

## J. Piaget 論理的群性体の圏論的展開 ～ S. Papert 「エージェント理論」による解釈～

新 井 一 成\*・高 籾 学\*\*

経済学分野

(2014年8月29日受理)

### 要 旨

本研究は J. Piaget の発達段階論に関する研究である。発達段階論は、ひとが認識可能な論理の構造が段階ごとに異なるとする立場、及び下位の段階が上位の段階を包含する立場を主張する点で特徴的である。Piaget は論理学や生物学、数学や弁証法等の影響を受け、修正を加えつつも多くの著書で発達段階のモデルを度々提示した。その多くの場合で、論理の「数学的構造」が発想の下地にある。本研究では発達段階論の根本概念である「数学的構造」、中でもとくに「論理的群性体」に着目した。本研究ではまず発達段階論の根底をなす認識の「論理の構造」について整理し、初歩的群性体ならびに論理的群性体について整理した。続いて、2つの群性体を架橋するエッセンスとして S. Papert (1980) の「エージェント理論」について検討し、圏論を用いて「エージェント理論」の発展的な解釈を行った。

キーワード：J. Piaget, 論理的群性体, 圏論

### 1. はじめに

J. Piaget の発達段階論は教育学に大きく影響を与えており、後継研究も多い。発達段階論だけでも『発生的認識論序説』(1950)をはじめ多くの著作があり、また執筆時期によって数学、論理学、生物学や弁証法など様々な学問分野やその概念から影響を受けているために著作間で多少ならずのばらつきが見られる。本研究では関連著作のうち、ひとの認知構造を中心に扱った『論理学と心理学』(1953)および後継研究である S. Papert の『マインドストーム』(1980)に着目する。『論理学と心理学』では、ひとの発達の過程において構成される操作のシマ (Scheme) を、4つの発達段階のそれぞれについて提示した。特に高次の段階においては、束論・群論を用いて数理的に表現される「論理的群性体」の重要性が指摘される。

また『マインドストーム』では Piaget の発達段階論を踏まえ、より具体的実践的な形で、子どもの学習過程に迫っている。特に子どものコンピュータ・プログラミングを通じて「デバグ」をはじめとする独特な理論を展開しており、それらの着想がより端的にあらわれるものに「エージェント理論」が挙がる。

本研究の目的は、Piaget の「論理的群性体」とその下部構造である「初歩的群性体」のつながりを、Papert の「エージェント理論」を踏まえ、圏論的に考察することにある。

---

\* 東京学芸大学個人研究員  
\*\* 東京学芸大学 (184-8501 小金井市貫井北町 4-1-1)

## 2. Piaget『論理学と心理学』における発達段階論の操作のシエマ

Piaget のいわゆる発達段階論は感覚運動期 (0～2歳)・前操作期 (2～7歳)・具体的操作期 (7～11歳)・形式的操作期 (12歳～)に分けられる。Piaget はひとが成長するにつれて、ひとの認識できる「操作」すなわち操作のシエマが年齢を経るごとに増えていくという仮説を採用しており、操作のシエマごとに大きくこの4つの段階に分けられると主張する。各段階の操作の特徴は以下の通りである。

**感覚運動期**：操作的性格を持たないが、可逆性に向かう傾向、不変性（保存）が構成されている。

**前操作期**：第三段階に比べて不完全な可逆性をもつ。特に推移律が構成されない。

**具体的操作期**：動的均衡、すなわち可逆性の性質を獲得。包含と関係の具体的諸操作が認識可能。分類の操作、系列化の操作、加法と乗法の操作等のシエマがそれぞれの関係を考慮せずに構成されるため、変換の全体が形成されず、数・時間・体積などの各操作にそれぞれ独立した構造である、「初歩的群性体」を構成する。

**形式的操作期**：構造化された操作の全体である「論理的群性体」を得る。操作が具体的資料から離れ、理論から出発して理論上の諸関係の操作が理解できるようになる。

これらの説明から明らかなが、各発達段階の認知構造の違いが可逆性と保存の2つの概念に色濃く現れる。可逆性・保存ともに第一段階で既にその萌芽は見られるが、個々の操作の可逆性は第三段階以降で獲得され、個々の操作に付随する形で保存も獲得されていく。なお可逆性と保存は、次に示す全体との関係で論じた部分に分かりやすい。A は茶色の玉を、A' は白の玉を、B はその合計である木の玉をあらわす。箱の中に20個の木の玉があり、ほとんどが茶色である際の実験である。

