

初年次生の統計学及び線形代数の理解度の低い単元の理解度向上の試み

An Attempt to Promote Understanding of Low-Understanding Topics in Statistics and Linear Algebra Classes for First-Year Students

堤 厚博^{*1}
Atsuhiko TSUTSUMI

西岡 圭太^{*1}
Keita NISHIOKA

北島 孝浩^{*1}
Takahiro KITAJIMA

谷口 進一^{*1}
Shinichi TANIGUCHI

By understanding the extent to which each unit of mathematics contributes to the final exam, including the correlation of each unit, it will be possible to identify which units are well understood, and as a result, educational efficiency can be improved. Therefore, we investigated the score rate of each unit in the statistics final exam, the correlation of each unit, and the contribution rate to the final exam, and took measures to improve the score. Moreover, for each unit of linear algebra, we also investigated the score rate of each unit and the contribution rate to the final exam.

Keywords : First-Year Experience, Mathematics Education, Statistics, Linear Algebra, Educational Effect, Score Rate, Multiple Regression Analysis

キーワード : 初年次教育, 数学教育, 統計学, 線形代数, 教育効果, 試験得点率, 重回帰分析

1. はじめに

少子化が叫ばれ続け大学全入時代を迎えつつある近年, 大学にとっては学生確保の側面をもつ入学試験の多様化に伴って, 工学系大学においても高校で学習すべき基礎的な数理の内容をしっかりと身に付けていない入学生が多くみられるようになった. 大学生の比率が増加することは単に少子化の影響のみではなく, 社会からの技術・能力に対する要求が高くなっていることを示しており, 基礎学力の多様な入学生に対して, 大学はしっかりとした学士力の質を保証し, 社会に送り出す責任がある. 金沢工業大学(以後, 本学)においても, 産業界の要求を満たす技術者を育成するため, 基礎教育部と専門学部との連携を密にして数理工統合教育に力を入れている. ここでは, 基礎的な数理の知識を身に付けていない学生に対し, 数理科目に興味を持たせるべく, 数学がどのように工学技術に使われているかを示す取り組みなどを通じ, 学生の学習意欲を高める教育が行われている. しかしながら, 数学が数式や証明を論理的に記述せざるをえない科目であるが故に, 数学に苦手意識をもつ学生の理解を妨げ, 学習意欲の低下を招いているのも事実である.

学生が興味を持ちそれに誘発されるような形で自主的・能動的に考える授業を進められれば, それが理想的な授業となりえるであろうが, 現実には非常に難しいものと思われる. 数学の重要な数式や証明を, 教えるべき本質を崩さずにわかりやすく伝えることができれば, 学生の理解を助けるとともに, 学習意欲の向上に繋がるものと考えられる. これに関連して筆者らはこれまでに,

数理教育における理解度向上のため, 数式の視覚化^{1), 2)}やシミュレーションを用いた振動現象の視覚化^{3), 4)}を行い, 学生の理解度向上に寄与している.

また, 一方で, 数学の各単元・項目に着目すると, 数学の各単元・項目がどの程度期末試験に寄与しているのか, 各単元・項目の関係性も含めて把握することで, どの単元・項目の理解度が高いのかが明らかにでき, 結果として教育効率の向上が期待できる.

本研究はこれまで統計科目を取り上げ, 各単元・項目の小テストから期末試験までの理解度の調査, 教育過程での得点率の変化, 各単元・項目の相関及び期末試験への寄与率⁵⁾⁻⁷⁾などの調査を行い, その結果を踏まえて理解度の低い単元の理解度向上の試みを行ってきたが, 新たに昨年度著者が担当した数学科目の線形代数についても同様の調査を行ったので報告する.

2. バイオ・化学のための統計における調査分析

筆者らは毎年のように本学バイオ・化学部の1年生を対象とした統計科目「バイオ・化学のための統計」(以後, バイオ統計)を教えてきた. 統計の授業において, これまで学生の過去5年間(コロナ禍前の対面授業)ほどの統計学の単元・項目の各年度ごとの期末試験時における各得点率の割合を調べ, それが5年間でどのように変化していったかについて調査した(最後の1年は過去4年間の成果を反映させた1年である). また, 各単元・項目相互の相関や最も成績割合も高く重要である期末試験への各単元・項目の寄与率についても検討を行い, 得点の低い単元・項目についての対策も実施した.

