

# ばねを利用した小型振動体による構造物の振動抑制 (二重動吸振器の最適設計に関する代数的厳密解の導出)

Vibration Suppression of a Structural Object Using a Small Vibratory Device  
(Derivation of an Exact Algebraic Solution of an Optimal Double-Mass Dynamic Vibration Absorber)

兵庫県立大学 浅見 敏彦

## 1. 緒言

動吸振器 (DVA: Dynamic Vibration Absorber) とは、対象物 (主系) の振動を抑制するために取り付ける補助的な振動体のことであり、その最適化問題に対しては過去に多くの研究がある (1),(2),(3),(4),(5)。同様の目的で設計される減衰器 (Damper) と比較して、取り付けが容易であるという利点があるが、一方で、ダンバと同程度の制振効果を得るには相当大型化しなければならないという問題点もある。近年、動吸振器を大型化しなくても同等の制振効果を上げるため、対象物のパラメータ変動に対する制振効果の悪化を軽減するために、複数の質量から構成される多重動吸振器の研究が進められている。本研究は、その中で最もシンプルな二重動吸振器の最適化を試みる。

二重動吸振器は単一動吸振器に比べて最適化すべきパラメータの数が2倍以上に増えることから、代数的な解を得ることは困難とされる。ところが、最近では *Mathematica* を始めとする数式処理ソフトの能力が向上したこともあり、幾つかのモデルに対しては解析解が得られるようになってきた (6),(7),(8),(9)。著者も直列の二重動吸振器については、動吸振器の三つの最適化規範、すなわち  $H_\infty$  最適化、 $H_2$  最適化、および安定度最大化のすべてに対して、代数的な厳密解を得ることに成功した (10),(11),(12)。ところが、これまで得られていたすべての解析解は、いずれも主振動系に減衰が存在しない特別な場合であった。主系に減衰があると、単一質量の動吸振器においても  $H_\infty$  規範による代数解が得られていないことから、解析解の導出は不可能とされていた。本論文は、上記の三つの最適化規範に対して、減衰系に取り付ける直列二重動吸振器の代数的厳密解を報告する。これらの厳密解において主系の減衰をゼロとおくと、以前に発表した無減衰系に対する代数解 (10),(12) に帰着することを確認した。

## 2. 減衰系に取り付ける動吸振器の最適化問題

図1は、減衰のある主系 ( $P$ ) に直列に取り付けられた二つの動吸振器  $A$  と  $B$  から成る3自由度の振動系を表している。図1(a)は主系に直接励振力が作用する力加振系を、同図(b)は基礎に外乱を受ける変位励振系を表しているが、代数解が得られるのは力加振系の場合のみである。変位加振系では数値解と摂動近似解を求めることにした。

図1の振動系は線形系であるので、 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  をそれぞれ主系と動吸振器  $A$  と  $B$  の無減衰固有角振動数とすると、正弦波入力  $f(t) = f_0 \sin \omega t$  に対する主系の定常応答  $x_1(t)$  の振幅比  $|x_1/(f_0/k_1)|$  は8個の無次元パラメータ

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \omega/\omega_1, \quad \mu = (m_2 + m_3)/m_1, \quad \mu_B = m_3/m_2 \\ \nu &= \omega_2/\omega_1, \quad \nu_B = \omega_3/\omega_2, \quad \zeta_1 = c_1/(2m_1\omega_1) \\ \zeta_2 &= c_2/(2m_2\omega_2), \quad \zeta_3 = c_3/(2m_3\omega_3) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

によって完全に記述できる。ここで

$$\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{k_2/m_2}, \quad \omega_3 = \sqrt{k_3/m_3} \quad (2)$$

上記の無次元パラメータのうち、 $\lambda$  はゼロから無限大の範囲で変化すると想定し、 $\mu$  の値は大きいほど動吸振器の性能は向上する。主系と動吸振器の質量比  $\mu$  と主系の減衰比  $\zeta_1$  の値が与えられたとき、残り五つの無次元パラメータに最適値が存在し、その最適値を探すのがこの系に対する動吸振器の最適化問題になる。