ところで、心理学的実験は、5歳から7歳までの子どもは、この  $A < B$  の包含を構成することが不可能であるということを、はっきりと示している。この事実を子ども自らに解釈させると、(そして、ここではまた、このことは知覚的所与 perceptual data が解釈されるためには、それ以前に論理的な作用を前提とするということを示しているのだが)  $A > A'$  だから  $A > B$  であるという結論になる。子どもの答えは、'木の玉 (B) よりも茶色の玉 (A) の方が多い、なぜなら、白い玉 (A') は2つか3つしかないから' ということになる。この答が真に意味していることは、質問は全体の類 (B) に関するものであり、そこですべての玉は木であるということであるか、それとも、質問は部分 (A) に関するものであるかいずれかであるのだが、全体がその構成要素に分けられると、われわれはもはや全体はもたないということである。この例では、全体は1つの部分 (A') に還元されてしまい、したがって、 $B = A'$  だから  $A > B$  であるということになってしまったのである。

(Piaget (1953), 邦訳 pp.23-24, 下線は執筆者。)

Piaget は、子どもが上記の実験において正しい結論に至るためには合成の操作  $B = A + A'$  ならびにその逆操作  $A = B - A'$ ,  $A' = B - A$  を獲得する必要があるという。Piaget における可逆性の獲得とは、前者から後者を、後者から前者を導くことができることをさし、包含関係をはじめとするある分野における可逆性をもつ認知構造が「初歩的群性体」である。「群性体」は『構造主義』(Piaget, 1968)によると束 (Lattice) を中心とした論理構造に基礎もつといい、その論理構造に論点を絞り検討を加えたものが Piaget (1953) である。「初歩的群性体」は半順序束を用いて以下のようにあらわされる。

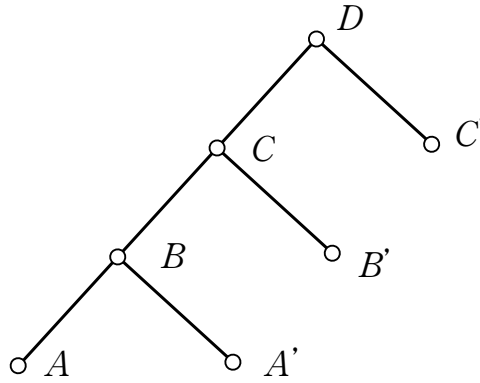


図1 初歩的群性体の半順序束による表現

これは以下の、数と関係の操作のシエマである。

合成  $A+A'=B, B+B'=C$

逆  $-A-A'=B, \text{よって} A=B-A', A=B-A'$

同一性  $A-A=0$

同義性  $A+A=A$ したがって  $A+B=B$

結合性  $A+(A'+B')=(A+A')+B'$

Piaget は、形式的操作期における「群性体」を「論理的群性体」および INRC 群と呼び、その操作性と、「初歩的群性体」と「論理的群性体」のつながりを特に重要視した。

「論理的群性体」においては操作のシエマは命題間の関係にみてとれる。Piaget はまず2つの命題間における関係性を提示した。

- ・逆関係 (N) : 命題  $p \vee q$  の逆関係は  $\bar{p} \cdot \bar{q}$
- ・相互関係 (R) : 命題  $p \vee q$  の相互関係は  $\bar{p} \vee \bar{q}$
- ・相関関係 (C) : 命題  $p \vee q$  の相関関係は  $p \cdot q$

