東京学芸大学紀要　人文社会科学系Ⅱ　67：143－149，2016

ケインズ『確率論』における「ブールの挑戦問題」の扱われ方の整理：M.E. ブレディ（2004）を参考に

新　井　一　成*1・高　籔　　学*2

経済学分野

（2015 年 8 月 28 日受理）

要　旨

本研究の目的は，ケインズの著作『確率論』(1921) において深く掘り下げられている，「ブールの挑戦問題 (Boole's Challenge Problem)」が『確率論』においていかなる意味をもつのか，整理することである。

『確率論』はケインズ独自の確率解釈に基づく体系として有名であり，公理に基づいて論理式の変形について触れられている第 II 部 (第 10 章～第 17 章) は，特にそのエッセンスを読み取ることができる。「ブールの挑戦問題」は，第 II 部の随所に登場する。ケインズは「ブールの挑戦問題」の解決を試みた数々の研究を挙げた上で，この問題の解決を試みることで自身の「確率」体系の分析力を示そうとした。本研究では『確率論』における「ブールの挑戦問題」の扱われ方を整理するにあたって，ブレディ (2004) を参考にした。ブレディは「ブールの挑戦問題」と，統計学でいう区間推定を関連付けて論じており，また，『確率論』で触れられている他の研究についても丁寧に触れているためである。

1．研究概要

本研究の目的は，経済学者 J.M. ケインズの著作『確率論』(1921) において深く掘り下げられている，「ブールの挑戦問題 (Boole's Challenge Problem)」が『確率論』においていかなる意味をもつのか, 整理することである。経済学では，自らの持つ情報に基づき期待値などを正確に計算することができる「合理的経済人」の仮定が伝統的に行われてきた。この仮定に基づくならば主体は「合理的」に意思決定をすることができ，期待効用理論を中心に理論的発展をとげてきた。しかし，エルスバーグのパラドクスやアレのパラドクスを始めとする多くのパラドクスが指摘された。これら議論の前提として，ひとは，確率の値を認識可能なのか，また確率を正しく認識した場合に正確な確率計算が可能なのか，一概に結論が出しにくい点が挙がるだろう。

確率とひとの認識の関係について論じた古典的名著として，ケインズの『確率論』が挙がる。『確率論』はケインズ独自の確率解釈に基づき議論が展開されており，現代でいうところの確率の劣加法性の問題や，確率の順序の問題，区間推定の問題などを取り扱っており，不確実性に関して今なお色褪せない論点を含んでいるといえる。

中でも，独自の記法といくつかの公理を導入し，それら公理に基づいて論理式の変形について述べられている第 II 部 (第 10 章～第 17 章) は，特にケインズの確率思考のあり方が凝縮されているといえる。『確率論』第 II 部はたんに論理式の変形にとどまらず，19 世紀の主要な確率論の研究に網羅的に触れている。そのため，その全容を正確にとらえることは容易ではなく，『確率論』の他の部分と比べてあまり研究が進んでいない。しかし，ケインズの「確率」を理解するにあたり，図や日常言語による理解だけではなく，それぞれの論理式

＊1　東京学芸大学 個人研究員
＊2　東京学芸大学 社会科学講座 経済学分野（184-8501　小金井市貫井北町 4-1-1）

の意味を理解することは，解釈の明解さの観点からも重要であろう。

本研究では，『確率論』第Ⅱ部を理解する足がかりとして「ブールの挑戦問題」に着目した。「ブールの挑戦問題」は，第Ⅱ部の全体を通して随所に登場する。ケインズは「ブールの挑戦問題」は，『確率論』にひそむケインズの論理思考の，ひとつの明示的な例となっている。

なお本研究では『確率論』における「ブールの挑戦問題」の扱われ方を整理するにあたって，ブレディ (2004) を参考にした。ブレディは「ブールの挑戦問題」と，統計学でいう区間推定を関連付けて論じており，また，『確率論』で触れられている他の研究についても丁寧に触れているためである。

