後ろ向き推論とは何か？―『不完全性定理』をよく読む

鈴木佑京

2016/06/27

概要

『不完全性定理』の 9.3 節では、「後ろ向き推論」「前向き推論」の対比に関する議論がある。
この議論は（私にとっては）ちょっとわかりにくい。よく読んで整理し、不明確な語により明確な解釈を提案した上で、妥当性とポイントを再検討する。

9.3 節の目標

9.3 節で菊池は以下の立場（標準的立場）を批判することを目指している。

- 演繹=前向き推論＝四つの特徴を持たない
- アブダクション＝発見＝後ろ向き推論＝四つの特徴を持つ

9.3 節の目標

論理式 ϕ で表現される事実を説明する仮説とは $T \vdash \phi$ を満たす理論 T であると考えるならば、T から ϕ を導く推論が演繹であり、逆に ϕ から T を導く推論がアブダクションであることになる。前者を「前向き推論」と呼び、後者を「後ろ向きの推論」と呼ぶことにする。

9.3 節の目標

四つの特徴：

- 真理保存的でない
- 可謬
- 規則を持たない
- 非決定的

9.3 節の目標

菊池は前向き推論が四つの特徴を持たず、後ろ向き推論は持つ、という点を批判する。

9.3 節の議論

- 「前向き推論」と「後ろ向き推論」に関する標準的立場は、「書かれた証明」と「証明の構成過程」という比較の観点を揃えていないがゆえに誤りに陥った。
- 「前向き推論」については前者を、「後ろ向きの推論」については後者を問題にする誤りを犯している
- 比較の観点を揃えさえすれば、「前向き推論」も「後ろ向き推論」も四つの特徴について差はない。

二つの証明、二つの推論

では、「書かれた証明」と「証明の構成過程」の区別とはなんのことだろうか？
→ややわかりにくいように思う。例えば、同じことがら（推論、証明）の二つの側面を問題にしているのか、そもそも違うことがらを問題にしているのか…

二つの証明、二つの推論

「前向き推論」や「後ろ向き推論」において、$T \vdash \phi$ を満たす論理式 ϕ や理論 T を導く場合には、推論の結果として単に ϕ や T が得られるだけではなく、同時に T から ϕ を導く証明が得られる。むしろ、結論が ϕ であることや仮定が T であることは証明が満たすべき条件または仕様でしかなく、推論の結果として得られるものは証明であるとも考えられる。

四つの特徴

さらに、四つの特徴のそれぞれが何を意味しているのかも必ずしも明らかではない。

以下では、「書かれた証明」と「証明の構成過程」、および四つの特徴のそれぞれについてある可能な解釈を提示し、それに基づいて菊池と同じ結論を導けるか再検討する。

「推論」の多義性

「書かれた証明」と「証明の構成過程」は、「推論」(ないし「証明」)という言葉の多義性(異なる事柄を一つの言葉で読んでいる)を指摘しているものと解釈する。
以下では四つの意味での「推論」を区別し、それぞれに別々の名前を付ける。
それぞれの意味での「推論」について、前向き・後ろ向きの推論を想定できる。

判断

判断とは、ある意見・認識を採用する心理的な行為である。
判断は内容を持ち、内容は一定の形式を持つ。以下で問題になるのは以下のような仮説的真理の形式を持つ内容 (Sundholm)

$$A_1 true, ..., A_n true \Rightarrow B true$$

判断

仮説的真理の形式を持つ判断について、判断という行為を明示し、かつ *true* という真理帰属を省略して、以下では次のように書く。

$$\vdash \Gamma \Rightarrow A$$

判断は客観的に（個人がどんな理由でその判断を行ったかと関係なく）正しかったり誤っていたりする。

推論その１：単位推論

推論（単位推論）とは、他に自分が下した判断（前提）を根拠として、判断（結論）を行う行為である。[Rummfitt, White]
例えば：

$$\frac{\vdash\Rightarrow \text{次郎は三郎の兄である} \qquad \vdash\Rightarrow \text{一郎は次郎の兄である}}{\vdash\Rightarrow \text{一郎は三郎の兄である}}$$