2 命題間における逆関係・相互関係・相関関係を図示すると次のようになる。

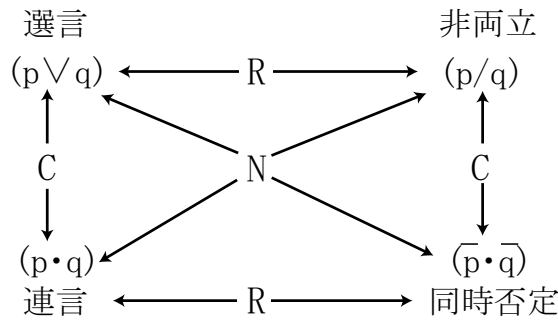


図2 2 命題間の INRC 群<sup>1</sup>

これを踏まえ Piaget は、次に示す 16 の命題の操作について整理した。

- |                                    |  |   |   |
|------------------------------------|--|---|---|
| 1 (0)                              | 2 ( $p \cdot q$ )                                    | 3 ( $p \cdot \bar{q}$ )                                     | 4 $p \cdot (q \vee \bar{q})$  |
| 5 ( $\bar{p} \cdot \bar{q}$ )      | 8 ( $p \cdot q$ ) $\vee$ ( $\bar{p} \cdot \bar{q}$ ) | 11 ( $p \cdot \bar{q}$ ) $\vee$ ( $\bar{p} \cdot \bar{q}$ ) | 14 ( $q \supset p$ )  |
| 6 ( $\bar{p} \cdot q$ )            | 9 ( $p \cdot q$ ) $\vee$ ( $\bar{p} \cdot q$ )       | 12 ( $p \cdot \bar{q}$ ) $\vee$ ( $\bar{p} \cdot q$ )       | 15 ( $p \vee q$ )   |
| 7 $\bar{p} \cdot (q \vee \bar{q})$ | 10 ( $p \supset q$ )                                 | 13 ( $p / q$ )  | 16 ( $p \cdot q$ ) $\vee$ ( $p \cdot \bar{q}$ ) $\vee$ ( $\bar{p} \cdot q$ ) $\vee$ ( $\bar{p} \cdot \bar{q}$ ) |

図3 16 命題間の INRC 群

この命題集合は以下の7つの性質をもつ<sup>2</sup>。

- (1) 命題8から16は、2, 3, 4と5, 6, 7の論理和で表される。命題8は命題2と命題5の論理和。
- (2) 命題1～3, 5～11, 6～12は、4, 14, 15と7, 10, 13の論理積で表される。命題8は命題14と命題10の論理積。
- (3) 各命題は、この図の中心を点対称として、逆関係Nを形成する。命題2の逆は命題13。
- (4) 各命題は、この図の対角線1, 8, 12, 16を線対称として、相互関係Rを形成する。命題14の相互関係は命題10。
- (5) 各命題は、この図の対角線7, 9, 11, 4を線対称として、相関関係Cを形成する。命題2の相関関係は命題15。
- (6) 対角線1, 8, 12, 16上の4命題は、 $I=R$  および  $C=N$  の特性をもつ。
- (7) 対角線7, 9, 11, 4上の4命題は、 $I=C$  および  $R=N$  の特性をもつ。

例えば図3上で(5)を表すと以下のようになる。

1	(0)	2	$(p \cdot q)$	3	$(p \cdot \bar{q})$	4	$p \cdot (q \vee \bar{q})$
5	$(\bar{p} \cdot \bar{q})$	8	$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$	11	$(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$	14	$(q \supset p)$
6	$(\bar{p} \cdot q)$	9	$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q)$	12	$(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$	15	$(p \vee q)$
7	$p \cdot (q \vee \bar{q})$	10	$(p \supset q)$	13	$(p / q)$	16	$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$

図4 16命題間のINRC群における相関関係Cの表現<sup>3</sup>

Piaget (1953) の「論理的群性体」の説明は以上であるが、「初歩的群性体」との比較を容易にするため、命題間の論理和・論理積が(1)(2)の性質をみたすように16の命題の関係性を図示すると、以下のようになる。