２．ケインズ『確率論』の概要

２．１　確率関係

『確率論』では，論理学的表現による認識論的確率論が展開される。すなわち，「確率」とはある一つの命題から他のもう一つの命題に至る推論に付随するものであるという解釈である。これは論理学が前件命題（前提）と後件命題（結論）の間の推論を扱う分野であることに起因する。また「確率」は帰納的推論で導かれる。帰納的推論においては，前提が真でもそこから推論される結論は蓋然的にしか決まらない。ケインズは，結論の蓋然性には程度があると考え，確率は蓋然性の程度の度合いを合理的に表すものと定義した。これを「確率関係（probability-relation）」とよぶ。定義を次にあげる。

> 前提が任意の命題の集合 h からなり，結論が任意の命題の集合 a からなるとする。そのとき，もし h の「知識」が a に対して度合 α の合理的信念をもつことを正当化するならば，a と h の間に度合 α の確率 - 関 係があるという。
>
> （Keynes（1921），p. 4，邦訳 p. 5 ）

上記を縮めて $a/h=\alpha$ と表せる。α を現代的に解釈するならば写像の一種であり，a/h は推論である。

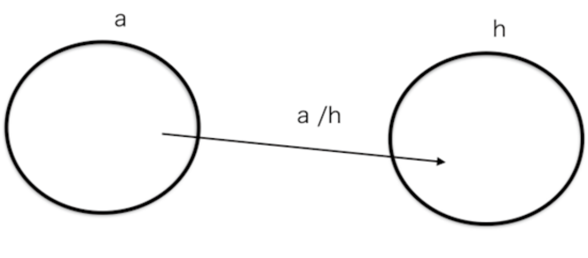

図１　『確率論』と写像

以下は，『確率論』第３章における，ケインズが確率関係について提示した図である。

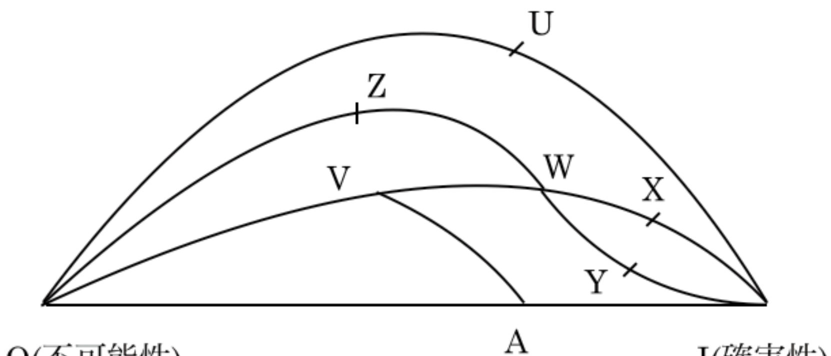

図２　『確率論』の順序系列およびストランド[1]

点 O,A,I と $U\sim Z$ は確率を表す。確実性 I に近づくほど確率は大きく，不可能性 O に近づくほど確率は小さ

いという。O と I の間の数本の線が確率のシリーズであり，同一シリーズにない確率は比較不可能である。数値表現可能な「確率」はシリーズ OAI 上に位置する。ここにケインズ「確率」の最大の特徴がある。ケインズにとって「確率」は，一般の線形確率と異なり，必ずしも数値表現できるとは限らないものなのである。

２．２　『確率論』の公理

次に，ケインズの公理について確認する。前述した確率関係の図 1 の別表現として，論理式を用いた公理をいくつか決めている。

例えば，「確実性の公理」であれば，$P=a/h$ とすると，

II　もし P が確実性の関係であるならば，　$P=1$ [2]

と表現できる。これは図 1 における右端点 I についての定義である。ケインズは I ～ XIX までの公理から，(i) ～ (vi) の予備公理や (1) ～ (58.3) までの論理式を導出した。膨大な量にのぼるので，以下では「ブールの挑戦問題」と関係の深いものを挙げる。

加法の公理 (公理 IX)　　$ab/h+a\bar{b}/h=a/h$

乗法の公理 (公理 X)　　$b/h=a/bh\ .b/h=b/ah\ .a/h$

独立性 (公理 XIII)　　もし $a_1/a_2h=a_1/h$ かつ $a_2/a_1h=a_2/h$ ならば，確率 a_1/h と a_2/h は独立である。

