収穫逓増と独占的競争のもとでの一般均衡存在証明：ノート*

吹　春　俊　隆

はじめに

Arrow と Debreu による先駆的貢献を初めとして数多くの著者が完全競争のもとでの一般均衡の存在を証明している．しかしながら，独占的競争を仮定した一般均衡体系について，その均衡存在証明を与えたものはきわめて少ない．筆者の知るかぎり，Negishi [4]，[5] および Arrow & Hahn [1] による貢献があるのみである．

さて，その先駆的貢献において Negishi [4] は，生産可能集合の凸性，すなわち，収穫逓減を仮定していた．この仮定は，独占と収穫逓増との密接な結びつきを考える時，明らかに一つの欠点といわざるをえない．後に，Arrow & Hahn [1] はこの仮定をいくらか緩めた．すなわち，彼らは生産可能集合が strictly-star-shaped であると仮定して緩やかな収穫逓増をも含めることに成功した．しかしながら，独占企業行動については，Negishi [4] が（予想）利潤極大化という行動仮設を明示しているのに対して，Arrow & Hahn [1] はその行動仮設を不明確なものにしてしまっている．

本論稿は，Negishi [4] と Arrow & Hahn [1] のこれらの欠点を克服したモデルの中で，一般均衡存在を証明することを目的とする．この際，収穫逓増を考慮するために，Chipman が文献 [2] において展開している“規模に対するパラメトリックな外部経済”の概念を導入する．Chipman [2] は経済の全生産量が増加するにつれて，個々の企業の生産関数はシフトすると考え，これによって収穫逓増を考察した．われわれはこの概念を1企業の内部経済を導き出すよう工夫するであろう．このような形で内部経済を導入することによって，Negishi [4] のように，独占企業が予想利潤極大化をめざすという行動仮設を明示的に入れることができる．

* 本論稿の作成過程で，神戸大学足立助教授およびレフェリーより多くの有益なコメントが寄せられた．ここに記して感謝の意を表わす．しかし，それらのコメントを充分に生かしきれなかったこと，および，ありうべき誤謬はいうまでもなくすべて筆者の責任である．

1. モデル

まず以下で使用する記号をまとめて示しておこう．われわれは独占企業と完全競争企業を区別するので，y_{Mg} によって独占企業 g の生産ベクトルを，y_{Cf} によって完全競争企業 f の生産ベクトルを示す．x_i は家計 i の需要ベクトルを，ω_i は初期保有ベクトルを示す．p は価格ベクトルである．財は r 個あるとするのでそれぞれのベクトルは r 次元である．したがって，$y_{Mg}=(y_{Mg1}, \cdots, y_{Mgr})$, $x_i=(x_{i1}, \cdots, x_{ir})$ などで表わされる．家計は m 個，独占企業は n 個，そして完全競争企業は k 個存在すると考える．そこで，x, y_M, y_C はそれぞれ m, n および k の tuple を示す．すなわち，$x=(x_1, \cdots, x_m)$, $y_M=(y_{M1}, \cdots, y_{Mn})$, $y_C=(y_{C1}, \cdots, y_{Ck})$ である．そして $x=(x_i)$, $y_M=(y_{Mg})$ などのように表わされる．R_+^r は r 次元ユークリッド空間の非負象限を，S^{r-1} は $r-1$ 次元 simplex を表わす．任意のベクトル x_i, x_j について $x_i \gg x_j$ は $x_{is}>x_{js}$ $(\forall s)$ を，$x_i > x_j$ は $x_{is} \geqq x_{js}$ $(\forall s)$ かつ $x_i \neq x_j$ を，$x_i \geqq x_j$ は $x_{is} \geqq x_{js}$ $(\forall s)$ を意味する．

われわれのモデルの諸仮定は以下のとおりで

ある.

〔**仮定 1**〕 完全競争企業 f の生産可能集合を Y_{Cf} と置く時, Y_{Cf} は凸, 閉集合であり原点を含む. $(f=1, \cdots, k)$

〔**仮定 2**〕 家計 i の消費可能集合を X_i と置く時, X_i は凸, 閉集合であり, かつ $X_i \subset R_+^r$ である. $(i=1, \cdots, m)$

〔**仮定 3**〕 X_i 上で次のような性質を持つ選好関係 $(\underset{i}{\gtrsim})$ が存在する. $(i=1, \cdots, m)$

ただし, 選好関係は, $x_i^1 \underset{i}{>} x_i^2$ の時 x_i^1 は x_i^2 より選好されるという意味を持つ. $x_i^1 \underset{i}{\sim} x_i^2$ の時, x_i^1 と x_i^2 は無差別である. そして $x_i^1 \underset{i}{\gtrsim} x_i^2$ の時, x_i^1 は x_i^2 より選好されるかまたは無差別である.

(a) $x_i^1 \underset{i}{\gtrsim} x_i^2$, $x_i^2 \underset{i}{\gtrsim} x_i^3$ であれば, $x_i^1 \underset{i}{\gtrsim} x_i^3$ となる.

(b) $\forall x_i^1$, $\forall x_i^2 \in X_i$ に対し, $x_i^1 \underset{i}{\gtrsim} x_i^2$ または $x_i^2 \underset{i}{\gtrsim} x_i^1$ が成り立つ.

(c) $\forall x_i^0 \in X_i$ に対し, $\{x_i | x_i \underset{i}{\gtrsim} x_i^0\}$, および $\{x_i | x_i^0 \underset{i}{\gtrsim} x_i\}$ は閉集合である.

(d) すべての $x_i \in X_i$ に対し, $x_i^0 \underset{i}{\gtrsim} x_i$ となるような $x_i^0 \in X_i$ は存在しない.

(e) $x_i^1 \underset{i}{>} x_i^2$, および $0 \leqq \beta < 1$ であれば, $(1-\beta)x_i^1 + \beta x_i^2 \underset{i}{>} x_i^2$ である.

(f) ω_i を家計 i の初期保有とすれば, $\omega_i \gg 0$ であり, さらに $0 \in X_i$ を満たす.

(g) $\bar{x}_i^j \in X_i$ $(j=1, 2)$ という, お互いに無差別でないベクトルが存在し, $\bar{x}_i^j \leqq \omega_i$ であり, $\omega_{is} > 0$ の時, $\bar{x}_{is}^j < \omega_{is}$ を満たす. $(j=1, 2)$

これらは Negishi [4] または Arrow & Hahn [1] の諸仮定とほぼ一致している. 〔仮定 3-(f)〕は $0 \in X_i$ という条件を除いて Negishi [4] で仮定されているが, これは独占的競争理論において中心的役割を果たす製品差別化 (product differentiation) の概念と矛盾するように思われる.[1] そこで〔仮定 3-(f)〕は後により緩やかな仮定にかえられるであろう.