2.1 バイオ統計における単元・項目

バイオ統計の学習内容は,

2023年2月17日受付

*1 金沢工業大学基礎教育部

- 実験における測定の基礎知識：実験における必要な能力，測定単位，測定誤差，測定データの誤差，有効数字，科学的表記法
 - 確率変数としてのデータ：確率変数としてのデータの取り扱い，データの整理方法・特性値
 - 母集団と標本
 - 確率変数と確率分布：確率変数，確率分布，平均・分散，正規分布
 - 2変量の関係：共分散，相関係数，回帰分析
- からなる。特に学習・教育目標では，データの統計的評価の実践演習を行いながら，数学的意味の理解と表計算ソフトを使った統計的処理方法やグラフとして表現する技術の習得を掲げており，実際に統計処理を行うことを重点的に掲げている。

バイオ統計を構成する単元・項目（以後，単元）を表1に示す。バイオ統計は全15回の授業から成り，第4回で小テスト1，第8回で小テスト2を実施し，第12回の期末試験は表1の全ての単元を対象として行っている。表1の単元のうち「2変量の関係（共分散～回帰分析）」は，小テスト2の後に学習するため，理解度が若干進まない傾向にある。第13回，第14回は「度数分布とヒストグラム」や「2変量の関係」についてのレポート課題を課し，実際のデータを用いた理解の向上に努めている。

2.2 バイオ統計の各単元の得点率調査結果

はじめに，過去4年間（平成27年度から平成30年度）の期末試験における，表1に示した各単元の得点率の変化について調査した結果を図1に示す。ここでは縦軸に各単元の満点に対する学生の得点の平均値割合（%）を

表1 評価した単元

No.	単元	略称
1	有効数字とその計算法	有効数字
2	SI単位系・科学的表記法	SI単位
3	度数分布とヒストグラム	度数分布
4	確率変数と確率分布	確率分布
5	正規分布	正規分布
6	2変量の関係	2変量

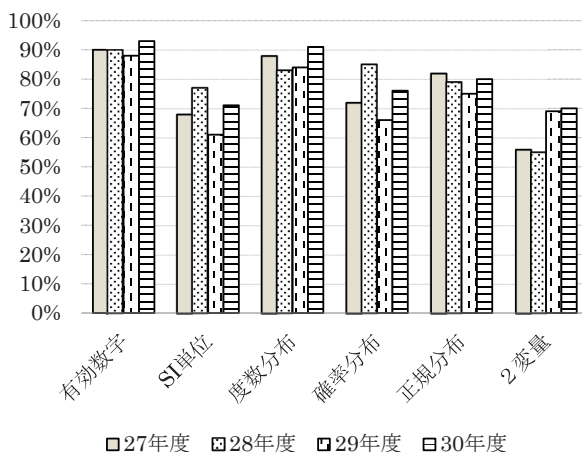


図1 各単元の平均得点率

示している。なお，4年間の期末試験の得点の平均値は74点ほどであり，毎年ほとんど変わっていない。

これを見ると学生のレベルはそれほど変わらず，平均的にみると「有効数字」や「度数分布」と比較して「SI単位」，「確率分布」や「2変量」の得点率が低いことが分かる。

2.3 各単元の相関分析と寄与率

上記の各単元の得点率調査の結果を踏まえて，相関分析や重回帰分析をExcelのデータ分析ツールを用いて行った。過去4年間に履修した学生（計419名）を対象に各単元を標準化（各学生の各単元の点数から平均値を引き標準偏差で割る）し，期末試験得点も含めて，単元間の相関を取ることにした。これにより重回帰式の切片をほぼ0にすることができる。表2に，各単元の相関分析結果を示す。