無関連 (公理 XIV)　　もし $a_1/a_2h=a_1/h$ ならば，a_2 は概して a_1/h に関連がない。

あるいは略して，a_1/h に関連がない。

この書き方からわかるように，公理 IX や公理 X と異なり，公理 XIII や公理 XIV はつねに成り立つわけではない。ここで，ケインズは明記していないが，論理式をみると，公理 XIII が正しいとき，公理 XIV も正しいことが読み取れる。一般的な確率において「独立」ならば「無関連」であるが，ケインズ「確率」においても独立性が成り立つならば無関連であることがいえる。

加法定理　(論理式 (24.1))　もし $ab/h=0$ ならば，すなわちもし a と b が仮説と相対的に排反する選択肢であるならば，

$(a+b)/h=a/h+b/h$

乗法定理 (論理式 (36))　もし a_1/h と a_2/h とが独立であるならば，

$a_1\,a_2/h=a_1/h\ .a_2/h$

３．ブールの挑戦問題 (Boole’s Challenge Problem)

３．１　『確率論』における「ブールの挑戦問題」

次に,『確率論』において「ブールの挑戦問題」がどのように触れられてきたか整理する。「ブールの挑戦問題」は元々 G. ブール『思考の法則』(1854) において論じてきた確率計算のひとつであり，『確率論』においては第 II 部第 14 章における以下が初出である。

> b は事象 B の生起を表し，a_1 および a_2 は B の可能な２つの原因 A_1 と A_2 が存在するという仮説を表し，h は問題の一般的データを表すとしよう。そのとき，p_1 および p_2 は，事象 B が起こったか否かがわかっていないときの A_1 と A_2 のそれぞれが存在する事前確率である。
> (Keynes(1921), p.164, 邦訳 p.171)

なお上記はケインズが，逆原理に関連する論理式 (38.1) を説明するために書きなおした箇所にあたる。『思考の法則』で議論された元々の「ブールの挑戦問題」は第１７章で，論理式 (56) として触れられている [3]。

> (56)　二つの原因 A_1 および A_2 の事前確率はそれぞれ c_1 および c_2 である。原因 A_1 が生起するならば，事象 E がそれにともなって起こる (A_1 の結果として起きるのである，なしにかかわらず) 確率は p_1 であり，A_2 が出現するならば，事象 E がそれにともなって生起する確率は p_2 である。そのうえ，原因 A_1 と A_2 両方ともに存在しないならば，事象 E の出現はあり得ない。事象 E の確率を求める。

この問題には大きな歴史的重要性があり，ブールの「挑戦問題」と呼ばれてきた。
(Keynes(1921), pp.206-207, 邦訳 p.216)

この「ブールの挑戦問題」は元々, 1851 年にブールが解を寄せるよう雑誌で呼びかけ, 事象 E の確率について, ケイリー・ウィルブラハム・マッコールらが解答したとされている。それらの反応を踏まえ『思考の法則』でブールが提示した解答が，以下の方程式を満たす解 u である。

$$\frac{[1c_1(1\text{-}p_1)-u][1-c_2(1\text{-}p_2)-u]}{1-u}=\frac{(u-c_1\,p_1)(u-c_2\,p_2)}{(c_1\,p_1+c_1\,p_2-u)}$$

式１：Boole(1854)　G.Boole の提示した ,“Challenge Problem”の解 u が満たす方程式

この解はブールによると $c_1\,p_1$ および $c_2\,p_2$ より大きく，かつ $1-c_1(1\text{-}p_1)$ または $1-c_2(1-p_2)$ または $c_1\,p_1+c_2\,p_2$ より大ではないとのことだが，ケインズはこのブールの解法が誤っていると指摘する [4]。

この解が間違っていることは容易にわかる。というのは，A_1 と A_2 の両方が生起し得ない場合には，解は $u=c_1\,p_1+c_2\,p_2$ となるからである。ところがブールの方程式はこの簡単な形に変形できない。
(Keynes(1921), pp.207-208, 邦訳 p.217)

以下が，第１７章におけるケインズの解答である。

非常に簡単なものであるが，正しい解は次のようにして得られる。すなわち，
a_1,a_2,e はそれぞれ二つの原因と生起とその事象の生起を示しており，h はその問題のデータであるとしよう。