## 3. $H_\infty$ 規範による最適化 (力加振系)

$H_\infty$  規範による最適化は、主系の周波数応答関数の最大値  $h_{\max}$  ( $H_\infty$  ノルム) を最小化することを目的とする。この規範では、力入力に対する主系の絶対速度応答を表すモビリティ伝達関数の  $H_\infty$  ノルム

$$h_{\max} = \left| \frac{\dot{x}_1}{\omega_1 f_0/k_1} \right|_{\max} = \left| \frac{\lambda x_1}{f_0/k_1} \right|_{\max} \quad (3)$$

(この最小値を  $h_{\min}$  とおく) についてのみ代数解が存在し、以下の解が求められた。

$$\left. \begin{aligned} \mu_{B\text{opt}} &= \frac{1 - r_{\min}^2 - 4\zeta_1^2 + 4\mu}{2}, \quad \nu_{\text{opt}} = \sqrt{1 + \mu_{B\text{opt}}} \\ \nu_{B\text{opt}} &= \frac{1}{1 + \mu_{B\text{opt}}}, \quad \zeta_{2\text{opt}} = 0 \\ \zeta_{3\text{opt}} &= \sqrt{\frac{\mu_{B\text{opt}}}{2(1 + \mu_{B\text{opt}})}}, \quad h_{\min} = \sqrt{\frac{1}{1 - r_{\min}^2}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} r_{\min} &= \sqrt{p_0 - q_1 - \sqrt{3p_0^2 - p_2 - q_1^2 - \frac{2p_0^3 - p_0p_2 - p_3}{q_1}}} \\ p_0 &= 1 - 4\zeta_1^2 + 2\mu, \quad p_1 = (3\zeta_1^2 - 2\mu)\mu^3 \\ p_2 &= 3(1 - 8\zeta_1^2 + 16\zeta_1^4) + 4\mu(3 - 12\zeta_1^2 + \mu) \\ p_3 &= -1 + 12\zeta_1^2 - 48\zeta_1^4 + 64\zeta_1^6 - 6\mu(1 - 8\zeta_1^2 + 16\zeta_1^4) \\ &\quad - 4\mu^2(1 - 8\zeta_1^2 - 2\mu) \\ p_4 &= 4\mu^4(27\zeta_1^4 - 36\zeta_1^2\mu + 16\mu^2) \\ &\quad + 12\zeta_1^2\mu^4\sqrt{3(27\zeta_1^4 - 40\zeta_1^2\mu + 16\mu^2)} \\ q_1 &= \sqrt{p_0^2 - \frac{1}{3}(p_2 - 2p_4^{1/3} + 16p_1p_4^{-1/3})} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

無減衰系 ( $\zeta_1 = 0$ ) では、式(4)は次の解に帰着する。

$$\left. \begin{aligned} \mu_{B\text{opt}} &= (1 + \sqrt{2})\mu, \quad \nu_{\text{opt}} = \sqrt{1 + (1 + \sqrt{2})\mu} \\ \nu_{B\text{opt}} &= \frac{1}{1 + (1 + \sqrt{2})\mu}, \quad \zeta_{2\text{opt}} = 0 \\ \zeta_{3\text{opt}} &= \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(1 + \sqrt{2})\mu}{1 + (1 + \sqrt{2})\mu}}, \quad h_{\min} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2\mu}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

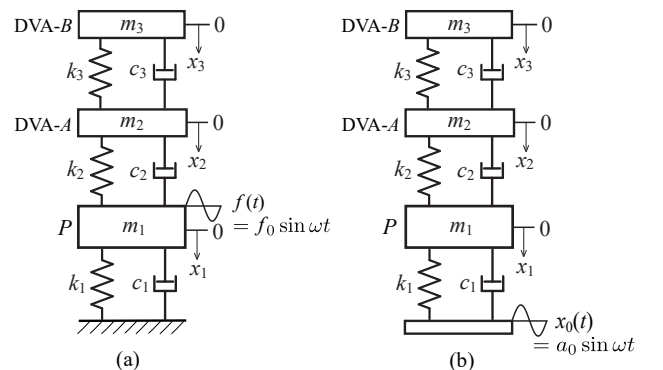


Fig.1 Analytical model of a series-type dynamic vibration absorber (DVA) attached to a damped primary system subjected to force or motion excitation