推論その２：推論鎖

推論（推論鎖）とは、ある一つの判断に向かって連続して行われる一連の単位推論である。どの推論によっても導かれていない判断を前提、最後に行われた判断を結論と呼ぶ。
例えば：

$$\dfrac{\dfrac{\vdash\Rightarrow \text{次郎は三郎の兄である} \qquad \vdash\Rightarrow \text{一郎は次郎の兄である}}{\vdash\Rightarrow \text{一郎は三郎の兄である}} \qquad \vdash\Rightarrow \text{一郎は三郎の師である}}{\vdash\Rightarrow \text{一郎は三郎の師でもあり兄でもある}}$$

推論その3：推論図式

推論（推論図式）とは、推論鎖の設計図 (blue-print) となるような対象のことである。[Sundholm]
blue-print とは：あるタイプの行為を記述する対象。例えば料理のレシピは料理する行為に対する設計図となる。

推論その3：推論図式

例えば：

- 今までのスライドに書いてあった例示の文章はすべて推論図式である。
- 数学の教科書に載っている「証明」はすべて推論図式である。

推論その4：推論図式構成

推論（推論図式構成）とは、推論図式を構成する行為である。(cf. [Rummfitt] の「Deduction」)
例えば：

- 大学の試験で「述語論理のコンパクト性定理を証明せよ」と言われ、うんうんうなって証明を紙に書く。
- 東ロボ君に問題を解かせて証明と回答を生成する。

二つの推論をどうとらえるか

以下のような解釈は自然。

- 「書かれた証明」を問題にする態度とは、推論図式ないしそれが表象する推論鎖・単位推論の意味での推論を問題にすること
- 「証明の構成過程」を問題にする態度とは、推論図式構成の意味での推論を問題にすること

以下では議論があまり変わらないので、「書かれた証明」＝単位推論としておく。

推論の妥当性と正当性

以下の議論のために、単位推論の正当性と妥当性の概念を導入する。

- 単位推論が正当である iff. 前提が結論に対する理由を与えている。（前提が正しいかどうかは不問）
- 単位推論が妥当である iff. 前提が正当であるならば、結論も必ず正当である。

推論鎖は、含まれるすべての単位推論が正当/妥当であるなら正当/妥当である。推論図式は、表象する推論鎖が正当/妥当であるなら正当/妥当である。

前向き単位推論・後ろ向き単位推論

菊池の記述と照らし合わせると、次のように考えるのが自然。

- 後ろ向きの単位推論とは、

$$\frac{\vdash A \Rightarrow B \qquad \vdash\Rightarrow B}{\vdash\Rightarrow A}$$

- 前向きの単位推論とは、

$$\frac{\vdash A \Rightarrow B \qquad \vdash\Rightarrow A}{\vdash\Rightarrow B}$$

前向き推論図式構成・後ろ向き推論図式構成

菊池の記述と照らし合わせると、次のように考えるのが自然。

- 後ろ向きの推論図式構成（≒証明探索）とは、ある判断 $\vdash \Gamma \Rightarrow A$ から出発して、この判断を結論とする正当な単位推論の前提を探すことを繰り返すような推論図式構成。
- 前向きの推論図式構成とは、ある判断 (群)$\vdash \Gamma \Rightarrow A$ から出発して、この判断を前提とする正当な単位推論の結論を探すことを繰り返すような推論図式構成。

検討

以上の解釈を前提に、菊池と同じ結論が導けるか再検討する。
ただし、「四つの特徴」それ自体をどのように解釈すべきかも問題になりうる。

検討

検討の観点を「証明の構成過程」に揃えるなら、菊池のいうように向きによる違いはないものと思われる（時間が無いので省略）。

検討の観点を「書かれた証明」に揃えれば、標準的立場が帰結するのでは？

単位推論の規則性

対象となる単位推論のクラスのうち、正当であるようなものについて、その正当性が規則によって定まっているかどうか。

- 正当な前向きの単位推論の正当性は規則（カット規則、ないしカット除去を許す論理・構造規則）で定まっていると考えるのは少なくとも一定の説得力を持つ。
- 正当な後ろ向きの単位推論の正当性は、推論の形式のみならず雑多な考慮（単純性、経済性、もっともらしさ、検証可能性）で決まる。これは文脈依存的にケースバイケースで相対的比較によって行われるもので、一般的な規則として定式化できるかどうかは怪しい。