そのとき，$a_1/h=c_1,\ a_2/h=c_2,\ e/a_1\,h=p_1,\ e/a_1h=p_2$ が得られる。求めるものは e/h である。
$e/h=u$ かつ $a_1\,a_2/eh=z$ であるとしよう。二つの原因が両方とも存在しない場合には，その事象は起こり得ないのであるから，$e/\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,h=0$

このことから，$e/h=0$ でないかぎり，$\bar{a}_1\,\bar{a}_2/eh=0$ であるということが導かれる。すなわち，

$$(a_1+a_2)/eh=1$$

そしてそれゆえに，(24) により，

$$a_1/eh+a_2/eh=1+a_1\,a_2/eh$$

さて　$a_1/eh=\dfrac{c_1\,p_1}{u}$　かつ　$a_2/eh=\dfrac{c_2\,p_2}{u}$

したがって，$u=\dfrac{c_1\,p_1+c_2\,p_2}{1+z}$

ここに，z は両方の原因が存在するという事象が生起した後の確率である。
もし $ea_1\,a_2/h=y$ と書くならば，

$$y=a_1\,a_2/eh.\quad e/h=uz,$$

したがって　$u=(c_1\,p_1+c_2\,p_2)-y$
ブールの解は，それが y もしくは z から独立であることを求めたために失敗している。
(Keynes(1921), p.208, 邦訳 pp.217-218. 下線部は執筆者による。)

上記した部分おいて，ケインズは「ブールの挑戦問題」という一般的な確率論の問題にたいし，自らが定義した記法，および，自らが導いた論理式 (24) である加法定理を用いて説明を行った。ケインズによれば，この「ブールの挑戦問題」に解を与えるために，『確率論』のこれまでの議論を展開したとのことである [5]。論理式の形式的操作が第Ⅱ部の大半を占めるなかで,「ブールの挑戦問題」は，ケインズ「確率」の一般的な確率論の問題へのひとつの応用例といえる。

なお，ケインズは別の箇所で，独立について非常に慎重な適用を心がけるべきだ，と主張する。

したがって，与えられた証拠に基づいて a_1 と a_2 の間に独立性が存在する場合には，この証拠に基づいた a_1a_2 が共に成り立つ確率は a_1 と a_2 のそれぞれの確率の積になる。この条件が満たされない限り，確率計算に数学的推理を適用することは困難である。・・・（中略）・・・これらの誤謬は，ある程度，独立という用語の意味に関して明確な理解が欠如していることによるものであった。確率の研究者たちは，推論もしくは命題の独立性よりも事象の独立性について考察してきた。

(Keynes(1921), p.181. 邦訳 pp.188. 下線部は執筆者による。)

上記はいわゆる「乗法定理」の適用の慎重さにつながる。このことから，ケインズが「ブールの挑戦問題」にたいするブールの解が誤っていると指摘した理由は,「乗法定理」が使えない, 推論が独立ではない状況下でブールが独立を仮定したためだ，と推測される[6]。ふたつの事象や推論が独立であるかどうかの論点は，ケインズが第Ⅱ部を通じてくり返し注意を払ってきた論点のひとつである。

３．２　ブレディによる「ブールの挑戦問題」の解釈

前節では，ケインズは自らの記法を用いて「ブールの挑戦問題」への解を与えたこと，ならびにブールの解が誤っていると指摘したことを確認した。それを踏まえ，本節では『確率論』における「ブールの挑戦問題」の扱われ方を批判した，ブレディ (2004) をみていく。ブレディは”The Future of Keynes' Logical Theory of Probability,“Non-Numerical”Probabilities and Conventional Coefficient of Risk and Weight is in AI, Fuzzy Logic,Possibility Theory and Boolean Probability Logic, not in Economics in general and Post Keynesian Economics in Particular”なる章において,「ブールの挑戦問題」において誤っているのはブールではなく，ケインズであると指摘した。まず，ケインズは「ブールの挑戦問題」の解答者のひとり，ウィルブラハムを詳細に検討していない，とブレディは批判した[7]。ブレディによると，ウィルブラハムによる「ブールの挑戦問題」の解は以下だという。

$$P(E)=p(E \text{ intersection } A_1 \text{ intersection } E \text{ intersection } A_2)$$

$$=p(E \text{ intersection } A_1)+p(E \text{ intersection} A_2)-p(E \text{ intersection } A_1 \text{ intersection } A_2)$$

$$=c_1 p_1+c_2 p_2-p(E \text{ intersection } A_1 \text{ intersection } A_2)$$ (Brady(2004), pp.163-164)