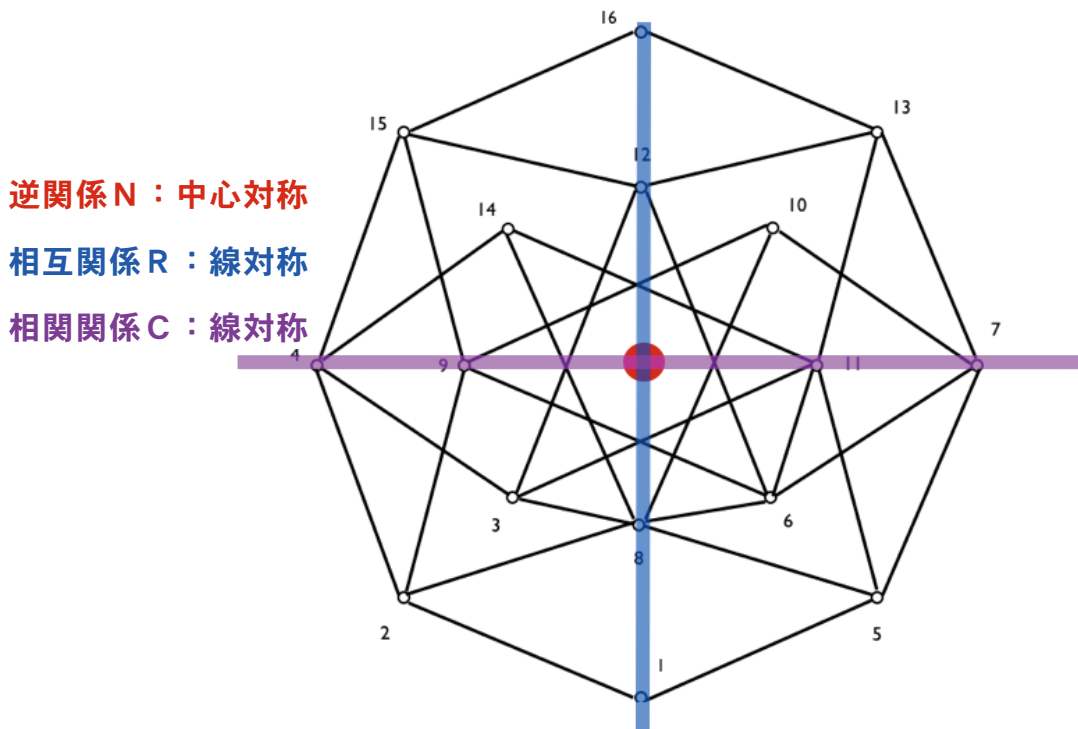


図5 論理的群性体の半順序束による表現<sup>4</sup>

ところで、Piaget は下位の発達段階と上位の発達段階の関係について、より低次の水準の輪かく的諸構造を、発達のさらに高い段階の論理的構造に位置づけることが重要であると主張する。Piaget の主張に沿うならば、具体的操作期にあたる「初歩的群性体」も何らかの形で、高次の構造である「論理的群性体」に位置づける必要があるが、半順序束の観点からみた両者の論理構造の関係は、必ずしも明らかでない。

### 3. Papert の「エージェント理論」

Papert は Piaget の共同研究者のひとりである。『マインドストーム』はいわゆる構築主義教育の理論書として知られ<sup>5</sup>、Papert が子どもの観察を通じて得た、コンピュータ・プログラミングを通じた学習の様子が随所にみられる。ところで Papert (1980) は、式や図表が多用される Piaget (1953) とは異なり、数理的な説明、モデルがほとんど登場せず、LOGO やタートルによるプログラミングを除くとほぼ文章による説明となっている。Papert の理論の特徴は、「デバグ」「マイクロワールド」「数学教育」の3点に集約される。それぞれ本文中に明確な定義はないが、要約すると以下ようになる。

- デバグ： 現実世界に存在するある問題の解決を考える際に、子どもはコンピュータ上でその手順を書いたプログラムを実行する。もしうまく解決できない場合、プログラムを修正するという作業を通じて、現実世界の問題の解決に生かすという考え方
- マイクロワールド： 子どもが自由にプログラミングを行うことで、ある法則性に基づく架空の世界を構築することができるようになる。仮にその世界が誤った世界であったとしても、子どもの創造性を支え、正否の基準に支配されることのない知的環境が創り出される点で意味がある
- 数学教育： そもそもひとがなぜ数を学ぶことができるのか、に注目した学派に、ブルバギ学派が挙げられる。デバグやマイクロワールドを通じて初歩的な群論や束論に触れることで、子どもの知的構造に変化が起きる<sup>6</sup>

上記の主張をやや踏み込んで解釈すれば、Papert の理論は、Piaget のいうところの「群性体」を、子どもがプログラミングするという行為を通じて多少なりとも客観的に見えるものとする営みであるとも考えられる。これら3点の特徴を踏まえ、子どもがどのように意思決定を行っているかと Papert が考えているのか、すなわち Papert の「群性体」観が端的にあらわれていると考えられる、「エージェント理論」について整理を行う。

子供の頭の中には、それぞれ違った「幼稚な」やり方で量を判断する3人のエージェントが存在すると仮定しよう。第一に、高さのエージェントは、液体の量であれ何であれ、その垂直上の限界によって判断するものである。これは、子供の生活において実用的なエージェントである。子供達を背中合わせに立たせて背を比べたり、コカコーラやチョコレートミルクをコップに均等に配分したりするのでお馴染みのものだ。ここで強調したいのは、高さのエージェントは液体の量を「知覚する」というほどの複雑なことは何もしない。高ければ何でも多いのだという抽象原理を狂言的に奉じているに過ぎないということだ。