次に, 独占的競争企業についての諸仮定を述べよう.

〔**仮定 4**〕 独占的競争企業 g は1財のみを生産する.[2] さらに異なる独占企業は異なる財を生産する. すなわち, Y_{Mg} を独占企業 g の生産可能集合と置き, $y_{Mg} \in Y_{Mg}$ をとると, $y_{Mgg} \geqq 0$, $y_{Mgj} \leqq 0$ $(j \neq g)$ である. $(g=1, \cdots, n)$

独占企業が異なる財を生産するという仮定は製品差別化の概念を含んでいることになる. さらにこの〔仮定 4〕の最後の部分は自由処分排除の仮定といえよう. また, 結合生産排除の仮定は後に緩められるであろう.

次に, われわれは収穫逓増の可能性をモデルに導入したい. この際われわれは Chipman のアイディアを利用して, 生産可能集合は活動水準とともに変化するものと考える. 以下では活動水準を α なるパラメーターで示す. α は y_{Mgg} を代表するパラメーターである.[3] そして〔仮定 4〕での Y_{Mg} については次のように仮定する.

1) Negishi [5] p. 103.

2) この結合生産の排除は独占的競争を前提するかぎり, それほど厳しい仮定とは思われない. というのは, 独占的競争において諸企業は, 物的にほとんど同一の性質を持つ商品を消費者の嗜好に訴えて異なる諸商品として販売しようとする傾向を持ち, 1企業はその物的に同一性質を持つ諸商品のうち, 1商品に生産を特化しようとする傾向があると考えられるからである. しかしこの結合生産の排除の仮定は後に緩められるであろう.

3) Chipman は外部性との関係で考えているが, われわれは内部性との関係で考えている. この相違について次のことが考えられる. Chipmanはその外部性には部分的に内部経済 (収穫逓増) が含まれることを指摘している ([2] pp. 349–350). すなわち, 1企業の規模が拡大するにつれて, その企業には内部経済が働き, 同一の投入でより多くの産出量が可能になるのであるが, Chipman によれば, この企業はこの内部効果を外部効果とみなすと仮定されている. というのは, 彼のモデルでは完全競争が仮定されていて, 1企業の内部効果はきわめて小さいので, 企業はそれを知覚していないと考えうるからである. これに対し, われわれのモデルは独占的競争を仮定しているので, 独占企業の持つ内部効果の程度はより大きく, みずからそれを知覚していると仮定される. すなわち, 独占商品のある生産量(または活動水準)を意図する時, 生産可能集合はその意図された生産量 (または活動水準) に応じて異なることが知覚されるのである. 本文でひきつづき述べられるように, 内部経済を通じてその意図された生産量が大きくなれば, それに応じて現存の資源でより多くの生産プロセスの選択が可能となるが, このことを独占企業は知覚しているとする. もちろん現存の資源ではその意図された生産量を可能にするような生産プロセスが存在するとは保証されない. しかしながら均衡存在証明において示されるように, 均衡ではその意図された生産量を実現するような生産プロセスを選択することが可能になる.

〔仮定5〕 α を非負の実数値として，$h_g(\alpha)$ は実数値連続関数であり，かつ単調増加であるとする．さらに $h_g(0)=1$, $h_g(\alpha)\geqq 1$ であり，$h_g(\alpha)=M_g$: constant $(\alpha\geqq\bar{\alpha}_g)$ を満たす．[4]

$$Y_{Mg}(\alpha)=\left\{y_{Mg}\middle|\begin{matrix}y_{Mgg}=r\bar{y}_{Mgg} & \bar{y}_{Mg}\in\bar{Y}_{Mg}\\ y_{Mgj}=\bar{y}_{Mgj}\ (j\neq g) & 1\leqq r\leqq h_g(\alpha)\end{matrix}\right\}$$

と置く．ただし，$\bar{Y}_{Mg}$ はコンパクト，凸集合であり原点を含む．$(g=1, \cdots, n)$

〔仮定5〕によって活動水準 α に対応する生産可能集合 $Y_{Mg}(\alpha)$ が構成された．$h_g(\alpha)$ は独占企業 g についての収穫逓増の程度を示す関数であり，活動水準 α が増加するにつれて，同一投入量でより多くの生産量が可能になることを意味する．この考え方は Chipman [2] のそれを拡張したものである．すなわち，Chipman は z_g を企業 g の労働投入量，y_g を産出量とする時，生産関数を $y_g=k_g z_g$ と置く．ただし $k_g\geqq 0$ である．そこで，$k_g=\bar{\mu}_g(\sum_g y_g)^{\eta_g}$, $-\infty<\eta_g<1$ と置く．[5] つまり経済全体の生産量 $(\sum_g y_g)$ をパラメーターと考え，この量が増加する時，同一投入量でより多くの生産量が可能となると考えている．そこでわれわれは，Chipman のこの仮定をとりあげて，個別企業の収穫逓増に利用したのである．投入物と産出物がそれぞれ1個の場合が第1図に示されている．そこでは α, α' $(\alpha<\alpha')$ なる二つの活動水準を考察する時，〔仮定5〕より $h_g(\alpha')\geqq h_g(\alpha)$ となるから，$Y_{Mg}(\alpha')\supset Y_{Mg}(\alpha)$ がいえる．つまりわれわれは，活動水準 α が増加するにつれて生産可能集合 $Y_{Mg}(\alpha)$ は拡大する，と仮定する．

Negishi [4] は，われわれのモデルのタームでいうと，$Y_{Mg}(\alpha)=\bar{Y}_{Mg}(\forall\alpha)$ と仮定している．

この時，企業 g の全体の生産可能集合 Y_{Mg} は次のように仮定される．

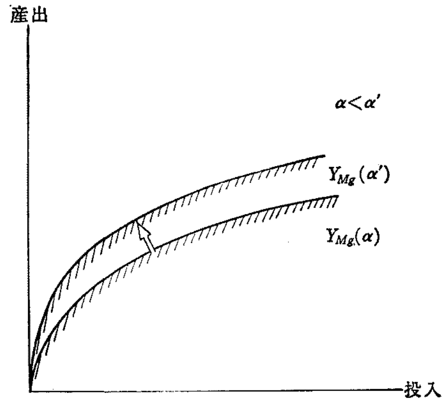
〔仮定6〕 $Y_{Mg}=\bigcup_{\alpha\geqq 0} Y_{Mg}(\alpha)$ $(g=1, \cdots, n)$