これより，各単元の期末試験との相関は「度数分布」が若干低いものの，総じて高いことが分かる。また，各単元同士の相関係数はいずれも大きくはない。そこで期末試験を目的変数として，各単元を説明変数として重回帰分析を行い，どの単元が期末試験に影響を及ぼしているかを調べることにした。標準化したデータで重回帰式を求めたときの偏回帰係数を標準偏回帰係数といい，その値の大きさによって目的変数への影響の度合いを説明変数間で比較できる。よって，各単元の期末試験への影響の度合いを期末試験への“寄与”として，定量的に各単元の“寄与率”を次のように考える。今の場合，各単元の成績（説明変数）と期末試験の成績（目的変数）の相関はすべて正であり，単元間の相関はいずれも大きくはなく，標準偏回帰係数の値も正となっている。そこで，各単元の標準偏回帰係数を標準偏回帰係数の総和で割ったものを，各単元の“寄与率”と定義する。この寄与率は本論文独自のものであり，一般に回帰分析で評価される寄与率（決定係数）とは異なることに注意されたい。なお，各単元の配点は毎年概ね15%～20%程度であり，配点が極端に小さい場合には，寄与率が大きくても，期末試験には影響がない。また，各単元の相関係数の非常に高い単元がある場合には，それらを同一とみなして，解析することも可能である。

表3は標準偏回帰係数の大きさを元にした期末試験に対する各単元の寄与率を表にしたものである。

これをみると，「正規分布」，「2変量」，「SI単位」の順に寄与率が高くなっている。一方，「有効数字」，「度数分布」は学生の得点率は高いものの，寄与率は低い結果となっている。表3の結果からは，「正規分布」「2変

表2 各単元の相関係数

	期末試験	有効数字	SI単位	度数分布	確率分布	正規分布	2変量
期末試験	1						
有効数字	0.49	1					
SI単位	0.7	0.34	1				
度数分布	0.44	0.22	0.3	1			
確率分布	0.64	0.26	0.33	0.33	1		
正規分布	0.76	0.22	0.34	0.26	0.42	1	
2変量	0.68	0.21	0.3	0.17	0.25	0.4	1

表3 各単元の期末試験への寄与率

	標準偏回帰係数	寄与率
有効数字	0.14	9%
SI単位	0.33	22%
度数分布	0.08	5%
確率分布	0.22	15%
正規分布	0.37	25%
2変量	0.33	22%
合計	1.47	100%

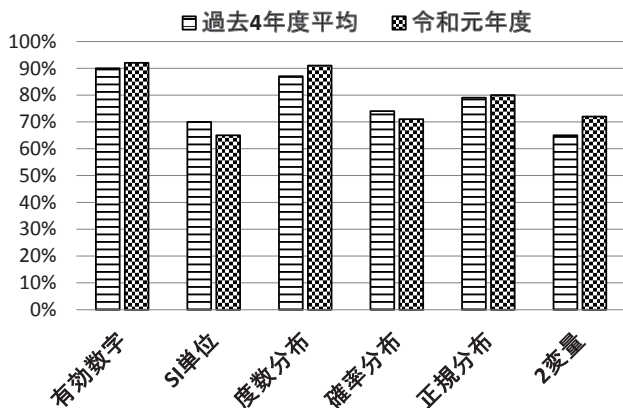


図2 各単元の平均得点率

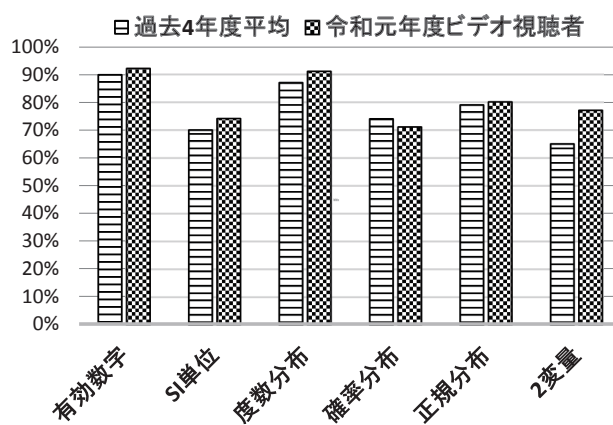


図3 各単元の平均得点率

量」「SI単位」の寄与率が高いためこの得点率を上げることが有効と考えられるが、「正規分布」は学生の得点率も比較的高く、上げる余地が少ないため「2変量」や「SI単位」の得点率を上げることが有効と考えられる。そこで、令和元年度では「2変量」と「SI単位」について、期末試験前の復習の時間を利用して両単元の宿題を実施するとともに、これらの問題解説の演習ビデオを見させた上で確認試験を受けさせることとした。図2に過去4年間の期末試験における各単元の平均得点率と令和元年度の得点率比較を示す。