#### 4. $H_2$ 規範による最適化 (力加振系)

$H_2$  規範による最適化では、主系のコンプライアンス伝達関数の  $H_2$  ノルム, すなわち

$$I_a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{x_1}{f_0/k_1} \right|^2 d\lambda \quad (7)$$

を最小化する場合においてのみ代数解が得られた。その解は

$$\left. \begin{aligned} \mu_{Bopt} &= \mu + q_2^{1/3} + \mu^2 q_2^{-1/3}, \quad \nu_{opt} = \sqrt{1 + \mu_{Bopt}} \\ \nu_{Bopt} &= \frac{1}{1 + \mu_{Bopt}}, \quad \zeta_{2opt} = 0, \quad \zeta_{3opt} = \frac{\zeta_1 \mu}{\nu_{opt}(\mu_{Bopt} - 2\mu)} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$I_{amin}$  の式は長くなるので省いている。ここで

$$q_2 = \mu^2 \left( 2\zeta_1^2 - \mu + 2\zeta_1 \sqrt{\zeta_1^2 - \mu} \right) \quad (9)$$

$\zeta_1 = 0$  においては、式 (8) は無減衰系に対する次の解に帰着することが確認されている。ただし、 $\zeta_{3opt}$  に関しては、極限值は式 (10) に一致するが、 $\zeta_1 = 0$  のときには 0/0 の不定形になる。

$$\left. \begin{aligned} \mu_{Bopt} &= 2\mu, \quad \nu_{opt} = \sqrt{1 + 2\mu}, \quad \nu_{Bopt} = \frac{1}{1 + 2\mu} \\ \zeta_{2opt} &= 0, \quad \zeta_{3opt} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\mu}{1 + 2\mu}}, \quad I_{amin} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\mu}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

#### 5. $H_2$ 規範による最適化 (変位加振系)

図 1(b) の変位加振系に対する  $H_2$  最適化では

$$I_a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{x_1}{x_0} \right|^2 d\lambda \quad (11)$$

を最小化するように 5 個のパラメータの最適値が決定される。変位加振系に対しては厳密解が得られず、ニュートン・ラフソン法によって数値解を求めた。また、数値解は扱いにくいので、次に摂動法を用いて近似解を求めた。主系減衰  $\zeta_1$  を微小量と考え、第 3 次摂動解まで導出した結果を以下に示す。

$$\left. \begin{aligned} \mu_{Bopt} &= 2\mu + 2\sqrt{\frac{\mu}{3}} \zeta_1 - \frac{2}{9}(1 - 27\mu^2) \zeta_1^2 \\ &\quad + \frac{5 + 999\mu^2}{27\sqrt{3}\mu} \zeta_1^3 \\ \nu_{opt} &= \sqrt{1 + 2\mu} + \sqrt{\frac{\mu}{3(1 + 2\mu)}} \zeta_1 \\ &\quad - \frac{1 - 10\mu - 81\mu^2 - 108\mu^3}{9(1 + 2\mu)^{3/2}} \zeta_1^2 \\ &\quad + \frac{10 + 889\mu + 7264\mu^2 + 18360\mu^3 + 14688\mu^4}{108(1 + 2\mu)^{5/2}\sqrt{3}\mu} \zeta_1^3 \\ \nu_{Bopt} &= \frac{1}{1 + 2\mu} - \frac{2}{(1 + 2\mu)^2} \sqrt{\frac{\mu}{3}} \zeta_1 \\ &\quad + \frac{2(1 + 8\mu - 27\mu^2 - 54\mu^3)}{9(1 + 2\mu)^3} \zeta_1^2 \\ &\quad - \frac{5 + 44\mu + 1139\mu^2 + 3348\mu^3 + 2700\mu^4}{27(1 + 2\mu)^4\sqrt{3}\mu} \zeta_1^3 \\ \zeta_{2opt} &= 0 \\ \zeta_{3opt} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\mu}{1 + 2\mu}} + \frac{1 - \mu}{6(1 + 2\mu)^{3/2}} \zeta_1 \\ &\quad - \frac{1 + 4\mu - 32\mu^2 - 54\mu^3}{12(1 + 2\mu)^{5/2}\sqrt{3}\mu} \zeta_1^2 \\ &\quad + \frac{16 + 96\mu + 2811\mu^2 + 8984\mu^3 + 7776\mu^4}{648\mu(1 + 2\mu)^{7/2}} \zeta_1^3 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