単位推論の規則性

なお前向き推論の結論が「定理」と呼べるものかどうかが規則によって定まっているとは考え難い [p.298] が、これは推論の正当性を前提にして、その結論が重要であるかどうかを問うたものであり、後ろ向き推論が規則的でないという時とは観点が異なる。

単位推論の決定性

対象となる単位推論のクラスのうち、正当であるようなものについて、その正当性を機械的な手続きで決定できるか。→規則性の議論と同様。

単位推論の真理保存性・可謬性

不注意の結果として正当な推論を正当でない推論と誤認することは向きにかかわらずありうる [p.298]。
そこで、正当性は前提し、単位推論が真理保存的でない（可謬である）とは、正当であるが妥当でない、ということであると解釈する。

単位推論の真理保存性・可謬性

対象となる単位推論のクラスのうち、正当であるが妥当でないものはありうるか（十分な注意を伴わない推論が誤ったり真理を保存しないのは当然ありうる）。

- 正当な前向きの単位推論は（判断の正当性に一般的な解釈を与えれば）すべて妥当である。
- 正当な後ろ向きの単位推論は誤りうる（単純で経済的でもっともらしく検証可能な仮説でも、誤り得ないとは言えない）。

菊池も以上の違いには気づいている？[p.297]

結論

検討の観点をそろえた場合どうなるか？

- 「書かれた証明」＝単位推論を問題にするなら、四つの特徴は後ろ向きの推論にのみ当てはまる。
- 「証明の構成過程」＝推論図式構成を問題にするなら、四つの特徴のいずれによっても推論の向きは区別できない。

「証明の構成過程」に揃えるなら菊池の言うように両者に区別はないが、「書かれた証明」にそろえるなら区別はある。

標準的立場はおそらく「書かれた証明」を問題にしている。

菊池の議論のポイント

菊池の議論は、標準的立場に対しディベートを仕掛けているというより、

「書かれた証明」と「証明の構成過程」の区別を導入し、前者に集中しすぎることへの警戒を促すことで、我々の数学的実践の理論的理解をよりきめ細かく、偏りのないものとするためのものととらえるのがよい。

菊池の議論のポイント

数学の哲学、論理の哲学は主張や判断に注目し、その連接としての単位推論・推論鎖に集中しすぎているのではないか？ex.)Frege, Martin-löf etc.

実際の数学活動はむしろ、「証明を案出し構成する」活動にきわめて大きな時間が割かれているのでは？

菊池の議論のポイント

公理へのコミットメントから定理へのコミットメントへの移行は、論文を書く直前の数学者、論文を読んで完全に理解した読者の心の中に最終的に生じるステップに過ぎないのでは？

哲学者はそのような数学活動の「野蛮な」部分を理解する道具をまだ十分に磨いていないのでは？

菊池の議論のポイント

現実の数学では証明は、仮定から出発したり、結論から出発したり、場合によっては仮定や結論を取り換えながら、試行錯誤しながら書かれている。数学には「前向き推論」のみからなる推論や、「後ろ向き推論」のみからなる推論など存在しない。形式化された証明を書く場合も同様なのであって、素朴な証明であれ、形式化された証明であれ、証明について議論する際には「前向き推論」と「後ろ向き推論」の区別は大した意味を持たない。

後ろ向き推論図式構成の再解釈

ある結論を目標とする後ろ向き推論図式構成は、「ある判断内容に対して推論図式を与えたい」という目標を設定する態度（以下、ターゲッティングと呼ぶ）を、別のターゲッティングに移行させていく手続きとみなすことができる。

$$\dashv \Gamma \Rightarrow A$$

後ろ向き推論図式構成の再解釈

具体例：

$$\frac{\dashv \Gamma \Rightarrow A \wedge B}{\dashv \Gamma \Rightarrow A \qquad \dashv \Gamma \Rightarrow B}$$

