不完全性定理と意味使用説

鈴木佑京

2016/06/27

概要

意味使用説……言語表現の意味をその使用と同一視する考え方。
前期ダメット「ゲーデルの定理の哲学的意義」(1963)

- 不完全性定理と意味使用説は両立しないという議論を取り上げ検討
- 両立するが、自然数概念の曖昧性が帰結する

後期ダメット『形而上学の論理的基礎』(1991)

- 使用説の具体化として証明論的意味論を展開

概要

問い：後期ダメットの証明論的意味論を前提したとき、前期ダメットの議論はどこまで維持できるか？

主張：（導入ベースの）証明論的意味論を前提するなら、自然数概念の曖昧性は帰結しない

第一不完全性定理

そもそも（第一）不完全性定理とは……

第一不完全性定理

ロビンソン算術を含みかつ再帰的な任意の算術の体系 T について、その体系の言語で定式化可能であるゲーデル文 G_T が存在し、次の条件を満たす。T が無矛盾であるのなら、G_T は真であるが、T で証明できない。

算術の不完全性

ダメットは、不完全性定理から次が導かれると考えている……

算術の不完全性

初等算術のいかなる直観的に正しい再帰的体系 T についても、その体系の言語で定式化可能であるゲーデル文 G_T が存在し、次の条件を満たす。G_T は T で証明できないが真であり、我々は G_T が真であることを認識できる。

我々は第一不完全性定理と算術の不完全性を区別し、この発表では前者から後者が導かれることを疑わない。

注：ダメットは直観的に正しい形式体系については、我々はその無矛盾性を認識できると考えている。

算術の不完全性の標準的説明

ダメットは算術の不完全性をどう説明すべきか問い、次のような「標準的説明」に言及する。

- 我々は自然数の標準モデルについて直観的把握を持っており、
- その把握に基づき、任意の体系に対してゲーデル文の真理性を認識できる。
- しかしこの把握を形式体系によって特徴づけることはできない。

使用説の否定

もし、

概念の使用法の説明＝形式体系

なら、標準的説明から、

使用説が（自然数概念について）否定される。

標準的説明への批判

ダメットは、

- 論理学におけるモデルの概念はモデルを記述する言語と理論（ex. 集合論）に相対的なものである
- いかなる理論からも離れたモデルという観念は不整合である

とし、標準的説明を批判する。

算術の不完全性のオルタナティブな解釈

ダメットが提案するオルタナティブな説明は次のようなもの。

- いかなる算術の形式体系 T についても、真理述語（ないし真理述語を定義できるだけのリソース）による自然な拡大 T' が存在する。
- 我々は T が直観的に正しいという認識から、拡大 T' が直観的に正しいという認識を導くことができる（自然数概念の一部に、形式体系を拡大する一般原理が含まれる）。
- T' によって G_T を証明することによって、我々はゲーデル文の真理性を認識する。

無際限拡張可能性

では、算術の形式体系の際限ない拡張可能性は何に由来するのか？

- 任意の自然数についての性質に対して帰納法が妥当であることと、
- 「自然数についての性質」の総体をどのように特徴づけても、際限なく拡張可能である
  - 「その総体に対する真理述語」による拡張
  - 二階量化による拡張

ことによる。

使用説との両立

オルタナティブな説明は、意味使用説と両立する。

ただし、使用説を前提するのであれば、算術の形式体系の拡張は、使用の変化であり、自然数概念の変化とイコールである。

そのため、オルタナティブな説明が提示する算術の体系の無際限拡張可能性は、自然数概念の本質的曖昧性を帰結する。

反論

Q：「0 と S によって形成される対象」というのが我々の自然数概念であり、ここに曖昧性が入り込む余地はないのでは？

A：自然数概念の使用には、外延と量化の二つの側面がある。

- 確かに、自然数概念の外延（対象を自然数として認めるための基準）に曖昧性はない。
- だが、自然数についての量化された主張をするための根拠（帰納法）に曖昧性がある。

量化の曖昧性が、自然数概念を曖昧なものとする。

証明論的意味論

証明論的意味論とは、意味使用説を自然演繹の枠組みを用いて具体化したもの。

言語表現の使用法を、表現を含む文の＜根拠＞と＜帰結＞の二側面に分け、前者を導入則、後者を除去則によって説明する。

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\,(\wedge I) \quad \frac{A \wedge B}{A}\,(\wedge E0) \quad \frac{A \wedge B}{B}\,(\wedge E1)$$

証明論的意味論のタイプ

証明論的意味論には、ベースとなる規則によって三種類のタイプがある

- 導入ベース PTS……意味を定めるのは導入則であり、除去則は導入則から正当化される
- 除去ベース PTS……意味を定めるのは除去則であり、導入則は除去則から正当化される
- 対称的 PTS……導入則と除去則の双方が意味を定める