#### 6. 安定度規範による最適化

安定度規範による最適化では、系の安定度, すなわち

$$\Lambda = -\max(\text{Re}[s_i]) \quad (13)$$

が最大となるように動吸振器のパラメータが設計される。ここで  $s_i$  は、振動系の  $i$  番目の特性根を表している。

安定度規範の場合には、伝達関数の種類 (コンプライアンス, モビリティ, およびアクセラランス) に関係なく、しかも力加振系と変位加振系の双方に対して以下の厳密解が得られた。

$$\left. \begin{aligned} \mu_{Bopt} &= 4\zeta_1^2 + 5\mu + 3q_3^{1/3} + 3\mu(8\zeta_1^2 + \mu)q_3^{-1/3} \\ \nu_{opt} &= \sqrt{1 + \mu_{Bopt}}, \quad \nu_{Bopt} = \frac{1}{1 + \mu_{Bopt}} \\ \zeta_{2opt} &= 0, \quad \zeta_{3opt} = \frac{\zeta_1 + \sqrt{3(\mu - \zeta_1^2 + \mu_{Bopt})}}{2\nu_{opt}} \\ \Lambda_{max} &= \frac{3\zeta_1 + \sqrt{3(\mu - \zeta_1^2 + \mu_{Bopt})}}{6} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここで

$$q_3 = \mu \left[ 8\zeta_1^4 + 8\zeta_1(\zeta_1^2 - \mu)^{3/2} + 20\zeta_1^2\mu - \mu^2 \right] \quad (15)$$

$\zeta_1 = 0$  においては、式 (14) は無減衰系に対する次の解に帰着することが確認されている。

$$\left. \begin{aligned} \mu_{Bopt} &= 8\mu, \quad \nu_{opt} = \sqrt{1 + 8\mu}, \quad \nu_{Bopt} = \frac{1}{1 + 8\mu} \\ \zeta_{2opt} &= 0, \quad \zeta_{3opt} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3\mu}{1 + 8\mu}}, \quad \Lambda_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{3\mu} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

#### 7. 最適化された動吸振器のパラメータの計算例

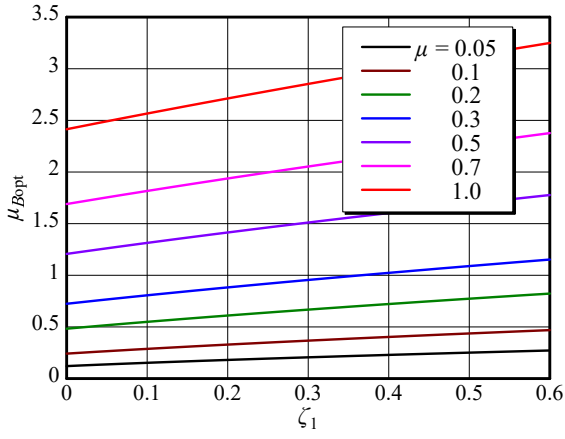
前節で示された各計算式は、3 次ないし 4 次の代数方程式の一つの根から導かれたものである。方程式には他にも複数の実根が存在するが、他の根を選択した場合には最適パラメータに負の値が現われる。また、これらの式を数値計算するにあたって、平方根内の数値には負の値が許容される。すなわち、計算の途中には虚数が現れるが、最後の計算結果は必ず実数になる。