第二は、広さのエージェントとあって、平面上の限界によって判断するものである（中略）。

最後に、歴史のエージェントと呼ばれるものがあり、これは前に同じ量だったのだから今も同じだという。

(Papert (1980), 邦訳 pp.193-194, 下線は執筆者。)

3人のエージェントが意思決定を行う手順を示すと以下ようになる。

- ・ エージェント同士は、それぞれ「声の大きさ」が決まっており、声の大きい順に意見が採用される。
- ・ 第一には、「洗練」による順番変更ある。例えば広さのエージェントが成長し、細かな条件がついたため、他の条件が同じでない限り、高さのエージェントが判断基準としての資格を失う。
- ・ 第二に、「先任順」による順番変更がある。突如順序が代わり、歴史のエージェントが優勢になることもあり得る。
- ・ 第三に、「中和」による変更がある。高さや広さのエージェントが互いに矛盾する意見を出すことによって互いを中和する。これがもっとも重要で、これは知的操作を群性体に編制するというピアジェの方法と近いものである。
- ・ 両者の矛盾を通じて、高さのエージェントと広さのエージェントの監督者の役割を果たすものとして、第4のエージェント（幾何のエージェント）が追加される。第4のエージェントは高さや広さの中和の有無のみを察知する。
- ・ 実際の子どものなかには多くのエージェントがいるが、簡略化のため4人のときを考えた。

本研究でとくに注目するのは、第三のメカニズムである「中和」である。第4のエージェントが出現し、他のエー

エージェントの監督者となるメカニズムに、Piagetのいう「初歩的群性体」と「論理的群性体」の構造の間の関係を自然とつなぐエッセンスがあるものとする。つまり、各エージェントのなかの判断基準として「初歩的群性体」を位置づけ、数人のエージェント全体の構造に「論理的群性体」を位置づけるのである。

ただ、PiagetとPapertの理論は記述の方法が大きく異なるため、単純にPapertの記述のみを用いて、Piagetの群性体を解釈することは容易ではない。

#### 4. 「エージェント理論」の圏論による解釈

以上の議論を踏まえ、PiagetとPapertの理論を架橋すべく、本研究ではエージェント理論の圏論による解釈を試みる。

以下の条件を満たすような $C$ を圏という<sup>7</sup>。

- (1)  $C$ は対象 $A, B, C$ …と矢 $f, g, h$ …から構成される。
- (2)  $C$ の任意の矢には始域と終域が定まっている。始域と終域が等しい場合、同一矢が存在する。
- (3)  $f$ と $g$ の合成が定義でき、 $f \circ g$ で表わす。

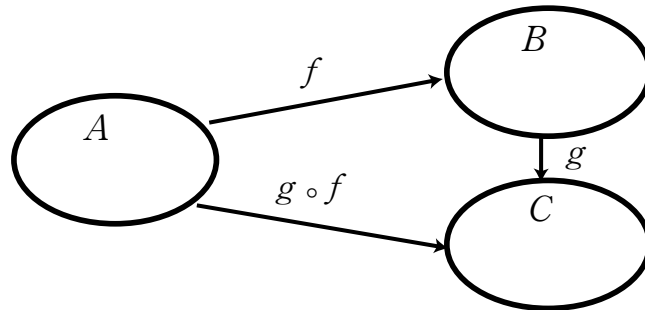


図6 圏の定義<sup>8</sup>

このように、圏は束や群、あるいは古典集合論と比べると非常に緩く定義されている点にその特徴がある。必然的に、圏論を用いた解釈は、対象の内部構造ではなく、対象同士の関係性を重視することになる。

以下、圏論を用いて「エージェント理論」の発展的解釈を行う。

まず「中和」モデルを圏論により示す。「中和」において、高さや広さのエージェントはそれぞれの主張を幾何のエージェントに知られているはずである。よって始域を高さや広さのエージェントとし、終域を幾何のエージェントとするモデルが考えられる(図7)。さらに、それぞれのエージェントは「初歩的群性体」により意思決定を行うことを強調すれば、図8のようにも書ける。