さらに上の図は、後ろ向き推論図式構成についての blue-print であるということができる。

後ろ向き推論図式構成と推論鎖の双対性

ターゲッティングは推論図式を求める。対して、推論鎖の中で結論として行われる判断、記憶や言語として、証明図式を算出する。
さらに、ツリー型に書いた推論鎖の blue-print は、図の上下を逆転させれば、後ろ向き推論図式構成の blue-print になる。
推論鎖と後ろ向き推論図式構成は双対の関係にあるのではないか？

後ろ向き推論図式構成と推論鎖の双対性

カリー＝ハワード同型により、
論理的に推論鎖の blue-print であるものは、計算機科学的には値に対応する。
論理的に後ろ向き推論図式構成の blue-print は、計算機科学的には継続（値を受け取って計算を進めるもの）に対応するのでは？

妄想

継続＝反証という解釈のみならず、継続＝（証明を手に入れよという）問題という解釈も可能であるかもしれない。
さらに、値＝証明に基づく意味論のみならず継続＝反証に基づく意味論が立てられるように、継続＝問題の概念に基づく意味論が建てられるかもしれない（後ろ向きの BHK 解釈、後ろ向きの PTS etc.)

まとめ

- 菊池は標準的立場について、比較の視点を混同しているがゆえに誤りを犯したとしたが、
- 「書かれた証明」を「単位推論」、「証明の構成過程」を「証明図式構成」としてとらえると、
- 「書かれた証明」に比較の視点をそろえても、標準的立場が帰結する。
- 菊池の議論はむしろ、数学の実践を記述する理論的道具立てを豊かにするものと捉えるべき。

参考文献

- White, A. (1971). Inference. Philosophical Quarterly 21 (85):289-302.
- Rumfitt, I (2015). The Boundary Stones of Thought: An Essay in the Philosophy of Logic. Oxford University Press.
- Sundholm, G (2006). Semantic Values for Natural Deduction Derivations. Synthese 148 (3):623-638.

二つの証明、二つの推論

> しかし、証明を前向きに作ったとしても後ろ向きに作ったとしても、結果として得られた証明を前から後ろに読めば真理は保存されているし、後ろから前に読めば真理は保存されていないことに違いはない。

違うことがらを問題にしている？

数学的における推論の多様性

四つの推論の数学における現れ方の一例: ある数学者がある問題を解きたいと思い、その問題に対する証明をなんとか捻出し、論文（推論図式）に書く（推論図式構成）。
別の数学者はその論文を読み、証明を頭から読んでいって定理は正しいと判断を下す（推論鎖・単位推論）。

四つの推論の区別

- 単位推論と推論図式構成は行為であり、推論鎖は一連の行為である。推論図式は行為ではなく対象である。
- 推論図式を構成することなく推論鎖を実行することは可能である (内的な推論を行い、きれいさっぱり忘れる)。
- 推論を行わずに推論図式を構成することも可能である（古典数学者が構成主義数学の問題を解く。誤っていると知っている判断から結論を引き出す)。

推論図式構成の規則性

対象となる推論図式構成のクラスのうち、正当であるようなものについて、その正当性が規則によって定まっているかどうか。

- 向きに関係なく推論図式構成について、正当性の判断と言いうるものが可能なのは最終的に構成された推論図式が正当であるか否か、（目標があるなら）目標の結論が正当であるかだけである。途中どのような判断を経由して推論図式を構成するかは自由。
- 向きに関係なく推論図式構成について、最終的に構成された推論図式が正当であるかは、それが後ろ向きの単位推論（およびそれに類する非規則的な推論）を含まないなら規則的。

以上はほぼ菊池 [p.298] の通り。

推論図式構成の決定性

対象となる推論図式構成のクラスのうち、正当であるようなものについて、その正当性を機械的手続きで決定できるか。→規則性と同じ [p.299]

推論図式構成の真理保存性・可謬性

対象となる推論図式構成の結果として作られる推論図式について、正当だが妥当でないことはありうるか？
向きにかかわらず、推論図式が後ろ向きの単位推論（およびそれに類する非規則的な推論）を含まないならありえない [p.297]。