図 2 は、さまざまな大きさ (質量比  $\mu$ ) の動吸振器において、主系減衰  $\zeta_1$  に対する二つの動吸振器 A と B の最適質量比  $\mu_{Bopt}$  の変化を示している。この図において、 $\zeta_1 = 0$  のときの値は、式 (6), (10), および (16) から計算される値と一致している。図 2(c) における実線は数値解を表し、破線は摂動法によって得られた式 (12) による近似値を表している。この図に示されるように、最適質量比  $\mu_{Bopt}$  は主系減衰  $\zeta_1$  の増加とともに徐々に大きくなり、特に図 2(a) と (b) から、 $H_\infty$  最適解と  $H_2$  最適解は非常に似ていることが分かる。一方、安定度規範による解 (図 2(d)) は、これらに比べるとかなり大きな値になる。

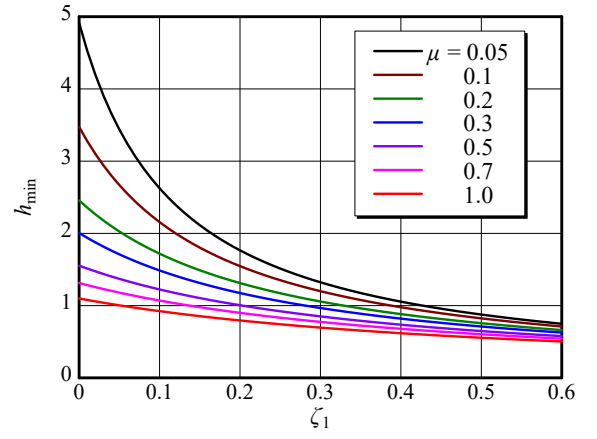
図 2(c) に示された変位加振系の解は、 $\zeta_1 = 0.1$  までは力加振系の解と大差はないが、主系減衰がこの値を超えると急激に大きくなっていく。破線で示された摂動近似解は  $\zeta_1 = 0.2$  までは、より正確な数値解とほぼ同じ値を返している。このことから、式 (12) は実用上十分な範囲をカバーしていると言える。

#### 8. 最小・最大化された評価指標 $h_{max}$ , $I_a$ , $\Lambda$ の値

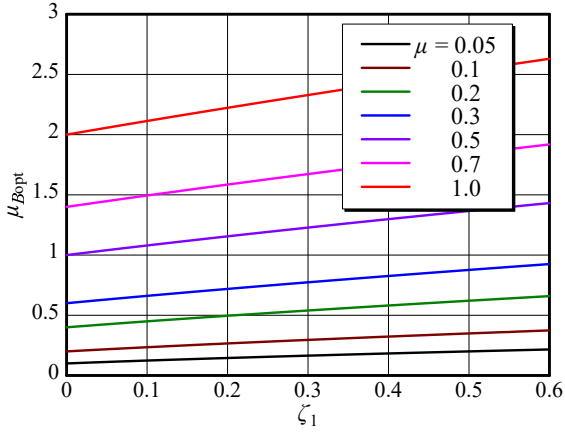
図 3 は式 (3), (7), (11) および (13) によって定義された四つの評価指標の最小値もしくは最大値を示している。不動基礎を有する力加振系 (図 3(a) と (b)) においては、当然のことながら、主系減衰の値が大きいほど評価指標の値は減少する。ところが、図 3(c) に示された変位加振系では、この指標は主系減衰のある値において最小値をとっている。これは、主系減衰が大きくなると高振動数域において振動絶縁効果が悪くなるからである。図 3(d) からは、振動系の安定度は主系減衰  $\zeta_1$  の増加に伴って比例的に向上していくことが分かる。