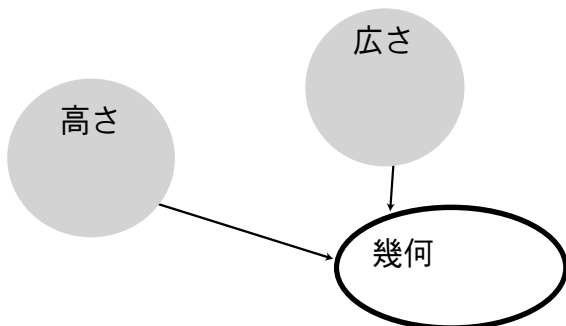


図7 「中和」モデルの圏論的展開

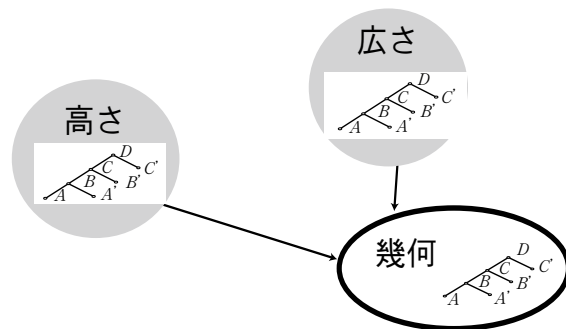


図8 初歩的群性体と「中和」モデル

次に、「洗練」および「先任順」モデルを考える。幾何のエージェントと歴史のエージェントを比べた場合、元々の「声の大きさ」では歴史のエージェントのほうが大きかったが、「洗練」または「先任順」の変化による順序変更により、幾何のエージェントの決定の声が大きくなる場合を図示すると、図9・図10のように表現できる。下部の圏は4人のエージェントによる最終的な決定を意味する終域となる。

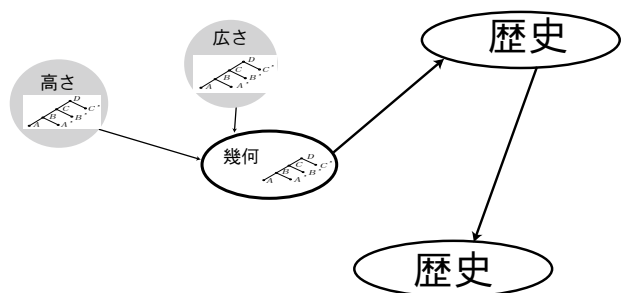


図9 「洗練」「先任順」モデルの圏論的展開

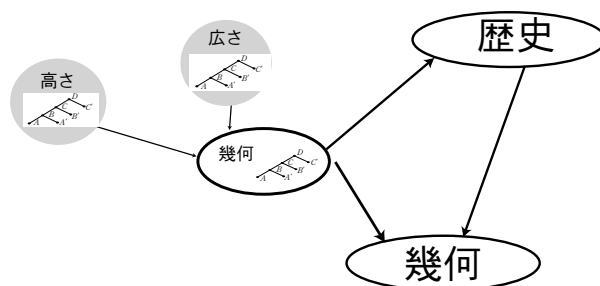


図10 「洗練」「先任順」モデルの圏論的展開（順番変更後）

Papert は単純のため4人のエージェントに限定して考察しているが、実際にはより多くのエージェントが子どものなかにはいると Papert は考えている。これに従うと、以上のようなエージェント理論の圏が他にも複数考えられる。すると、より広範な範囲において「洗練」「先任順」「中和」による順番変更が起こることが想定されるので、最終的に以下のようなモデルを経て意思決定が行われると考えられる。始域と終域の繰り返しが、論理的群性体を形成していくものと捉えることができる。