4) この $h_g(\alpha)$ は，以下で証明される，$Y_{Mg}(\alpha)$, および Y_{Mg} のすべての性質にとって非常に重要な役割を果たす関数である．

5) Chipman [2], pp. 352-353. さらに生産可能集合がアロケーションの変化とともに変化するというモデルについては，Arrow & Hahn [1], pp. 132-136 を参照されたい．もっともこの場合完全競争が仮定されている．

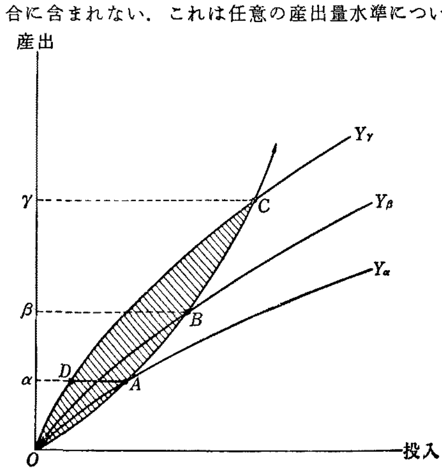
すなわち，すべての活動水準について合成したものが独占企業の生産可能集合になる．[6]

独占企業行動については Negishi [4] にお



第1図

6) われわれが，本論稿で Negishi [4] における収穫逓減の仮定を緩和したというのは，次のような意味においてである．すなわち，産出水準の低い時の生産可能集合は小さく，産出水準が高まるにしたがって生産可能集合は拡大して行く．たとえば第2図において，産出水準が α, β, および γ の時，それに対応する生産可能集合は Y_α, Y_β, Y_γ である．各産出水準に対応して feasible な生産ベクトルの軌跡をとると，たとえば $OABC$ のようになり，収穫逓増的になるであろう．実際，$h_g(\alpha)$ の関数形を適当にとれば，ある範囲において収穫逓増的になる（Y_α は凸集合であるが，このような産出量拡大の過程では斜線部分は feasible でない．というのは，たとえば産出量水準 α の時，DA は A を除いてその産出量水準に対応する生産可能集合に含まれない．これは任意の産出量水準につい



第2図

ける仮定をそのまま置く.

〔**仮定7**〕 独占企業 g の生産物の予想価格を $\bar{p}_g$ とすると, $\bar{p}_g$ は次のような連続関数（主観的逆需要関数）によって与えられるものとする.

$$\bar{p}_g=\bar{p}_g(y_{Mgg}',\ p,\ \sum_i x_{ig}-\sum_f y_{Cfg}-\sum_{j\neq g} y_{Mjg})$$

ただし, $x_i\in X_i$, $y_{Cf}\in Y_{Cf}$, $y_{Mg}'\in Y_{Mg}$, $y_{Mj}\in Y_{Mj}$ $(j\neq g)$ である. すなわち, 予想価格はその財の生産量, すべての財の価格, およびその財に対する需要の関数になっている. 独占企業の予想価格と現実価格の間には, $y_{Mgg}''=\sum_i x_{ig}-\sum_f y_{Cfg}-\sum_{j\neq g} y_{Mjg}-\sum_i \omega_{ig}$ と定義する時, $p_g=\bar{p}_g=\bar{p}_g(y_{Mgg}'',\ p,\ \sum_i x_{ig}-\sum_f y_{Cfg}-\sum_{j\neq g} y_{Mjg})$ なる関係がある. $(g=1,\ \cdots,\ n)$

〔仮定7〕をさらに単純化して, 独占企業の主観的逆需要関数を次のように与えるとする.

〔**仮定8**〕 $\bar{p}_g(\cdots)=a_g(p,\sum_i x_{ig}-\sum_f y_{Cfg}-\sum_{j\neq g} y_{Mjg})\cdot y_{Mgg}'+b_g(p,\ \sum_i x_{ig}-\sum_f y_{Cfg}-\sum_{j\neq g} y_{Mjg})$ であり, $a_g(\cdots)<0$ を満たす. $(g=1,\ \cdots,\ n)$

独占企業は右下がりで y_{Mgg}' について線型の主観的逆需要関数を持つと仮定されていることになる.

さてわれわれは均衡を次のように定義する.

〔**定義1**〕 価格ベクトル p^* とアロケーション $w^*=(x^*,\ y_C^*,\ y_M^*)$ が次の条件を満たす時, それらを均衡と呼ぶ. ただし, $x^*=(x_i^*)$, $y_C^*=(y_{Cf}^*)$, および $y_M^*=(y_{Mg}^*)$ である.

(a) $p^*>0$

(b) $\sum_i x_i^*\leqq\sum_i \omega_i+\sum_f y_{Cf}^*+\sum_g y_{Mg}^*$

(c) y_{Cf}^* は Y_{Cf} 上で p^*y_{Cf} $(y_{Cf}\in Y_{Cf})$ を最大にする. $(f=1,\ \cdots,\ k)$

(d) x_i^* は $p^*x_i\leqq M_i^*=p^*\omega_i+\sum_f \theta_{if}^C(p^*y_{Cf}^*)+\sum_g \theta_{ig}^M(p^*y_{Mg}^*)$, $x_i\in X_i$ のもとで $u_i(x_i)$ を最大にする.[7] ここで θ_{if}^C は家計 i の競争企業 f からの利潤の分け前を示す. θ_{ig}^M は同様に独占企業 g からの利潤の分け前である. $\theta_{if}^C\geqq 0$ $(\forall f)$, $\theta_{ig}^M\geqq 0$ $(\forall g)$, および $\sum_i \theta_{if}^C=\sum_i \theta_{ig}^M=1$ と置く. $(i=1,\ \cdots,\ m)$

(e) $Y_{Mg}(\alpha)$ のパラメーター α に均衡生産量 y_{Mgg}^* を代入すると, y_{Mg}^* は $y_{Mg}'\in Y_{Mg}(y_{Mgg}^*)$ のもとで $f_{Mg}(y_{Mg}',\ p^*,\ w^*)$ を最大にする. ただし, $f_{Mg}(y_{Mg}',\ p^*,\ w^*)=\bar{p}_g(y_{Mgg}',\ p^*,\ \sum_i x_{ig}^*-\sum_f y_{Cfg}^*-\sum_{j\neq g} y_{Mjg}^*)y_{Mgg}'+\sum_{j\neq g} p_j^* y_{Mgj}'$ と置く. この関数は価格が p^*, アロケーションが w^* という状況での y_{Mg}' の予想利潤を示す. $(g=1,\ \cdots,\ n)$

この定義は (e) を除いて, Negishi [4] および Arrow & Hahn [1] とまったく同じである. (e) の意味は次のとおりである. すなわち, われわれのモデルでは, 独占企業は均衡生産量（活動水準）に対応する生産可能集合のうち, 最大の予想利潤をもたらす生産ベクトルを選ぶ. これに対し, 前述のように, Negishi [4] は収穫逓増を考えていないので, われわれのモデルのタームでは $Y_{Mg}(\alpha)=\bar{Y}_{Mg}(\forall\alpha)$ としていることになる. したがって独占企業 g は, $\bar{Y}_{Mg}$ のうちで最大の予想利潤をもたらす生産ベクトルを選ぶとしていることになる. 一方, Arrow & Hahn [1] は最初から $y_{Mg}(p,\ w)$ という $(p,\ w)$ に関する一意連続な供給関数を前提するので, 独占企業 g についての均衡条件は $y_{Mg}(p^*,\ w^*)=y_{Mg}^*$ となる. しかしこの場合, Arrow & Hahn [1] も認めるように, 独占企業の行動仮設は不明である.[8]

2. 均衡存在の証明

われわれはまず次のような補助定理を証明しておこう.