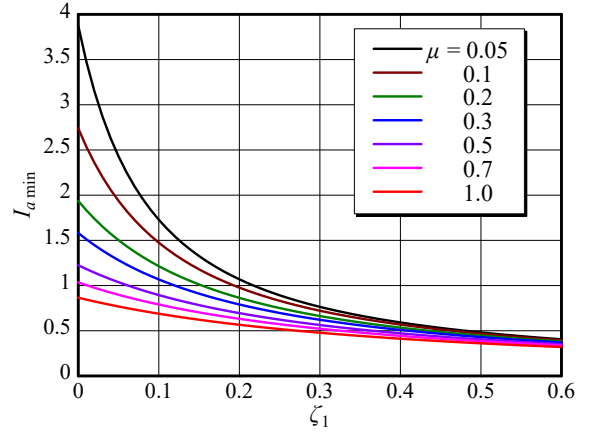
(a)  $H_\infty$ -optimal solution for the force excitation system



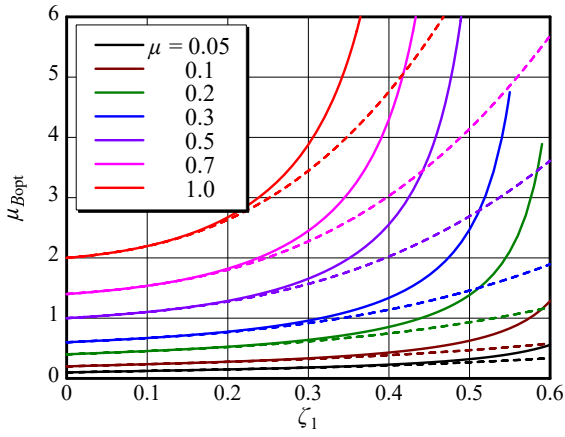
(a) Resonance amplitude minimized by the  $H_\infty$  criterion



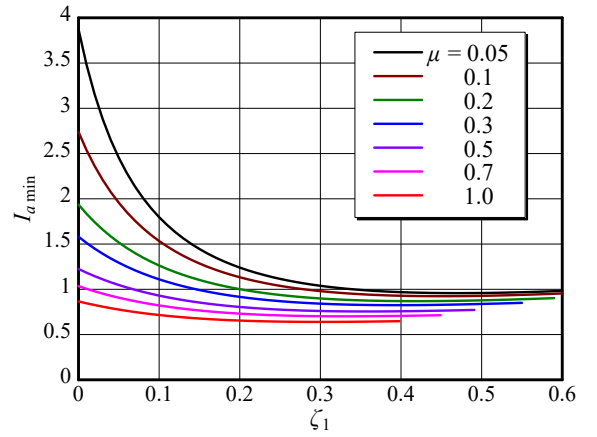
(b)  $H_2$ -optimal solution for the force excitation system



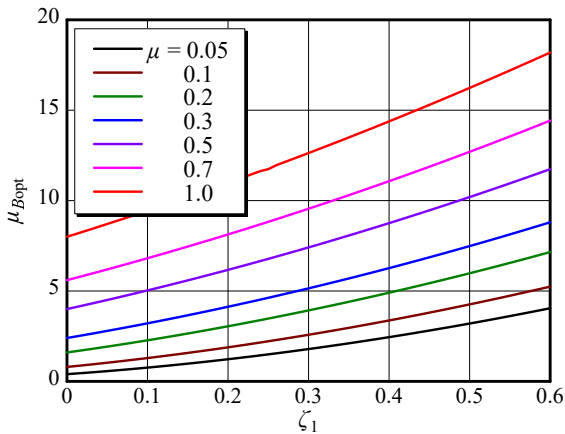
(b) Area minimized by the  $H_2$  criterion for the force excitation



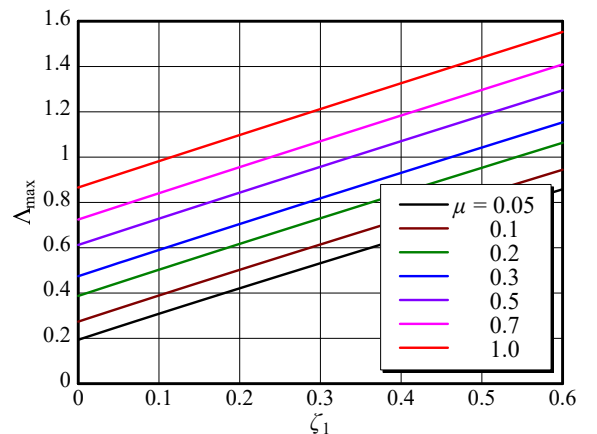
(c)  $H_2$ -optimal solution for the motion excitation system