ここでいう intersection とは，集合論における共通部分をあらわす。ブレディは，事象 E と A_1 と A_2 の共通部分について情報がない状態なので，ウィルブラハムの解は定められないと指摘した。

ここでウィルブラハムのいう "$P(E \text{ intersection } A_1 \text{ intersection } A_2)$" とは，ケインズの記法では，先述した

"$ea_1 a_2/h=y$，$y=a_1 a_2/eh.\ e/h=uz$　したがって　$u=(c_1 p_1+c_2 p_2)-y$"

にあたる，との立場をとった。この変形は，今一度ウィルブラハムの記法に直すと，

$P(E)=c_1 p_1+c_2 p_2-p(E \text{ intersection } A_1 \text{ intersection } A_2)$ にあたるという。すなわち，ウィルブラハムの解が定められない以上，ケインズの解も，解を定めることができないこととなる。

ブレディは，ケインズのいうところの「乗法定理」，すなわちより一般には以下で表される「結合確率 (the joint probability)」に，ブールの諸問題が違反したことは全くないと主張する。

$$P(A \text{ and } B)=P(A)\cdot P(B)$$

or

$$P(A \text{ and } B \text{ and } C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

(Brady(2004), p.165)

ブレディは，ケインズが「『思考の法則』の第20章における問題Ⅰ～Ⅵの解はすべて間違っている」[8] と指摘

する代わりに，ブールやウィルブラハムその他一連の論文は疑わしく，曖昧で，不明瞭であると述べるべきであった，と批判した。以上を踏まえ考察する。

4．考察

まず，ブレディの指摘する，「ブールの挑戦問題」に関する解は，解を定めることができない，とする理由を考えてみたい。ウィルブラハムの定義を，ごく基本的な集合論で図示すると以下のようになる。

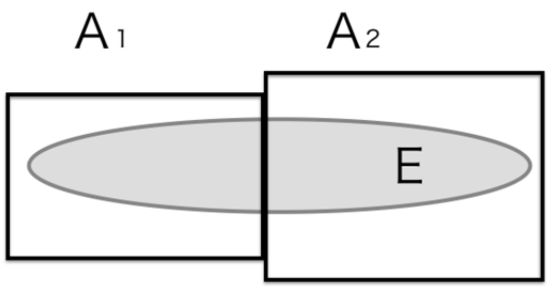

図３　A_1 と A_2 がかぶらない場合[9]

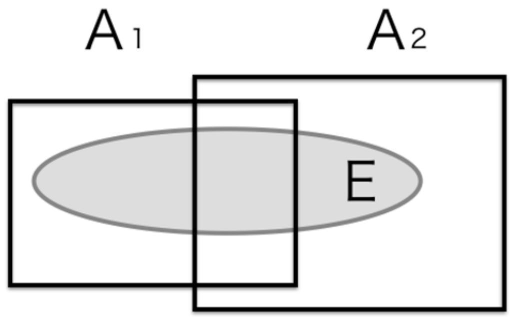

図４　A_1 と A_2 がかぶる場合

共通部分の有無にかんする情報が与えられていない状況では，図３なのか図４なのかが判然としない。ウィルブラハムの指摘は，集合論的解釈をすれば，図３なのか図４なのかが明解でなければ議論をすすめることができない，といえる。

確かに，この解釈の仕方であれば，一意に解を決めることができないため，解が正しいか，誤っているかを議論すること自体があまり意味のないことのように思われる。ただ，ケインズの「確率」は「確率関係」であり，図１で示したように，前件命題と後件命題の間の「関係性」すなわち写像で捉える必要があるといえる。