〔**補助定理1**〕 $Y_{Mg}(\alpha)$ はコンパクト, 凸集合であり, 原点を含む. $(g=1,\ \cdots,\ n)$

証　明

［a］ コンパクトであること.

$Y_{Mg}(\alpha)$ の作り方より明らかである.

［b］ 凸集合であること.

y_{Mg}^1, $y_{Mg}^2\in Y_{Mg}(\alpha)$ を任意のベクトルとする. 定義より

ていえる). ただし〔仮定5〕においてシフト関数 $h_g(\alpha)$ は有界であると仮定されているから, この生産可能集合の拡大には限度がある. このシフト関数の有界性は Y_{Mg} が閉集合であることを保証するために必要なのである.

7) $u_i(x_i)$ は〔仮定3〕より構成される効用指数関数である.

8) Arrow & Hahn [1], p. 166.

$$y_{Mg}{}^1=(\bar{y}_{Mg1}{}^1,\ \bar{y}_{Mg2}{}^1,\ \cdots,\ r_1\bar{y}_{Mgg}{}^1,\ \cdots,\ \bar{y}_{Mgn}{}^1)$$
$$y_{Mg}{}^2=(\bar{y}_{Mg1}{}^2,\ \bar{y}_{Mg2}{}^2,\ \cdots,\ r_2\bar{y}_{Mgg}{}^2,\ \cdots,\ \bar{y}_{Mgn}{}^2)$$
$$\bar{y}_{Mg}{}^1,\ \bar{y}_{Mg}{}^2\in\bar{Y}_{Mg},\ 1\leqq r_1,\ r_2\leqq h_g(\alpha)$$

で表わせる．$0<\beta<1$ なる任意の β に対し

$$\beta y_{Mg}{}^1+(1-\beta)y_{Mg}{}^2=(\beta\bar{y}_{Mg1}{}^1+(1-\beta)\bar{y}_{Mg1}{}^2,\ \beta\bar{y}_{Mg2}{}^1+(1-\beta)\bar{y}_{Mg2}{}^2,\ \cdots,\ \beta r_1\bar{y}_{Mgg}{}^1+(1-\beta)r_2\bar{y}_{Mgg}{}^2,\cdots,\beta\bar{y}_{Mgn}{}^1+(1-\beta)\bar{y}_{Mgn}{}^2)$$

となる．$\bar{y}_{Mgg}{}^1=\bar{y}_{Mgg}{}^2=0$ の時は証明の必要はない．そこで $\bar{y}_{Mgg}{}^1$ か，または $\bar{y}_{Mgg}{}^2$ のうち少なくとも一つは正と置いてよい．すると

$$\beta\bar{y}_{Mgg}{}^1+(1-\beta)\bar{y}_{Mgg}{}^2=k>0$$

である．$\tilde{r}=\dfrac{\beta\bar{y}_{Mgg}{}^1}{k}r_1+\dfrac{(1-\beta)\bar{y}_{Mgg}{}^2}{k}r_2$ と置こう．$r_1<r_2$ と置いて一般性を失わない．明らかに

$$1\leqq r_1\leqq\tilde{r}\leqq r_2\leqq h_g(\alpha) \qquad (1)$$

を満たす．$\tilde{r}(\beta\bar{y}_{Mgg}{}^1+(1-\beta)\bar{y}_{Mgg}{}^2)=\tilde{r}k=\beta r_1\bar{y}_{Mgg}{}^1+(1-\beta)r_2\bar{y}_{Mgg}{}^2$ であり，$\beta\bar{y}_{Mg}{}^1+(1-\beta)\bar{y}_{Mg}{}^2\in\bar{Y}_{Mg}$ を満たすから，(1) を考慮して

$$\beta y_{Mg}{}^1+(1-\beta)y_{Mg}{}^2\in Y_{Mg}(\alpha)$$

を得る．したがって $Y_{Mg}(\alpha)$ は凸集合である．$0\in Y_{Mg}(\alpha)$ となることは自明であろう．

Q.E.D.

〔補助定理 2〕 $Y_{Mg}(\alpha)$ は α に関する連続な点対集合写像である．$(g=1,\ \cdots,\ n)$

証　明　われわれは $Y_{Mg}(\alpha)$ が α に関して上半，かつ下半連続であることを証明すればよい．

[a] 上半連続であること．

$\bar{Y}_{Mg}$ のコンパクト性と $h_g(\alpha)$ が連続関数であることを考慮すると，明らかである．

[b] 下半連続であること．

$y_{Mg}{}^0\in Y_{Mg}(\alpha^0)$ とし $\alpha^\nu\to\alpha^0$ なる数列をとる．まず定義より

$$y_{Mg}{}^0=(\bar{y}_{Mg1}{}^0,\ \bar{y}_{Mg2}{}^0,\ \cdots,\ r^0\bar{y}_{Mgg}{}^0,\cdots,\bar{y}_{Mgn}{}^0)$$
$$\bar{y}_{Mg}{}^0\in\bar{Y}_{Mg},\ 1\leqq r_0\leqq h_g(\alpha_0)$$

で表わせる．

$r^\nu=(r^0/h_g(\alpha^0))h_g(\alpha^\nu)$ と置く．$r^0/h_g(\alpha^0)\leqq1$ より，$r^\nu\leqq h_g(\alpha^\nu)$ である．$r^\nu<1$ の時，$r^{\nu\prime}=1$，$1\leqq r^\nu$ の時，$r^{\nu\prime}=r^\nu$ と置く．さらに

$$y_{Mg}{}^\nu=(\bar{y}_{Mg1}{}^0,\ \bar{y}_{Mg2}{}^0,\ \cdots,\ r^{\nu\prime}\bar{y}_{Mgg}{}^0,\cdots,\bar{y}_{Mgn}{}^0)$$

と置こう．明らかに $y_{Mg}{}^\nu\in Y_{Mg}(\alpha^\nu)$ である．

$A=\{\nu|r^\nu<1\}$ が $\{\nu\}$ の部分列である時，$\forall\nu\in A$ に対し，$1\leqq r^0<(h_g(\alpha^0)/h_g(\alpha^\nu))$ であるから，$r_0=1$ である．このことから，$y_{Mg}{}^\nu\to y_{Mg}{}^0$ は明らかとなる．したがって $Y_{Mg}(\alpha)$ は α に関して下半連続である．

Q.E.D.