(c) Area minimized by the  $H_2$  criterion for the motion excitation



(d) Stability maximization optimal solution



(d) Stability index maximized by the stability criterion

Fig.2 Optimal mass ratio  $\mu_{Bopt}$  (In Fig.(c), Solid line: Numerical solution, Dashed line: Perturbation solution)

Fig.3 Minimized or maximized performance indices obtained using the three optimization criteria

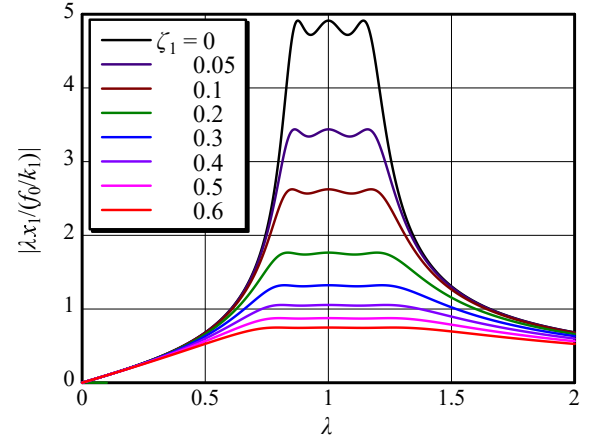
## 9. 最適化された振動系の周波数応答関数

図4は、 $H_\infty$ 、 $H_2$ 、および安定度の三つの規範で最適化された動吸振器が取り付けられた振動系の周波数応答を表している。各図の (a) と (d) は力加振系に対するモビリティ伝達関数を、また (b) と (c) は力加振系と変位加振系のそれぞれに対するコンプライアンス伝達関数を表示している。この図に示されるように、 $H_\infty$  規範で最適化すると三つの共振点の高さが等しく調整され、 $H_2$  規範で最適化すると高振動数になるほど共振が低くなり、安定度規範で最適化すると共振点は唯一になる。

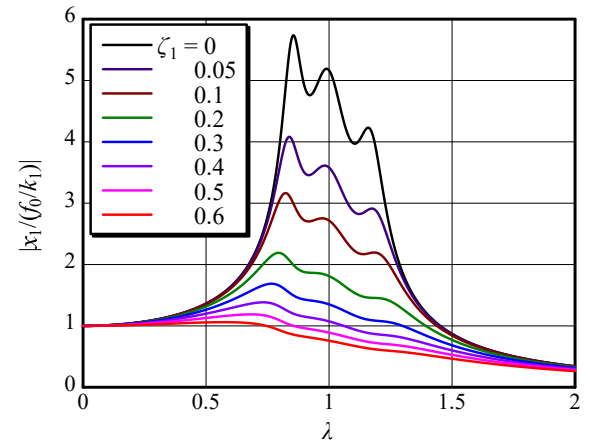
これらの図から、主系の持つ減衰が大きくなると、それだけ動吸振器による制振効果が高められていることが分かる。

