常微分方程式の爆発解の複数項漸近展開

○松江 要 * , 落合 啓之 † , 小谷 久寿 ‡ , 佐々木 多希子 § , 浅井 大晴 ¶

キーワード: 爆発解, 無限遠不変集合, 漸近展開

1 始めに

常微分方程式の初期値問題

$$\mathbf{y}' = f(\mathbf{y}),\quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0,\quad {}' = \frac{d}{dt},\quad f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : C^r,\, r \geq 1 \tag{1.1}$$

の有限時間爆発解を考察する. ただし, $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n)^T$ とする. 基礎的な問いとして, **(1.1) の爆発解は存在するか**があり, 存在するならば, 続いて**いつ, どこで, どのように爆発するか**という問いが続く. 先行して力学系的に爆発解を捉え直した試みが [2] などで示されている. [2] ではコンパクト化と時間スケール特異点解消により, 爆発解を (適切に変換されたベクトル場の, 無限遠に対応する) **地平線上の平衡点・周期軌道の (中心) 安定多様体**上の軌道と対応させることで詳細な振る舞いがわかる事を論じている. 上の方法および多くの爆発解の研究では, 爆発解の漸近挙動を**爆発レート**として記述している. 一方, 爆発レートはそのほとんどで第 1 項を求めるに留まっている. 我々は関数の局所的な振る舞いを級数展開などにより観察するとき, **複数項**導出して詳細な構造を見る. 爆発解に対しても, その詳細な振る舞いを知りたいと思う時に複数項を見ようとするのは自然であろう. 本講演では, 爆発解の複数項漸近展開の体系化の最初のステップと位置付けられる結果を述べる.

2 爆発解の複数項漸近展開

無限遠ダイナミクスを用いた爆発解の特徴づけ (e.g. [2]) は, 爆発解の漸近展開の第 1 項を与える. 特に, 具体的な微分方程式に対して爆発解の存在を仮定する事なくその存在を証明でき, **爆発レート**として知られる漸近挙動を知ることができる. よって, (上述の結果および別の議論を通して) 本節では (1.1) の爆発解 $\mathbf{y}(t)$ で, 以下の振る舞いを持つものの存在を仮定する:

$$y_i(t) \sim C_{0i}(t_{\max} - t)^{-\alpha_i/k},\quad t \to t_{\max} - 0,\quad i = 1, \cdots, n. \tag{2.1}$$

ここから爆発解 $\mathbf{y}(t)$ を

$$y_i(t) = (t_{\max} - t)^{-\alpha_i/k} Y_i(t),\quad \mathbf{Y}(t) = (Y_1(t), \cdots, Y_n(t))^T \tag{2.2}$$

と書き, $\mathbf{Y}(t)$ の形を決定する. 漸近展開の基礎は [1, 3] などを参照せよ.

まず, 漸近的擬斉次ベクトル場 f を以下のように分解する:

$$f(\mathbf{y}) = f_{\alpha,k}(\mathbf{y}) + f_{\mathrm{res}}(\mathbf{y}).$$

*九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 (IMI), カーボンニュートラル・エネルギー国際研究所 (I^{2}CNER) / 科学技術振興機構 研究開発戦略センター (JST-CRDS) (`kmatsue@imi.kyushu-u.ac.jp`)
†九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
‡東北大学材料科学高等研究所
§武蔵野大学工学部数理工学科 / 東北大学大学院理学研究科数学専攻
¶早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻

ここに, $f_{\alpha,k}$ は f の擬斉次成分, f_{res} は低次の項である. 両方とも成分表示しておく:

$$f_{\alpha,k}(\mathbf{y}) = (f_{1;\alpha,k}(\mathbf{y}), \cdots, f_{n;\alpha,k}(\mathbf{y}))^T, \quad f_{\mathrm{res}}(\mathbf{y}) = (f_{1;\mathrm{res}}(\mathbf{y}), \cdots, f_{n;\mathrm{res}}(\mathbf{y}))^T.$$

次に, (2.2) を (1.1) に代入する:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_i}{k}(t_{\max}-t)^{-\alpha_i/k-1}Y_i + (t_{\max}-t)^{-\alpha_i/k}Y_i' &= f_{i;\alpha,k}(\mathbf{y}) + f_{i;\mathrm{res}}(\mathbf{y}) \\ &= (t_{\max}-t)^{-(k+\alpha_i)/k} f_{i;\alpha,k}(\mathbf{Y}) + f_{i;\mathrm{res}}(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

最後の等式は $f_{\alpha,k}(\mathbf{y})$ の擬斉次性を用いた. そして各 i に対して両辺 $(t_{\max}-t)^{\frac{\alpha_i}{k}+1}$ をかける事で, 以下を得る:

$$\theta Y_i = -\frac{\alpha_i}{k}Y_i + f_{i;\alpha,k}(\mathbf{Y}) + (t_{\max}-t)^{\frac{\alpha_i}{k}+1} f_{i;\mathrm{res}}(\Theta_{\alpha,k}(t)^{-1}\mathbf{Y}).$$