〔補助定理 3〕 Y_{Mg} は凸，閉集合であり，原点を含む．$(g=1,\ \cdots,\ n)$

証　明

[a] 閉集合であること．

Y_{Mg}，$h_g(\alpha)$ の作り方，および $\bar{Y}_{Mg}$ のコンパクト性より明らかである．

[b] 凸集合であること．

$Y_{Mg}(\alpha)$ の作り方より任意の $\alpha_1,\ \alpha_2\ (\geqq0)$ に対して，$Y_{Mg}(\alpha_1)\supset Y_{Mg}(\alpha_2)$ または $Y_{Mg}(\alpha_1)\subset Y_{Mg}(\alpha_2)$ が成り立つ．さらに〔補助定理 1〕より $Y_{Mg}(\alpha)$ は凸集合であるから，明らかに Y_{Mg} は凸集合となる．$0\in Y_{Mg}$ は自明であろう．

Q.E.D.

われわれは以下で，Arrow & Hahn [1] による均衡存在証明を利用するので，次の補助定理を必要とする．

〔補助定理 4〕 $0<k<1$ なる任意の k に対し，

$$y_{Mg}{}^k(p,\ w)=\{y_{Mg}{}'|\max[k\cdot f_{Mg}(y_{Mg}{}',\ p,\ w)-(1-k)\|y_{Mg}{}'\|]\ \text{s.t.}\ y_{Mg}{}'\in Y_{Mg}(w)\}$$

は $(p,\ w)$ に関して連続関数である．ただし便宜上，$C_g(w)=y_{Mgg}$ というプロジェクションに対し，$Y_{Mg}(C_g(w))=Y_{Mg}(w)$ と書く．

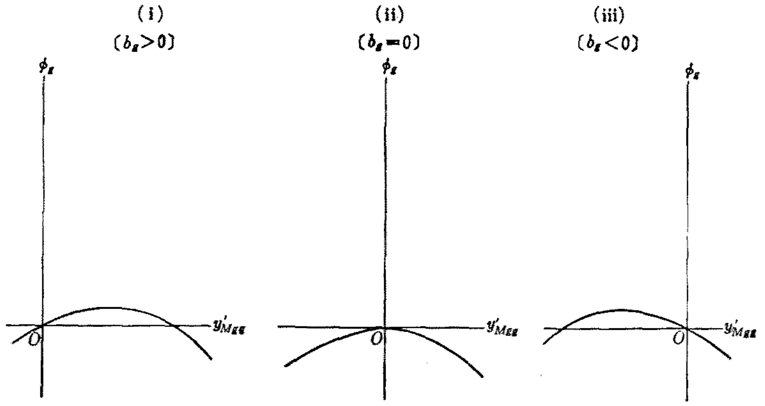
さて，主観的逆需要関数 $\tilde{p}_g(\cdots)$ の線型性は，この補助定理の証明において重要な役割を果たすので，前もってその性質を調べておこう．最初に

$$\tilde{p}_g(y_{Mgg}{}',\ p,\ w)=a_g(p,\ w)\cdot y_{Mgg}{}'+b_g(p,\ w),$$
$$a_g(p,\ w)<0$$

と置く．さらに

$$\begin{aligned}f_{Mg}(y_{Mg}{}',p,w)&=\{a_g(p,\ w)\cdot y_{Mgg}{}'+b_g(p,\ w)\}\cdot y_{Mgg}{}'+\sum_{j\neq g}p_jy_{Mgj}{}'\\&=\phi_g(y_{Mg}{}',\ p,\ w)+\sum_{j\neq g}\phi_j(y_{Mg}{}',\ p)\end{aligned}$$

と置く．$\phi_g(y_{Mg}{}',\ p,\ w)=a_g(p,\ w)\cdot[y_{Mgg}{}']^2+b_g(p,\ w)\cdot y_{Mgg}{}'$ かつ $a_g(p,\ w)<0$ であるか



第 3 図

ら，$b_g(\cdots)\gtreqless 0$ に応じて，第3図 (i)，(ii)，(iii) を得る．

$\phi_g(\cdots)>0$ となるのは第3図 (i) の場合のみである．というのは $y_{Mgg}'\geqq 0$ だからである．さらに $f_{Mg}(\cdots)>0$ となるのは第3図 (i) の場合のみである．というのは $y_{Mgj}'\leqq 0$ $(j\neq g)$ だからである．

さて〔補助定理4〕の証明に移ろう．

証　明

［a］ (p, w) に関して関数であること．

最初に $y_{Mg}^k(p, w)$ は (p, w) に関して点対集合写像ではなく，関数（点対点写像）であることを示そう．max{…} は $0\in Y_{Mg}(w)$ より非負になる．したがって次の二つの場合を考えればよい．

[a-1] $\max\{kf_{Mg}(y_{Mg}', p, w)-(1-k)\|y_{Mg}'\|\}=0$ の場合．

この場合，0のみがこの関係を満たすことを示そう．$y_{Mg}'(\neq 0)$ がこの関係を満たすと仮定する．$kf_{Mg}(y_{Mg}', p, w)=(1-k)\|y_{Mg}'\|>0$ より $f_{Mg}(y_{Mg}', p, w)>0$ である．上述のようにこれは第3図 (i) においてのみ可能である．したがって $y_{Mgg}'>0$ となる．明らかに $\phi_g(\beta y_{Mg}', p, w)>\beta\phi_g(y_{Mg}', p, w)$, $0<\beta<1$ である．以上より $f_{Mg}(\beta y_{Mg}', p, w)>\beta\cdot f_{Mg}(y_{Mg}', p, w)$ となるから，

$$kf_{Mg}(\beta y_{Mg}', p, w)-(1-k)\|\beta y_{Mg}'\| >\beta[kf_{Mg}(y_{Mg}', p, w)-(1-k)\|y_{Mg}'\|]=0$$