これを見ると各単元の得点率が令和元年度では過去4年と比較し高い単元が多いことがわかる。実際、過去4年間の期末試験の平均点が74点であるのに対し、令和元年度では77点となり、得点が向上している。また、それぞれの単元の平均得点率は約60～90%となったが、「SI単位」の得点率が低くなっている。そこで、その原因を把握するため、期末試験での両方の単元の得点率を過去4年度平均と令和元年度の演習ビデオを視聴した学生だけの平均と比較した結果を図3に示す。

これを見ると過去4年間の平均と比較すると、その得点率の差は「SI単位」で4ポイント、「2変量」で12ポイントの差となり、特に令和元年度の「SI単位」の得点率平均と比較して、「SI単位」の演習ビデオを視聴していた学生の平均は9ポイント高くなっている。

過去4年間の得点率と比べて令和元年度の「2変量」の平均得点率は7ポイント高くなったが、ビデオを見ていた学生の割合は「SI単位」、「2変量」とも3割程度であった。演習ビデオのみが得点率の向上の要因ではないが、ビデオの視聴は十分効果のあるものだと考えられる。

今後「SI単位」の演習ビデオを確実に見て、理解することでさらなる得点の向上を図りたいと考えている。統計については、概ね分析が終わりその対策が分かったため、次に線形代数について分析することにした。

3. 線形代数における調査分析

本学では、線形代数は前期と後期に、それぞれ線形代数Ⅰと線形代数Ⅱとして各単元に分けて学習している。昨年度（令和3年度）実施した線形代数においてもバイオ統計と同様にそれぞれの単元に分けて期末試験を目的変数とし、各単元を説明変数として重回帰分析を実施し、各単元の期末試験への寄与率を求め、特に重点的に教育すべき単元を求め、今後の教育対応の検討を行った。

線形代数の学習・教育目標について、線形代数Ⅰでは、ベクトルの演算や行列の計算、連立1次方程式の解法などを通して、幾何学的対象を代数的に捉える能力を養い、さらに、専門分野への応用も学ぶ、としている。線形代数Ⅱでは、線形代数Ⅰに引き続き幾何学的対象や高次元の対象を代数的に扱う手法について学習する、となっている。

3.1 線形代数Ⅰ、Ⅱにおける単元

線形代数Ⅰにおいて、第1章はベクトルの内容であり、ベクトルの演算、内積外積、平面と直線の方程式を学習し、第2章では、行列と線形写像、行列とその演算、連立1次方程式、線形写像と1次変換を学習している。第3章は複素数とその演算であり、この内容は試験で評価せず、学生のレポート課題としている。線形代数Ⅱにおいて、第1章は行列式であり、行列式の定義、行列式の性質と計算方法、余因子とその応用を学習している。第2章はベクトル空間と固有値であり、ベクトル空間、固有値と固有ベクトルを学ぶ。第3章では2次曲線の分類を取り上げ、これをレポート課題としている。バイオ統計と同様に線形代数Ⅰ、Ⅱの期末試験を構成する各単元を評価対象として、それらの相関や寄与率の調査を行った。線形代数Ⅰ、Ⅱの期末試験の対象となる単元をそれぞれ表4、5に略称で示す。

3.2 線形代数の各単元の得点率調査結果

はじめに令和3年度に線形代数Ⅰを履修した学生44

表4 評価した単元（線形代数Ⅰ）

ベクトルの演算	内積外積	平面と直線の方程式	行列の演算	連立1次方程式	線形写像・1次変換
---------	------	-----------	-------	---------	-----------