ベクトル表記して

$$\theta\mathbf{Y} = -\Lambda_{\alpha,k}\mathbf{Y} + f_{\alpha,k}(\mathbf{Y}) + (t_{\max}-t)\Theta_{\alpha,k}(t) f_{\mathrm{res}}(\Theta_{\alpha,k}(t)^{-1}\mathbf{Y}), \tag{2.3}$$
$$\Lambda_{\alpha,k} = \mathrm{diag}\left(\frac{\alpha_1}{k}, \cdots, \frac{\alpha_n}{k}\right), \quad \Theta_{\alpha,k}(t) = \mathrm{diag}\left((t_{\max}-t)^{\alpha_1/k}, \cdots, (t_{\max}-t)^{\alpha_n/k}\right).$$

ただし, θ は **Euler 作用素**である:

$$\theta = (t_{\max}-t)\frac{d}{dt}.$$

一般に $f_{i;\mathrm{res}}(\Theta_{\alpha,k}(t)^{-1}\mathbf{Y})$ は $t \to t_{\max} - 0$ で発散するが, 漸近的擬斉次性より $\Theta_{\alpha,k}(t) f_{\mathrm{res}}(\Theta_{\alpha,k}(t)^{-1}\mathbf{Y})$ は $t \to t_{\max} - 0$ で 0 に収束する. ここで重要な点は, $\mathbf{Y}$ の微分方程式が一般に非自励的微分方程式となるが, 擬斉次性の次数に関わらず, Euler 作用素 θ を除いて $\mathbf{Y}$ の $(t_{\max}-t)$ についての低次の項が自励的な部分 ((2.3) の右辺第 1 項, 第 2 項) にしか現れない事である. これにより, 主要成分を線型化・対角化する事で, n 本の単独非斉次微分方程式の求解に問題を帰着できる.

2.1 釣り合いの式

まず, (2.1) は $\mathbf{Y}(t)$ に対して次の事実を与える: $\mathbf{Y}(t)$ は $t < t_{\max}$ で f と同程度の滑らかさを持ち,

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}_0 + \tilde{\mathbf{Y}}(t), \quad \mathbf{C}_0 = (C_{01}, \cdots, C_{0n})^T, \quad \lim_{t\to t_{\max}-0} \tilde{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n. \tag{2.4}$$

定数項 $\mathbf{C}_0$ は $\mathbf{Y}(t)$ の最低次の項を与える. まずはこれを求める必要があるが, それは $(t_{\max}-t)$ に依存しない項である. それは (2.3) において $t \to t_{\max} - 0$ として,

$$\Lambda_{\alpha,k}\mathbf{C}_0 = f_{\alpha,k}(\mathbf{C}_0) \tag{2.5}$$

を満たす. これの解が, 爆発レートとして知られる第 1 項の係数を決める.

定義 2.1. (2.5) を爆発解 $\mathbf{y}(t)$ の **(最低次の) 釣り合いの式**と呼ぶ.

ここから, 簡単のため $f_{\alpha,k}$ は $\mathbf{C}_0$ において, また f_{res} は曲線

$$\left\{\mathrm{diag}\left(r^{-\alpha_1/k}, \cdots, r^{-\alpha_n/k}\right)\mathbf{C}_0 \mid r \in (0,\infty)\right\}$$

の各点で解析的であると仮定する.

2.2 ベキを決める固有値

定数項 $\mathbf{C}_0$ が決まれば, 次は非定数項である. 一般にはどのような形をしているかわからない[1]ので, $\tilde{Y}_i(t)$ の $t \to t_{\max} - 0$ における漸近展開を

$$\tilde{\mathbf{Y}}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{Y}_j(t), \quad \mathbf{Y}_0 = \mathbf{C}_0, \quad \mathbf{Y}_j(t) \ll \mathbf{Y}_{j-1}(t) \quad (t \to t_{\max} - 0), \quad j = 1, 2, \cdots \tag{2.6}$$

[1] 典型的には**ベキ級数**で展開したくなるだろうが, ベキ級数で展開できる保証はどこにもない.