そして $\beta y_{Mg}'\in Y_{Mg}(w)$, $0<\beta<1$ となることは明らかである．これは [a-1] の定義に矛盾する．

[a-2] $\max\{kf_{Mg}(y_{Mg}', p, w)-(1-k)\|y_{Mg}'\|\}=\varepsilon>0$ の場合．

y_{Mg}^1 と y_{Mg}^2 がこの関係を満たすとしよう．ただし $y_{Mg}^1\neq y_{Mg}^2$ と置く．$kf_{Mg}(y_{Mg}^1, p, w)=\varepsilon+(1-k)\|y_{Mg}^1\|>0$ より $f_{Mg}(y_{Mg}^1, p, w)>0$ を満たす．上述の説明より $y_{Mgg}^1>0$ となる．まったく同様に，$f_{Mg}(y_{Mg}^2, p, w)>0$，および $y_{Mgg}^2>0$ を得る．

[a-2-i] $y_{Mgg}^1=y_{Mgg}^2$ の場合．

$$y_{Mg}(\beta)=\beta y_{Mg}^1+(1-\beta)y_{Mg}^2,\ 0<\beta<1$$

と置く．一般には

$$\|y_{Mg}(\beta)\|\leqq\beta\|y_{Mg}^1\|+(1-\beta)\|y_{Mg}^2\| \qquad (2)$$

であるが，この場合厳密な不等号が成り立つ．実際もし等号が成り立つとすると，まず周知の数学的定理より，$\beta y_{Mg}^1=l(1-\beta)y_{Mg}^2$ なる l が存在する．$\beta>0$, $y_{Mgg}^1=y_{Mgg}^2>0$ より $l(1-\beta)/\beta=1$ を得る．この時，$y_{Mg}^1=y_{Mg}^2$ となるが，これは矛盾である．したがって厳密な不等号が成り立つ．さらに

$$f_{Mg}(y_{Mg}(\beta), p, w)\geqq\beta f_{Mg}(y_{Mg}^1, p, w)+(1-\beta)f_{Mg}(y_{Mg}^2, p, w)$$

であるから

$$kf_{Mg}(y_{Mg}(\beta), p, w)-(1-k)\|y_{Mg}(\beta)\|>\varepsilon$$

を得る．明らかに $y_{Mg}(\beta)\in Y_{Mg}(w)$, $0<\beta<1$ を満たすから，これが求めていた矛盾である．

[a-2-ii] $y_{Mgg}^1\neq y_{Mgg}^2$ の場合．

第3図 (i) より明らかなように任意の β:

$0<\beta<1$ に対して，

$$f_{Mg}(y_{Mg}(\beta),\ p,\ w)>\beta f_{Mg}(y_{Mg}{}^1,\ p,\ w)+(1-\beta)f_{Mg}(y_{Mg}{}^2,\ p,\ w)$$

である．(2) 式を使って

$$kf_{Mg}(y_{Mg}(\beta),\ p,\ w)-(1-k)\|y_{Mg}(\beta)\|>\varepsilon$$

を得る．これが求めていた矛盾である．

［b］ $(p,\ w)$ に関して連続であること．

[a] において $y_{Mg}{}^k(p,\ w)$ は $(p,\ w)$ に対してただ一つの $y_{Mg}{}'\in Y_{Mg}(w)$ を対応させる関数であることが示された．

そこでもし，$y_{Mg}{}^k(p,\ w)$ は $(p,\ w)$ に関して連続でないと仮定すれば，矛盾が生じることを示そう．$(p^0,\ w^0)$ において不連続とすると $(p^\nu,\ w^\nu)\to(p^0,\ w^0)$ なる点列に対して $y_{Mg}{}^\nu=y_{Mg}{}^k(p^\nu,\ w^\nu)$ は $y_{Mg}{}^0=y_{Mg}{}^k(p^0,\ w^0)$ へ収束しない．$y_{Mg}{}^\nu\in Y_{Mg}$ であり，Y_{Mg} は明らかに有界であるから，収束する部分列を持つ．それ自身 $\bar{y}_{Mg}$ へ収束すると仮定して，一般性を失わない．明らかに $\bar{y}_{Mg}\neq y_{Mg}{}^0$ と置いてよい．仮定より $y_{Mg}{}^\nu\in Y_{Mg}(w^\nu)$ であり，$Y_{Mg}(w)$ は w に関して上半連続な写像であるから，$\bar{y}_{Mg}\in Y_{Mg}(w^0)$ を得る．さらに $y_{Mg}{}^0\in Y_{Mg}(w^0)$ と $Y_{Mg}(w)$ は w に関して下半連続であることを考慮すると，$z^\nu\in Y_{Mg}(w^\nu)$，$z^\nu\to y_{Mg}{}^0$ なる点列 $\{z^\nu\}$ が存在する．

$$h(y_{Mg}{}',\ p,\ w)=kf_{Mg}(y_{Mg}{}',\ p,\ w)-(1-k)\|y_{Mg}{}'\|$$

と仮定すると，定義より

$$h(y_{Mg}{}^\nu,\ p^\nu,\ w^\nu)\geqq h(z^\nu,\ p^\nu,\ w^\nu)$$

となり，明らかに $h(y_{Mg}{}',\ p,\ w)$ は $y_{Mg}{}'$，p，および w に関して連続関数であるから

$$h(\bar{y}_{Mg},\ p^0,\ w^0)\geqq h(y_{Mg}{}^0,\ p^0,\ w^0)$$

を得る．$y_{Mg}{}^0$ の定義より $h(y_{Mg}{}^0,p^0,w^0)=h(\bar{y}_{Mg},\ p^0,\ w^0)\geqq h(y_{Mg}{}',\ p^0,\ w^0)$ $(\forall y_{Mg}{}'\in Y_{Mg}(w^0))$ より $y_{Mg}{}^k(p^0,\ w^0)\supset\{y_{Mg}{}^0,\ \bar{y}_{Mg}\}$，$y_{Mg}{}^0\neq\bar{y}_{Mg}$ となるが，これは $y_{Mg}{}^k(p,\ w)$ の $(p,\ w)$ に関する一価性と矛盾する．

よって $y_{Mg}{}^k(p,\ w)$ は $(p,\ w)$ に関する連続関数であることが証明された．　Q.E.D.