### 参考文献

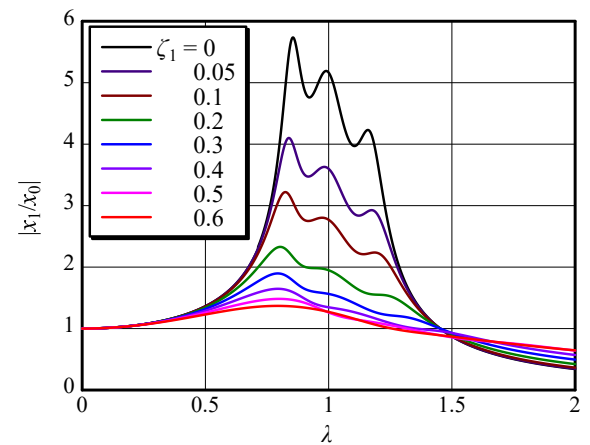
- (1) Ormondroyd, J., and Den Hartog, J. P., 1928; "The Theory of the Dynamic Vibration Absorber," ASME Journal of Applied Mechanics, **50** (7), pp. 9-22.
- (2) Hahnkamm, E., 1932; "Die Dämpfung von Fundamentalschwingungen bei veränderlicher Erregerfrequenz," Ingenieur Archiv., **4**, pp. 192-201, (in German).
- (3) Brock, J. E., 1946; "A Note on the Damped Vibration Absorber," ASME Journal of Applied Mechanics, **13** (4), p. A-284.
- (4) Nishihara, O., and Asami, T., 2002; "Closed-Form Solutions to the Exact Optimizations of Vibration Absorbers (Minimizations of the Maximum Amplitude Magnification Factors)," ASME J. Vib. Acoust., **124** (4), pp. 576-582.
- (5) Asami, T., and Nishihara, O., 2003; "Closed-Form Solution to  $H_\infty$  Optimization of Dynamic Vibration Absorbers (Application to Different Transfer Functions and Damping Systems)," ASME J. Vib. Acoust., **125** (3), pp. 398-405.
- (6) Tang, X., Liu, Y., Cui, W., and Zuo, L., 2016; "Analytical Solutions to  $H_2$  and  $H_\infty$  Optimizations of Resonant Shunted Electromagnetic Tuned Mass Damper and Vibration Energy Harvester," ASME J. Vib. Acoust., **138** (1), p.011018.
- (7) Liu, Y., Ling, C., Parker, J., and Zuo, L., 2016; "Exact  $H_2$  Optimal Tuning and Experimental Verification of Energy-Harvesting Series Electromagnetic Tuned-Mass Dampers," ASME J. Vib. Acoust., **138** (6), p.061003.
- (8) Argentini, T., Belloli, M., and Borghesani, P., 2015; "A Closed-Form Optimal Tuning of Mass Dampers for One Degree-of-Freedom Systems Under Rotating Unbalance Forcing," ASME J. Vib. Acoust., **137** (3), p.034501.
- (9) Soltani, P., Kerschen, G., Tondreau, G. and Deraemaeker, A., 2014; "Piezoelectric Vibration Damping Using Resonant Shunt Circuits: An Exact Solution," Smart Materials and Structures, **23**, p.125014.
- (10) Asami, T., 2017; "Optimal Design of Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Arranged in Series or in Parallel," ASME J. Vib. Acoust., **139** (1), p.011015.
- (11) Asami, T., 2018; Erratum of "Optimal Design of Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Arranged in Series or in Parallel," ASME J. Vib. Acoust., **140** (2), p.027001.
- (12) Asami, T., Mizukawa, Y., and Ise, T., 2018; "Optimal Design of Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Minimizing the Mobility Transfer Function," ASME J. Vib. Acoust., **140** (6), p.061012.



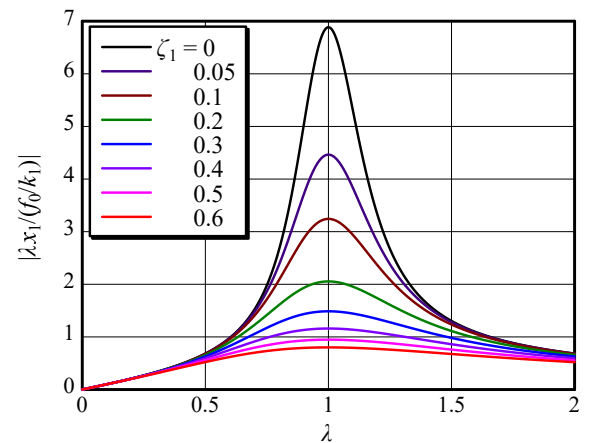
(a) Response optimized by the  $H_\infty$  criterion



(b) Response optimized by the  $H_2$  criterion for force excitation



(c) Response optimized by the  $H_2$  criterion for motion excitation



(d) Response optimized by the stability criterion

Fig.4 Optimized responses of the primary system with DVAs with  $\mu = 0.05$  based on the three different criteria