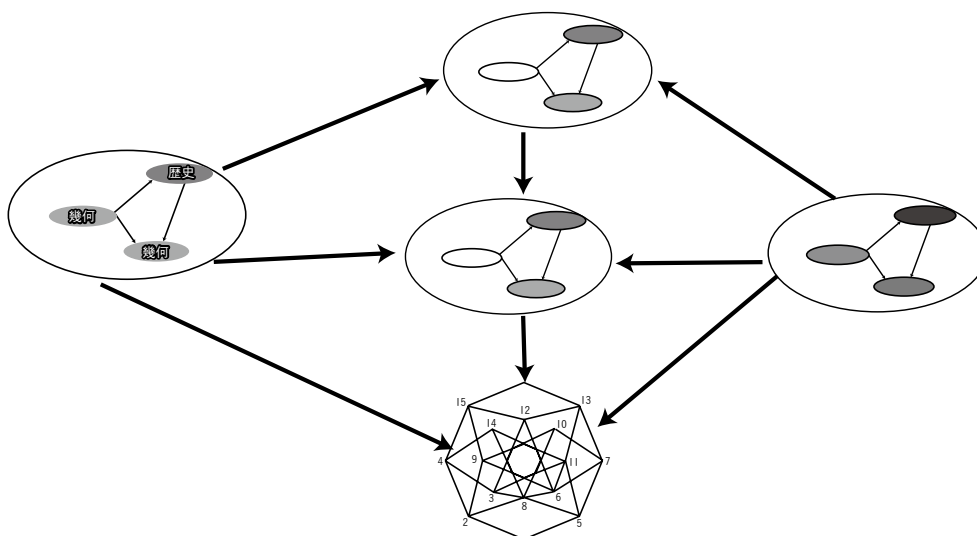


図11 論理的群性体と「エージェント理論」

## 5. 結論

以上簡単にではあるが、Piaget の群性体を Papert の「エージェント理論」と関連づけることを試みた。「エージェント理論」ならびに、対象の内部構造に踏み込まないという圏論の性質を用いることで、ごくごく僅かではあるが「初歩的群性体」と「論理的群性体」の関係性を描くことができたが、Piaget の束構造と圏論の精密な接続など、今後より一層慎重なモデルの検討が望まれるだろう。本研究の課題として、論理的群性体の公理的側面からの研究や、Piaget と Papert に通底する思想である構造主義的な視点と圏論の整合性、論理的群性体を圏論で解釈することの積極的意義などが挙がるが、それらは他稿に譲りたい。

## 注

- 1 Piaget (1953), 邦訳 p.13. なおこの図は『論理学概論』(1949) p.271 の Table (C) の再掲であるようだ。
- 2 Piaget (1953), 邦訳 pp.57-58.
- 3 Piaget (1953), 邦訳 p.57. をもとに執筆者加筆。

- 4 Klein 四元群をもとに執筆者作成。ちなみに、Piaget (1953) の命題番号は Klein 四元群のそれとは一致しないが、後の Piaget (1962) では 16 の命題番号が部分的に入れ替わっており、Piaget (1962) を同様の方法で図示した場合は Klein 四元群の順序と完全に一致する。このことは、Piaget の論理的群性体にたいする立ち位置が時期によって異なることを示唆しているが、そのことが発達段階論の解釈にどのような影響を与えうるかについては他稿に譲りたい。
- 5 以後、Papert (1980) と表記する。
- 6 Papert (1980), 邦訳 pp.184-185。
- 7 圏の定義は清水 (2007), p.56 に従った。
- 8 清水 (2007) をもとに執筆者作成。なお、これ以降の圏論の図も全て執筆者が作成した。

## 参考文献

1. Mashaal. M (2002) *BOURBAKI*. 高橋礼司訳 (2002) 『ブルバキ 数学者達の秘密結社』, シュプリンガー・ジャパン.
2. Piaget. J (1953) *Logic and Psychology*, University of Manchester at the University Press. 芳賀純訳 (1966) 『論理学と心理学』, 評論社.
3. Piaget. J (1962) “La formation des structures de l’intelligence.” *Bulletin de Psychologie*, 15, pp.1065-1073.
4. Piaget. J (1968) *Le Structuralisme*, Paris. 滝沢武久・佐々木明共訳 (1970) 『構造主義』, 白水社.
5. Papert.S (1980) *MindStorms Children, Computers and Powerfull Ideas*, Basic Books, 奥村貴世子訳 (1982) 『マインドストーム 子供, コンピューター, そして強力なアイデア』, 味来社.
6. L. Smith (1987) “A constructivist interpretation of formal operations”, *Human Development* 30, pp.341-354.
7. 真田孝昭 (1993) 「ピアジェの論理学的モデルとその代替的モデル」, 『静岡大学教育学部研究報告. 人文・社会科学篇』, 44 号, pp.201-216.
8. 清水義夫 (2007) 『圏論による論理学』, 東京大学出版会.
9. 波多野完治 (1986) 『ピアジェ入門』, 国土社.
10. 深山洋平 (2012) 「圏論と構造主義」, 『北海道大学大学院文学研究科 研究論集』, 第 12 号, pp.31-46.