上で証明してきた四つの補助定理によって，われわれは Arrow & Hahn [1] の諸仮定を満たす関数や集合を作ったことになる．[9] そこで，$0<k^\nu<1$，$k^\nu\to1$ なる数列をとる．Arrow & Hahn [1] の証明を直接に適用することにより，次のような結果を得る．[10] すなわち任意の k^ν に対し次の条件を満たす $(p^{*\nu},\ w^{*\nu})$ が存在する．

（a） $p^{*\nu}>0$

（b） $\sum_i x_i{}^{*\nu}\leqq\sum_i\omega_i+\sum_f y_{Cf}{}^{*\nu}+\sum_g y_{Mg}{}^{*\nu}$

（c） $y_{Cf}{}^{*\nu}$ は Y_{Cf} 上で $p^{*\nu}y_{Cf}$ を最大にする．$(f=1,\ \cdots,\ k)$

（d） $x_i{}^{*\nu}$ は $p^{*\nu}x_i\leqq M_i{}^{*\nu}$ という条件のもとで $u_i(x_i)$ を最大にする．$(i=1,\ \cdots,\ m)$

（e） $y_{Mg}{}^{*\nu}$ は $y_{Mg}\in Y_{Mg}(y_{Mgg}{}^{*\nu})$ という条件のもとで $k^\nu f_{Mg}(y_{Mg},\ p^{*\nu},\ w^{*\nu})-(1-k^\nu)\|y_{Mg}\|$ を最大にする．$(g=1,\ \cdots,\ n)$

$k^\nu\to1$ として最終的に〔定義1〕を満たす均衡が存在することを示そう．$k^\nu\to1$ の時，それぞれの $(p^{*\nu},\ w^{*\nu})$ はあるコンパクト集合に属す

9) Arrow & Hahn [1] 自身の諸仮定 (Assumption—12～19. [1] pp. 153-161) のうち，Assumption—13～15 については，Y_{Mg} がそれぞれコンパクト，凸集合であり，かつ原点を含むことから容易に示せるように，われわれの仮定で充分である．Assumption-18 は，本論稿の第2節の部分ではわれわれの〔仮定 3-(f)〕により満たされている．さらに本論稿の第3節の部分では，われわれの〔仮定9〕により，Assumption-18 は不要となることの証明は容易である．そこで最後に，Arrow & Hahn [1] の Assumption-16 について注意しておこう．彼らは $p\cdot y_{Mg}(p,\ w)\geqq0$ $(\forall p,\ \forall w)$ と仮定している．しかし彼ら自身の証明によって明らかなように，不動点において $p^*\cdot y_{Mg}(p^*,\ w^*)\geqq0$ が成立していれば充分である ([1] p. 164)．この条件が満たされることは次のように示される．記号は Arrow & Hahn [1] に従う．不動点において $(x^*,\ y_C{}^*)\in\hat{W}_C(u^*,\ y_M{}^*)$ であるから，$\sum_i x_i{}^*\leqq\sum_i\omega_i+\sum_f y_{Cf}{}^*+\sum_g y_{Mg}{}^*$ が成り立つ ([1] p. 158, p. 163)．とくに，$y_{Mgg}{}^*\geqq\sum_i x_{ig}{}^*-\sum_f y_{Cfg}{}^*-\sum_{j\neq g}y_{Mjg}{}^*-\sum_i\omega_{ig}=y_{Mgg}{}''$ である．〔仮定8〕より $\bar{p}_g(\cdots)$ は右下がり関数であるから，$p_g{}^*\geqq\bar{p}_g(y_{Mgg}{}^*,\ p^*,\ w^*)$ である．$y_{Mgg}{}^*\geqq0$ を考慮すると，$p^*\cdot y_{Mg}{}^*\geqq f_{Mg}(y_{Mg}{}^*,\ p^*,\ w^*)\geqq0$ である．われわれのモデルは Y_{Mg} の凸性を保証しているから，Arrow & Hahn [1] のように gauge 関数を使用する必要はなく，$y_{Mg}{}^*=y_{Mg}(p^*,\ w^*)$ はただちに保証される．以上から不動点において $p^*\cdot y_{Mg}(p^*,\ w^*)\geqq0$ を得る．

10) このような証明の手順はクールノー的寡占のもとで奥口 [6] により行なわれた．もっとも彼は異なる関数を使用している（奥口 [6] pp. 9-12)．

る.[11] したがって一般性を失うことなく $p^{*\nu}\to p^*$, $w^{*\nu}\to w^*$ と置いてよい. $p^*\in S^{r-1}$ だから,〔定義 1-(a)〕は満たされている.〔定義 1-(b) および (c)〕が満たされているのは明らかである. $Y_{Mg}(\alpha)$ が α に関する連続な点対集合写像であることを考慮すると〔定義 1-(e)〕を満たすのは容易に示される. したがって〔定義 1-(d)〕を満たすことが示されれば証明は完了する.

そこで, ある家計 i について $u_i(x_i^0)>u_i(x_i^*)$, $p^*x_i^0\leqq M_i^*$ を満たす $x_i^0\in X_i$ が存在したと仮定しよう. $\omega_i\gg 0$ であるから, $M_i^{*\nu}, M_i^*>0$ である. $t^{*\nu}=\max\{t|p^{*\nu}(tx_i^0)\leqq M_i^{*\nu}, 0\leqq t\leqq 1\}$ と置く.〔仮定3〕より一般性を失うことなく, $p^*x_i^0>0$ と仮定してよい. $0\leqq t^{*\nu}\leqq 1$ より $t^{*\nu}\to t^*$ と置こう. $t^*<1$ とすれば矛盾が生じる. というのはまず $M_i^{*\nu}<p^{*\nu}x_i^0$ を満たすような $\{t^{*\nu}\}$ の部分列が存在する. 定義より充分大きな ν に対して $t^{*\nu}=M_i^{*\nu}/(p^{*\nu}x_i^0)$ であるから $M_i^*<p^*x_i^0$ となる. これは x_i^0 の仮定と矛盾する. よって $t^*=1$ である. この場合 $p^{*\nu}(t^{*\nu}x_i^0)\leqq M_i^{*\nu}$ であり, かつ $t^{*\nu}x_i^0\to x_i^0$ となる点列 $\{t^{*\nu}x_i^0\}$ が存在することを意味する. $t^{*\nu}x_i^0\in X_i$ は〔仮定 3-(f)〕より保証される. 任意の ν に対して $u_i(t^{*\nu}x_i^0)\leqq u_i(x_i^{*\nu})$ であるから, $u_i(x_i^0)\leqq u_i(x_i^*)$ となる. これがもともと求めていた矛盾である. したがって〔定義 1-(d)〕は満たされる. そこで,

〔定理 1〕〔仮定 1〜8〕のもとで均衡が存在する.

3. 〔仮定 3-(f)〕の緩和

第2節において述べたように,〔仮定 3-(f)〕は製品差別化と矛盾する仮定である. そこでわれわれは〔仮定 3-(f)〕を次のようにかえよう.