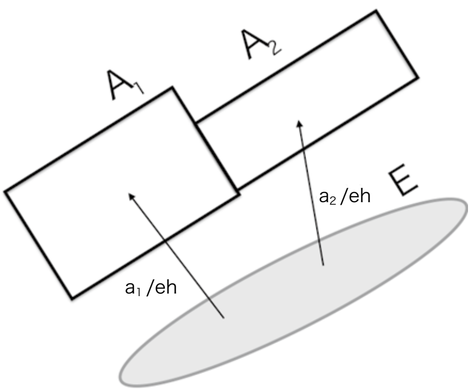

図５　A_1 および A_2 と E が，同一平面上にない場合

図５のような世界を仮構するなら，A_1，A_2 と E はそもそも共通部分をもたなくなる。そうすると，ウィルブラハムの解が一意に定まらないからといって，必ずしもケインズの体系においても誤りとは言い切れないのではないか。

　また，2.2で触れたように，ケインズの「乗法定理」(論理式(36))には，その定義において「独立」であることが前提条件となっている。ケインズが「乗法定理」の適用に慎重な態度をとるのは，推論や命題の独立性を示すことが非常に難しいと考えているためと思われる。したがって y および z の独立性を前提とするブールの解は誤っているという評価を下した。

　以上の考察は，ブールの「独立」とケインズの「独立」の定義が異なっている上，ウィルブラハムやケイリーが，確率の独立概念をどのように捉えていたか，がはっきりしない点に由来するものである。このことは，ケ

インズ「確率」の，いわゆる適用不確実性の論点につながる。ケインズは，「ベルヌイの定理」が適用できない多くの場合において，歴史的に「ベルヌイの定理」が誤って適用されてきたことを指摘する。「ブールの挑戦問題」における「独立」概念の適用についても同様で，定理が正しく利用できない，適用不確実性下で，いかにしてひとが決定を行うのか，といった議論は『確率論』にとどまらず，ケインズ『一般理論』にも通底する，ケインズの生涯の主題のひとつとさえいえよう。

今回は「ブールの挑戦問題」の内部の計算については具体的に踏み込まなかった。「ブールの挑戦問題」を，線形計画法を用いて解いた研究や，初期値を具体的に定めて数値を求めた研究も多いため，今後それらの研究成果を取り入れつつ，それぞれの「独立」概念を整理していくことで，より精緻な比較が可能となるだろう。

注

1　Keynes(1921),p.42, 邦訳 p.45.

2　Keynes(1921),p.145, 邦訳 p.153.

3　原則的としてケインズの論理式はすべて記号で表されるが，論理式 (33)，論理式 (56) および関連した (56.1) ～ (56.3)，論理式 (57) などいくつかの論理式は，例外的に「ことば」で表現されている。このことは，ケインズが純粋な形式操作だけではなく，日常言語で表現することを重視していたことの傍証になろう。

4　つまり，この時点でケインズも，ケイリーらの「ブールの挑戦問題」の議論に参加したことを意味する。なお、この解はある値の間に位置しており、現代の区間推定に通じるものがある。

5　Keynes(1921),p.206. 邦訳 p.215.

6　なおケインズは一方で，そもそもブールの「独立」の定義自体に問題があったとの指摘も行っている。独立の第一の定義は，二つの事象の一方が生起する確率が，他方が生起するあるいは生起しないことへの予想によって影響を受けないこと，としているが，他方で独立の第二の定義として，実際に事象同士の間に不変の関係があることをわれわれが確実に知らない限り，それらの事象は独立である，とも述べており，この二つの定義の仕方では矛盾が生じるとも指摘した。詳細は Keynes（1921，p.185，邦訳 p.192）を参照。

7　Brady(2004),p.163.

8　Keynes(1921),p.206. 邦訳 p.215. の注釈 2) による。

9　図３～図５まで執筆者作成。なお集合は通常円で表すが､円状に表すことで事象Ｅとの重複関係が見えにくくなるため、二つの原因の集合は長方形とした。

参考文献

Brady, M.E.(2004)　*J.M.Keynes' Theory of Decision Making, Induction, and Analogy The Role of Interval Valued Probability in His Approach,* Xlibris.

Boole, G.(1854)*An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, Dorer Publications.

Keynes, J.M.(1921)*A Treatise on Probability*, Macmillan.　佐藤隆三訳『確率論』(東洋経済新報社 2010).

Keynes, J.M.(1936)*The General Theory*, Macmillan.　塩谷祐一訳『雇用・利子および貨幣の一般理論』(東洋経済新報社 1983).

Miller, D.W.(2012)*The Last Challenge Problem:George Boole's Theory of Probability*. San Bernardino, CA.