とし, 各項を釣り合いをもって求める事にする．以下の話は全て $t \to t_{\max} - 0$ における局所的な議論である事に注意する．f を滑らかとしていたので, (2.3) の右辺を $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_0$ で Taylor 展開する:

$$\begin{aligned} \theta\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{Y}_j\right) = -\Lambda_{\alpha,k}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{Y}_j\right) + \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} D^m f_{\alpha,k}(\mathbf{C}_0)[\tilde{\mathbf{Y}}]^{(m)}\right] \\ + (t_{\max} - t)\Theta_{\alpha,k}(t)\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} D^m f_{\text{res}}(\Theta_{\alpha,k}(t)^{-1}\mathbf{C}_0)[\Theta_{\alpha,k}(t)^{-1}\tilde{\mathbf{Y}}]^{(m)}\right], \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$D^m f_{\alpha,k}(\mathbf{C}_0)[\tilde{\mathbf{Y}}]^{(m)} = D^m f_{\alpha,k}(\mathbf{C}_0)[\underbrace{\tilde{\mathbf{Y}}, \cdots, \tilde{\mathbf{Y}}}_{m}].$$

ただし, 最低次の釣り合いの式で消える項はキャンセルしている．ここで, 第 2 項 $\mathbf{Y}_1$ の釣り合いを考えてみる．(2.6) から, 左辺の主要項は $j = 1$ の部分である．対して右辺は, 第 1 項は $j = 1$ の部分, 第 2 項は $m = 1$ の部分のみである．第 3 項からは定数項に $(t_{\max} - t)^{\frac{\alpha_i}{k}+1}$ をかけたものであるが, これが主要項として効いてくるかは α_i/k の値と, $\frac{d}{dt}Y_{1i}$ の振る舞い方に依存する．ただし, $i = 1, \cdots, n$ に対して Y_{1i} は $\mathbf{Y}_1$ の第 i 成分である．今回は残す場合を考える．まとめると, 第 2 項 $\mathbf{Y}_1$ は (正規形で書くと) 漸近的に以下の方程式が決めると結論される:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Y}_1 = (t_{\max} - t)^{-1}\left\{-\Lambda_{\alpha,k} + Df_{\alpha,k}(\mathbf{C}_0)\right\}\mathbf{Y}_1 + \Theta_{\alpha,k}(t) f_{\text{res}}(\Theta_{\alpha,k}(t)^{-1}\mathbf{C}_0). \tag{2.8}$$

これは非斉次**線型**の方程式である．さらに斉次部分を見ると, その係数行列は共通因子 $(t_{\max} - t)^{-1}$ を持ち, これに**定数行列**をかけたものとなっている．特にこの定数行列を対角化し, n 本の 1 階単独線型非斉次微分方程式の求解に問題を帰着できる．

定義 2.2. 定数行列

$$A = -\Lambda_{\alpha,k} + Df_{\alpha,k}(\mathbf{C}_0)$$

を爆発解 $\mathbf{y}(t)$ の**爆発ベキ決定行列**と呼び, その固有値 $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ を**爆発ベキ固有値**と呼ぶ事にする．

今, A が対角化可能, すなわちある正則行列 P に対して $P^{-1}AP = \Lambda$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ となると仮定する．この時, 座標変換 $\mathbf{Y}_1 = P\mathbf{W}_1$ を導入して, (2.8) の一般解の $\mathbf{W}_1$-座標による表示は以下のようになる:

$$\mathbf{W}_1(t) = (t_{\max} - t)^{-\Lambda}\left[\mathbf{W}_1^0 + \int^t (t_{\max} - s)^{\Lambda} P^{-1}\mathbf{g}_1(s)ds\right], \quad \mathbf{g}_1(s) = \Theta_{\alpha,k}(s) f_{\text{res}}(\Theta_{\alpha,k}(s)^{-1}\mathbf{C}_0). \tag{2.9}$$

第 2 項は $(t_{\max} - t)^{-\Lambda}$ が最終的に生じるベキに影響を与えず, $\Theta_{\alpha,k}(t)$ が正ベキしか持たない[2]ため, 結果として正ベキしか出てこない．さて, 定数項 $\mathbf{W}_1^0$ は $(t_{\max} - t)^{-\lambda_i}$ の係数となっている．ここで (2.6) を考慮すると, 真に 0 でない項として取り得る爆発ベキ固有値は**負の実部を持つものに制限される**．**実部 0 以上**の爆発ベキ固有値に対しては, **対応する成分** W_{1i}^0 **を 0 にする**事で整合性が取れる．結果として, 元の座標に戻した解 $\mathbf{Y}_1(t)$ は

$$\{(t_{\max} - t)^{-\lambda_i} \mid \lambda_i \in \mathrm{Spec}(A), i \in \{1, \cdots, n\}, \mathrm{Re}\,\lambda_i < 0\}, \quad \{(t_{\max} - t)^{\alpha_i/k} \mid i \in \{1, \cdots, n\}\}$$

の線型結合, および低次項 f_{res} から生じるベキで記述できる．全て $(t_{\max} - t)$ の正ベキなので, 得られる解は $t \to t_{\max} - 0$ で 0 に収束する．これが $\mathbf{y}(t)$ の漸近展開 (2.4) の第 2 項である．第 3 項以降もこの精神で帰納的に求めにいく。