〔仮定 3-(f′)〕 $\omega_i\geqq 0$. しかし $z=\sum_i\omega_i+\sum_g y_{Mg}$ を任意の初期保有とみなす時, いかなる家計も, いかなる他の家計とも indirectly resource-related である. ただし y_{Mg} は Y_{Mg} から任意に選ばれる.

この仮定において indirectly resource-related の概念は Arrow & Hahn [1] によるが, 直観的には次のことを意味する. すなわち, ある家計の資産が増加するとその増加分を経済全体に分配して少なくとも一つの家計の効用水準を以前より増加させ, 他のすべての家計の効用水準を以前と同じに維持することができる.[12]

われわれは〔仮定 3-(f)〕を上述のように緩和したけれども, 次のように, 他の仮定の変更を必要とする. すなわち,

〔仮定 3-(e′)〕 選好関係は次の性質を持つ.

$x_i^1\sim x_i^2$, $x_i^1\neq x_i^2$, および $0<\beta<1$ であれば $\beta x_i^1+(1-\beta)x_i^2\underset{i}{>}x_i^1$ である.

Debreu [3] は〔仮定 3-(e′)〕と〔3-(c)〕が満たされる時〔仮定 3-(e)〕も満たされることを証明した.[13]

その他, 次の仮定が必要となる. この仮定であれば製品差別化と矛盾しないことは明らかである.

〔仮定 9〕 $\sum_i\omega_i+\sum_f y_{Cf}+\sum_g y_{Mg}\gg 0$ となるような $y_{Cf}\in Y_{Cf}(\forall f)$, $y_{Mg}\in\overline{Y}_{Mg}(\forall g)$ が存在する.

〔仮定9〕は, 社会全体の生産設備を使って生産する時, 初期保有と合わせるとあらゆる商品を生み出すことが可能であることを意味する.

これらの変更により次の定理を得る.

〔定理 2〕〔仮定 1〜3-(d)〕,〔3-(e′)〕, および〔3-(g)〜9〕のもとで均衡が成立する.

証　明

Arrow & Hahn [1] による証明から容易にわかるように, 均衡ではなく補償均衡 (compensated equilibrium) が成り立つことを示せば, この証明は完了する.[14] 同様に彼らの証明から次のことは明らかである. すなわち,

$x_i^{*\nu}$ は $u_i(x_i)\geqq u_i^{*\nu}$ のもとで $p^{*\nu}x_i$ $(x_i\in X_i)$

11) Arrow & Hahn [1] p. 162.

12) *Ibid.*, p. 161.

13) Debreu [3] p. 61.

14) 〔定義 1-(d)〕にかえて次のような〔定義1-(d′)〕を置く時, 補償均衡 (compensated equilibrium) が成立するといわれる (Arrow & Hahn [1] p. 108).
〔定義 1-(*d′*)〕 x_i^* は $u_i(x_i)\geqq u_i^*$ の条件のもとで $p^*\cdot x_i$ を最小にする. $(i=1, \cdots, m)$
補償均衡が成り立てば証明が完了することについては, とくに [1] p. 163. および p. 109 (Theorem-2) を参照されたい. [1] p. 163 の $\sum_h M_h>0$ なる条件が満たされることは〔仮定 3-(*f′*)〕および〔仮定 9〕より明らかである.

を最小にする．$(\forall i)$ (3)

この時，x_i^* が $u_i(x_i) \geqq u_i^*$ のもとで $p^* x_i$ を最小にするということを示せば充分である．そこで $k^\nu \to 1$ の時，ある家計 i について $u_i(x_i^0) \geqq u_i^*$，かつ $p^* x_i^0 < p^* x_i^*$ を満たす $x_i^0 \in X_i$ が存在したとしよう．$x_i^{*\nu}$ の定義から一般性を失うことなく次のように仮定してよい．すなわち，

$$u_i(x_i^0) < u_i(x_i^{*\nu})\ (\forall \nu) \qquad (4)$$

こう仮定すると，今度は x_i^0 の定義から任意の $x_i^{*\nu}$ は $p^{*\nu} x_i^0 < p^{*\nu} x_i^{*\nu}$ を満たすと仮定して一般性を失わない．$0 < \beta < 1$ なる任意の β を選んで固定しよう．明らかに，

$$p^{*\nu} x_i^{*\nu} > p^{*\nu}(\beta x_i^{*\nu} + (1-\beta) \cdot x_i^0) > p^{*\nu} x_i^0 \qquad (5)$$

が成り立つ．(4) 式および $u_i(x_i)$ の性質より $u_i(x_i^0) < u_i(\beta x_i^{*\nu} + (1-\beta) x_i^0)$ である．この時 (5) 式より

$$u_i(x_i^0) < u_i(\beta x_i^{*\nu} + (1-\beta) x_i^0) < u_i^{*\nu}$$

となる．さらに $\nu \to \infty$ と置くと，

$$u_i(x_i^0) \leqq u_i(\beta x_i^* + (1-\beta) x_i^0) \leqq u_i^* \leqq u_i(x_i^0)$$

となる．したがって任意の β: $0 < \beta < 1$ に対して，

$$u_i(x_i^0) = u_i(\beta x_i^* + (1-\beta) x_i^0) = u_i^* \qquad (6)$$

を得る．もし $u_i(x_i^0) = u_i^* < u_i(x_i^*)$ であれば，(6) 式は〔仮定 3-(e)〕と矛盾する．$u_i(x_i^0) = u_i^* = u_i(x_i^*)$ の時，(6) 式は〔仮定 3-(e')〕と矛盾する．

Q.E.D.

最後に結合生産にふれておこう．われわれは〔仮定 4〕において結合生産を排除したのであるが，〔補助定理 4〕の証明からわかるように，この仮定はそれほど重要ではない．実際，もしそれぞれの独占企業にとって結合生産は可能であるが，収穫逓増をもたらす商品はただ一つであると仮定し，さらに独占商品を示すベクトルの要素はつねに非負であり，投入はすべて非正であると仮定すれば，〔補助定理 4〕の証明はほとんどそのまま成立する．

(神戸大学)

参考文献

[1] Arrow, K. J. and F. H. Hahn (1971), *General Competitive Analysis*, San Francisco; Holden Day.

[2] Chipman, J. S. (1970), "External Economies of Scale and Competitive Equilibria," *Quarterly Journal of Economics* 84, 347–385.

[3] Debreu, G. (1959), *Theory of Value*, New York; John Wiley.

[4] Negishi, T. (1961), "Monopolistic Competition and General Equilibrium," *Review of Economic Studies* 28, 196–201.

[5] Negishi, T. (1972), *General Equilibrium Theory and International Trade*, Amsterdam; North Holland.

[6] 奥口孝二 (1971), 寡占の理論，東京；創文社.