Proof, Logic, and Formalization* (ed. Detlefsen, M.), Routledge, 1992.

[17] Poincare, H. 1905, *Science and Hypothesis*, translated by William John Greenstreet, Walter Scott Publishing.

[18] Shoenfield, J. 1967. *Mathematical Logic*, Addison-Wesley Publishing Company.

[19] Wittegenstein, L. 1978. *Remarks on the Foundations of Mathematics* (ed. von Wright, Rhees, and Anscome, trans. Anscome), Oxford.

[20] ウィトゲンシュタイン, L. 2003, 『論理哲学論考』野矢茂樹訳, 岩波書店.