この発表で検討するのは、ダメットが支持している導入ベースの PTS である。

除去則の正当化

導入則と除去則が「調和」しているとき、除去則を導入則から正当化できる。

調和とは、局所的ピークが簡約でき、帰結が根拠に既に含まれていること。

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_0 \\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_1 \\ B\end{matrix}}{A \wedge B}}{\begin{matrix}A \\ \Pi_2\end{matrix}}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{matrix}\Pi_0 \\ A \\ \Pi_2\end{matrix}
$$

調和が成り立っている場合、除去則は導入則が付与した内容を取り出しなおしているだけに過ぎない。

自然数概念の PTS

PTS は論理定項のみならず、自然数概念にも拡大できる [Prawitz 2007][Martin-löf 1984]。

$$\frac{}{N(0)}\ (IN0) \quad \frac{N(x)}{N(Sx)}\ (IN1)$$

$$\frac{N(t) \qquad A(0) \qquad \begin{array}{c} A(x) \\ \cdots \\ A(Sx) \end{array}}{A(t)}\ (EN)$$

除去則が帰納法であることに注意。

自然数概念の PTS

この導入則と除去則が調和することは次のように確認できる。

$$\dfrac{\begin{array}{c} \dfrac{}{N(0)}\,(IN0) \\ \cdots \\ N(S^n x) \end{array} \qquad \begin{array}{c} D \\ A(0) \end{array} \qquad \begin{array}{c} A(x) \\ D_x \\ A(Sx) \end{array}}{A(t)}\,(EN) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} D \\ A(0) \\ D_0 \\ A(S0) \\ D_1 \ldots D_n \\ A(S^n 0) \end{array}$$

つまり、PTS の枠組みにおいては、帰納法（除去則）は自然数の導入則から正当化できる。

PTS と不完全性定理を突き合わせる

前期ダメットの主張……

算術の不完全性＋意味使用説＝無矛盾だが、自然数の曖昧性を帰結

「意味使用説」を PTS として具体化したとき、計算結果はどうなる？

PTS と不完全性定理を突き合わせる

この発表の主張……

算術の不完全性＋導入ベースの PTS ＝無矛盾であり、自然数の曖昧性を避けることができる

外延と量化、根拠と帰結

自然数概念の＜外延＞と＜量化＞の二側面は、＜根拠＞と＜帰結＞の二側面に対応する。

- 外延……対象を自然数であると主張するために何が必要か
  →＜根拠＞＝導入則
- 量化……「x が自然数である」ことから何かを結論するために何が必要か
  →＜帰結＞＝除去則

外延と量化の優先関係

したがって、外延と量化の間には次のような非対称な関係がある。

- 自然数概念に内容を付与するのは導入則＝＜根拠＞＝＜外延＞
- 除去則＝＜帰結＞＝＜量化＞＝帰納法は派生的に正当化される

したがって、意味内容を定めるのは＜外延＞であり、＜量化＞はその内容を取り出しなおしているだけにすぎない。

自然数概念は曖昧ではない

ところが、際限なく拡張可能なのは＜帰結＞の側面であり、＜外延＞の側面ではない。

→「外延」が定まっている以上、自然数概念に曖昧性はない！

自然数概念は不安定である

自然数概念は曖昧ではなく、不安定である。

Definition 1 (安定性)

導入則で正当化できる帰結を全て除去則が引き出している（導入則に対して除去則が最強である）とき、そしてそのときのみ、導入則と除去則は安定している

自然数概念は不安定である

算術の不完全性は、＜根拠＞＝＜外延＞＝導入則から正当化できる＜帰結＞＝＜量化＞＝除去則（帰納法）が際限なく拡張可能であることを示した。

これは、

- 「最強の除去則」を定式化することができないこと、
- 除去則は導入則に対し常に弱すぎ、不安定であること
- 自然数の意味内容を帰結の形で完全に引き出すことは不可能であり、つねに拡張可能であること

を意味する。

まとめ

- 前期ダメットは不完全性定理と意味使用説から自然数概念の曖昧性が帰結すると説いたが、
- 後期ダメットの PTS の発想を自然数概念に拡張すれば、
- 不完全性定理と PTS から自然数概念の曖昧性は帰結せず、
- 自然数概念の不安定性が帰結する。

自然数概念の曖昧性を避けられることをもって、導入ベースの PTS の動機付けとできるかもしれない。

展望

ゲーデル文の真理性を認識する過程についてはダメットの説明を認めるとして、なぜ自然な拡張をしたにもかかわらず、保存拡大でなくなるのか？

PTS においては、不安定な結合子を含む体系に調和した結合子を追加すると保存拡大でなくなる現象が知られている（量子的選言と通常の選言）

→自然数論に真理述語を追加したケースも同様に説明できないか？

参考文献

- Dummett, M. (1991). The Logical Basis of Metaphysics. Harvard University Press.
- Dummett, M. (1963). The Philosophical Significance of Gödel's Theorem. In Ratio:186-214.
- Prawitz, D. (2007). "Pragmatist and Verificationist Theories of Meaning", in The Philosophy of Michael Dummet (eds. Auxier, R. and Hahn, L.):455-481.
- Martin-Löf, P. (1984). Intuitionistic Type Theory. Bibliopolis.