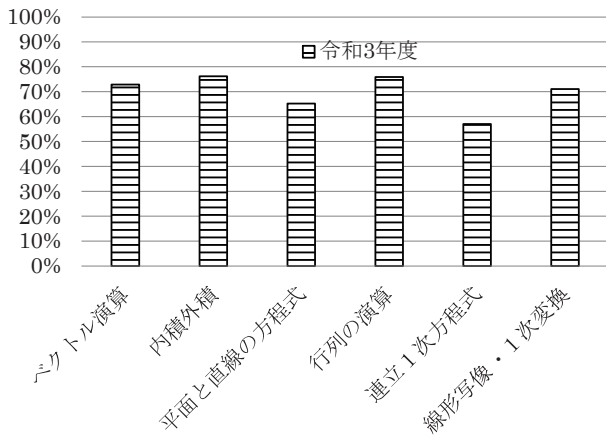


図4 各単元の平均得点率（線形代数Ⅰ）

表5 評価した単元（線形代数Ⅱ）

行列式の計算	行列式の因数分解	連立方程式(クラメル)	逆行列の計算	1次独立・1次従属	部分空間・基底と次元	固有値～対角化
--------	----------	-------------	--------	-----------	------------	---------

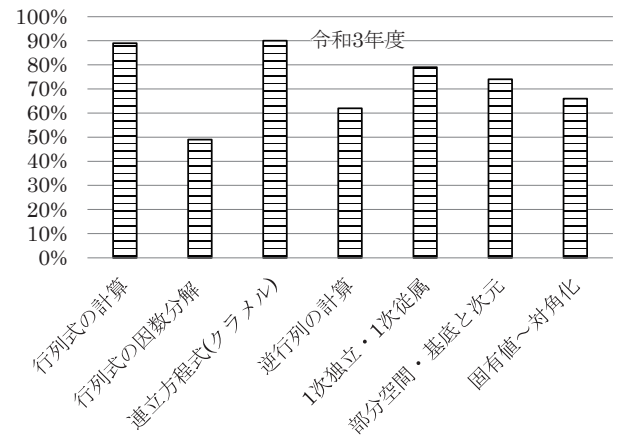


図5 各単元の平均得点率（線形代数Ⅱ）

表6 各単元の相関係数（線形代数Ⅰ）

	期末試験	ベクトルの演算	内積外積	平面と直線の方程式	行列の演算	連立1次方程式	線形写像・1次変換
期末試験	1						
ベクトルの演算	0.5	1					
内積外積	0.8	0.4	1				
平面と直線の方程式	0.8	0.23	0.73	1			
行列の演算	0.87	0.44	0.53	0.53	1		
連立1次方程式	0.68	0.17	0.47	0.42	0.58	1	
線形写像・1次変換	0.83	0.38	0.58	0.48	0.74	0.61	1

名の、表4に示した各単元の得点率について調査した結果を図4に示す。ここでは各単元の満点に対する学生得点の平均値割合(%)で示している。

なお、この期末試験の平均点は71点ほどであり、各単元の得点率は約60%から80%であった。「内積外積」「行列の演算」の得点率は70数%あり、それに比べて、「平面と直線の方程式」や「連立1次方程式」の得点率が60%程度と低いことが分かる。また、線形代数Ⅱの表5の各単元の得点率を図5に示す。なお、この履修学生は97名であった。これを見ると、「行列式の計算」、「連立方程式」などの得点率が90%程度と高く、「行列式の因数分解」と「逆行列の計算」の得点率はそれぞれ50%、60%程度と低いことが分かる。

3.3 各単元の相関分析と寄与率

線形代数でもバイオ統計と同様に、最初に令和3年度の前学期の学生44名を対象に線形代数Ⅰの各単元を標準化（各学生の各単元の点数から平均値を引き標準偏差で割る）し、期末試験得点も含めて、各単元相互の相関を取ることにした。表6には線形代数Ⅰの各単元の相関係数を示す。各単元とも期末試験との相関係数は高く、一方では、各単元同士のそれぞれの相関係数は「平面と直線の方程式」と「内積外積」が0.73、「行列の演算」と「線形写像・1次変換」が0.74と比較的高い。「内積外積」の得点率の方が高いので、この得点を上げることで、「平面と直線の方程式」の単元の得点も上げられる可能性が