3 適用例

ここでは [2] にて考察された例を取り上げ, 爆発解の漸近展開を試みる．微分方程式系

$$u' = u^2 - v, \quad v' = \frac{1}{3}u^3 - u \tag{3.1}$$

[2] ある i に対して $\alpha_i = 0$ となるものにこの議論は拡張できる可能性もある．

の爆発解を考える．この系は型 $(1,2)$, 次数 2 の漸近的擬斉次ベクトル場である．また, (Poincaré 型のコンパクト化を適用すると) 地平線上に合計 4 つの双曲型平衡点があり, 相平面 $\mathbb{R}^2$ の方向に分布する安定多様体を持つ平衡点が 2 つある ([2]). それらに対応する爆発解は両方とも

$$u(t) \sim u_0(t) = C_u(t_{\max} - t)^{-1}, \quad v(t) \sim v_0(t) = C_v(t_{\max} - t)^{-2}, \quad t \to t_{\max} - 0$$

という漸近挙動を持つ事が従う．

まず, 最低次の釣り合いの式は

$$C_u = C_u^2 - C_v, \quad 2C_v = \frac{1}{3}C_u^3$$

で与えられる．根として $C_u = 3 \pm \sqrt{3}$, $C_v = C_u^3/6$ が取れる．まず, $C_u = 3 - \sqrt{3}$ をとる．この時, 爆発ベキ決定行列と爆発ベキ固有値は

$$A = \begin{pmatrix} 5 - 2\sqrt{3} & -1 \\ 12 - 6\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 1,\, 2 - 2\sqrt{3} \equiv \alpha.$$

ここで実部負の爆発ベキ固有値は α のみである．よって, 擬斉次成分からは $(t_{\max} - t)^{\alpha}$ のみが漸近展開に寄与する．次に低次項と付随する $\mathbf{g}_1$ に相当する関数を見ると,

$$f_{\mathrm{res}}(u_0(t), v_0(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -C_u(t_{\max} - t)^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_1(s) \equiv (t_{\max} - s)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -C_u(t_{\max} - s)^2 \end{pmatrix}$$

となっている．よって $\mathbf{Y}_1$ に生じる $t_{\max} - t$ のベキには $(t_{\max} - t)^2$ が加わる．結果, $\mathbf{Y}_1$ は $(t_{\max} - t)^{-\alpha}$ と $(t_{\max} - t)^2$ の線型和で記述される．以降, f_{res} は 1 階微分が定数行列, 2 階以上の微分が 0 になるので, 同様の手続きにより $\tilde{\mathbf{Y}}$ には $(t_{\max} - t)^{\delta}$, ただし

$$\delta = \beta_1(-\alpha) + 2\beta_2, \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

という形のベキのみが並ぶ事が従う[3].

他方, $C_u = 3 + \sqrt{3}$ とすると爆発ベキ決定行列と爆発ベキ固有値は

$$A = \begin{pmatrix} 5 + 2\sqrt{3} & -1 \\ 12 + 6\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 1,\, 2 + 2\sqrt{3}$$

となり, 固有値が両方とも正になる．漸近挙動の仮定により, $\mathbf{Y}_1$ にこれらの指数を持つベキは含まれない．よって $\mathbf{W}_1^0 = \mathbf{0}$ となり, 爆発ベキ固有値の寄与は生じない．これは $C_u = 3 + \sqrt{3}$ に対応する爆発解が 1 次元安定多様体を持つ地平線上のサドルにより特徴付けられており (cf. [2]), そのパラメータ任意性が初期点による任意性, 特に $t_{\max}$ のそれで尽きている事に対応する．この爆発解の漸近展開に生じる $t_{\max} - t$ のベキは, 低次項 f_{res} のみ寄与する．

講演時には具体的な漸近展開の係数も含めて, 他の例や本考察の展開と展望を述べる．

参考文献

[1] C.M. Bender and S.A. Orszag. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory.* McGraw-Hill, 1999.

[2] K. Matsue. On blow-up solutions of differential equations with Poincaré-type compactifications. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 17(3):2249–2288, 2018.

[3] 柴田 正和. **常微分方程式の局所漸近解析**. 森北出版株式会社, 2010 年 8 月.

謝辞 本課題は, JSPS 科研費 (基盤 B: JP21H01001), 及び世界トップレベル研究拠点 (WPI) プログラムの支援を受けている．また, 本成果は第 5 回 JST 数学領域未解決問題ワークショップ[4]にて議論された話題を基礎として構築されている．同ワークショップの運営に携わった関係各位にこの場で感謝を申し上げたい．

[3] 2 と $-\alpha$ が $\mathbb{Z}$ の整拡大 $\mathbb{Z}[-\alpha]$ において一次独立である事より, この表示は一意に決まる．

[4] `https://sites.google.com/view/openproblem2021/`