ある。同様に「行列の演算」と「線形写像・1次変換」についてもどちらかを上げればそれぞれの得点を上げられる可能性がある。これらは、考え方に相似な部分があるため相関が高い可能性があるが、詳細は今後の分析に委ねたい。また、これらのどちらかを省略しても相関に影響はないが、ここでは単元の関係进行分析するので、このまま重回帰分析を行う。

同様に線形代数Ⅱの学生97名の各単元と期末試験の相関係数を表7に示す。これを見ると、期末試験との相関係数は「逆行列の計算」の単元が低いことが分かる。また、「固有値～対角化」の単元や「部分空間・基底と次元」、「1次独立・1次従属」の単元同士が比較的相関が高いことが分かる。しかし、他の単元同士はそれほど大きくはなく、期末試験との相関がかなり高いことは線形代数Ⅰとほぼ同様の傾向であり、このまま重回帰分析を行うこととした。

まず、線形代数Ⅰについて重回帰分析を行い、標準偏重回帰係数から算出した期末試験への各単元の寄与率を表8に示す。これを見ると、「行列の演算」、次に「平面と直線の方程式」、「線形写像・1次変換」の寄与率が高くなっている。一方、「ベクトルの演算」、「連立1次方程式」は、期末試験との相関がそれほど高くなく、寄与率は低い結果となっている。表8の結果からは「行列の演算」、「平面と直線の方程式」、「線形写像・1次変換」の寄与率が高いため、この得点率を上げることが

表7 各単元の相関係数（線形代数Ⅱ）

	期末試験	行列式の計算	行列式の 因数分解	連立方程式 (クラメル)	逆行列の計算	1次独立・ 1次従属	部分空間・ 基底と次元	固有値～対角化
期末試験	1							
行列式の計算	0.72	1						
行列式の因数分解	0.57	0.26	1					
連立方程式（クラメル）	0.68	0.49	0.35	1				
逆行列の計算	0.48	0.31	0.11	0.3	1			
1次独立・1次従属	0.65	0.35	0.32	0.35	0.3	1		
部分空間・基底と次元	0.75	0.39	0.41	0.33	0.31	0.48	1	
固有値～対角化	0.84	0.45	0.43	0.47	0.38	0.56	0.58	1

表8 各単元の期末試験への寄与率（線形代数Ⅰ）

	標準偏回帰係数	寄与率
ベクトルの演算	0.11	9%
内積外積	0.16	13%
平面と直線の方程式	0.32	25%
行列の演算	0.33	26%
連立1次方程式	0.12	10%
線形写像・1次変換	0.22	17%
合計	1.26	100%

表9 各単元の期末試験への寄与率（線形代数Ⅱ）

	標準偏回帰係数	寄与率
行列式の計算	0.28	20%
行列式の因数分解	0.15	11%
連立方程式（クラメル）	0.19	13%
逆行列の計算	0.13	9%
1次独立・1次従属	0.12	8%
部分空間・基底と次元	0.25	18%
固有値～対角化	0.3	21%
合計	1.42	100%

有効と考えられるが、「行列の演算」の得点率が75%程度、「線形写像・1次変換」は71%程度で、学生の得点率も比較的高い。一方、「平面と直線の方程式」の得点率は65%程度であり、寄与率も高いため、これを最初に上げることが有効と考えられる。また、「連立1次方程式」は期末試験との相関がそれほど大きくないものの、得点率は低いためこの得点も上げる必要がある。

次に、線形代数Ⅱについての期末試験への寄与率を表9に示す。これをみると、「固有値～対角化」、次に「行列式の計算」、「部分空間・基底と次元」の順で寄与率が高くなっている。一方、「行列式の計算」は得点率が高いため、得点を上げる余地が少ないことから得点率の低い「固有値～対角化」や「部分空間・基底と次元」の得点率を上げた方が効果的である。また、「行列式の因数分解」や「逆行列の計算」は、期末試験との相関がそれほど高くなく、寄与率も低い結果となっているが、得点率が低いためこれも上げていくことが必要である。

4. まとめと今後の課題

統計学及び線形代数の期末試験における各単元の得点率の変化と各単元の相関や寄与率を調査し、期末試験の点数を上げるためにはどの単元を上げるのが効果的かを調査し、今後の学習方針をどのようにすべきかについて検討した。まとめると以下ようになる。

- (1) 統計学と線形代数について、各単元の期末試験での得点率を求めるとともに、各単元同士や期末試験と各単元との相関係数を求めた。さらに、期末試験への寄与率を求め、今後の対策を検討した。
- (2) 統計科目で理解の進まなかった「2変量」については演習ビデオ及び確認試験で知識の定着を図ることができた。

- (3) 今後は「SI単位」について同様に演習ビデオ及び確認試験を継続して、統計を教える際には、さらに得点率を上げることを検討したい。
- (4) 線形代数においても、各単元の相関及び期末試験への寄与率が把握できたので、学生の苦手な単元については演習ビデオや確認試験などで知識の定着を図る必要がある。

今後、以上の対策を継続しながら、学生の理解度の低い単元について理解度の向上を図っていきたい。

参 考 文 献

- 1) 堤 厚博：数学教育における視覚化を用いた試み－初年次生を対象とした視覚化による数式の理解度向上－，平成26年度工学教育研究講演会講演論文集，1C12，pp.320－321，2014
- 2) 堤 厚博：数学教育における視覚化を用いた試み－初年次生を対象とした視覚化による数式の理解度向上(その2)－，平成27年度工学教育研究講演会講演論文集，1E04，pp.98－99，2015
- 3) 堤 厚博，太田和彦，西岡圭太：シミュレーションを用いた振動現象の理解度向上の試み，KIT Progress，25，pp.107－117，2017
- 4) 西岡圭太，太田和彦，堤 厚博，鈴木亮一：連成振動に対する理解度向上の試み－理論と実験をつなぐ手助けとしてのシミュレーション－，平成29年度工学教育研究講演会講演論文集，2G15，pp.382－383，2017
- 5) 堤 厚博，西岡圭太，谷口進一：数学教育における重要単元・項目抽出の試み－初年次生の統計学における理解度の低い単元の理解度向上対策事例－，日本工学教育協会平成30年度工学教育研究講演会講演

論文集, 1A06, pp.12-13, 2018

- 6) 堤 厚博, 西岡圭太, 谷口進一: 数学教育における重要単元・項目抽出の試み - 初年次生の統計学における理解度の低い単元の理解度向上対策事例(2) -, 日本工学教育協会2019年度工学教育研究講演会講演論文集, 2C17, pp.204-205, 2019
- 7) 堤 厚博, 西岡圭太: 数学教育における重要単元・項目抽出の試み - 初年次生の統計学における理解度の低い単元の理解度向上対策事例(3) -, 日本工学教育協会2020年度工学教育研究講演会講演論文集, 3E03, pp.286-287, 2020



西岡 圭太

学 歴 大阪市立大学大学院理学研究科数物系専攻後
期博士課程修了
現 職 金沢工業大学基礎教育部准教授
学 位 博士(理学)
専 門 物性物理学(理論), 数理教育



北島 孝浩

学 歴 慶応義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学
専攻後期博士課程修了
現 職 金沢工業大学基礎教育部講師
学 位 博士(理学)
専 門 整数論, 岩澤理論

.....

著 者 紹 介



堤 厚博

学 歴 東京工業大学大学院理工学研究科修士課程修了
現 職 金沢工業大学基礎教育部教授
学 位 博士(工学)
専 門 機械力学, 振動工学



谷口 進一

学 歴 金沢大学大学院自然科学研究科物質科学専攻
後期博士課程修了
現 職 金沢工業大学基礎教育部教授
学 位 博士(学術)
専 門 質的研究, 効果測定, 学習支援, 数理工基礎教育

