量子意思決定論について

全卓樹
高知工科大学環境理工学群

On Quantum Decision Theory

Taksu Cheon
Laboratory of Physics, Kochi University of Technology

平成２２年５月（平成２５年１月追記あり）

はじめに

人間の意思決定における背理的事象を「量子的」な確率を用いて記述しようとする試みが注目を集めている [1, 2, 3]。その代表例である「確実事象原則の破れの量子論」について、われわれの研究を中心に簡潔にまとめてみる。

心理学における確実事象原則の破れとは、２０年ほど前に Tversky たち [4] によって発見されたもので、二つの与件 (c0)、(c1) それぞれのもとで、人間に二つの決定 (d0)、(d1) が可能な状況に関する、次のような現象である。すなわちもし与件 (c0) のもと (c1) のもとの両方にあって、決定 (d1) が選択される確度が高いとすれば、与件が (c0) であるか (c1) であるか不明な場合も、「合理的」な判断では当然決定 (d1) が選択される確度が高いと期待されるが、ある種の状況では人間はそうでない選択をすることが実験的に示されるのである。

簡単な仮想例をあげると、(c0) 天気が悪い場合と (c1) 天気がよい場合で、登山クラブのメンバーが登山を決行 (d1) する確率が、それぞれ６割、８割とする。天気がよいか悪いか不明で半々の場合、単純に考えると登山決行 (d1) の確率は中間の７割になりそうであるが、実際にアンケートで調べると４割になる、といった具合である。

この例でわかるのは、不確定な事象に対する人間の反応は、必ずしも加重平均という単純な意味の「合理的」判断によってはいない事であり、意思決定には安全を重視した「防御的」なバイアスがかかるような何らかのメカニズムが働いていると考えられる。その起源については、それが進化的に優位だったのだろうという推測ができるのみであり、そのメカニズムの詳細については、神経回路の解剖学的実験と理論的モデルの両面の研究の進展待つしか無いだろう。おそらく現状で望み得るのは、確実事象原則の破れを記述する有効な現象論を確立し、それを性格分類や行動予測といった応用に供する事であろう。そのような要請に応えうるかもしれない一つの試みが、まさに以下に素描する量子意思決定論である。

相加平均、相乗平均、量子平均

選択肢二つの与件それぞれに対して、被験者が選択肢二つから決定を下せる心理学実験を想定する。与件 (c0) が与えられたとき被験者が決定 (d0)、(d1) を行う確率をそれぞれ $p(d0;c0)$、$p(d1;c0)$ と書いてみる。さらに与件 (c1) のもとで決定 (d0)、(d1) を行う確率をそれぞれ $p(d0;c1)$、$p(d1;c1)$ と書こう。これらの確率は当然 $p(d0;c0)+p(d1;c0) = 1$、$p(d0;c1)+p(d1;c1) = 1$ という関係を満たす。いま与件 (c0)、(c1) の生起する確率がそれぞれ P_{c0}、P_{c1} だとしよう。当然 $P_{c0}+P_{c1} = 1$ である。この状況で決定 (d0) がなされる確率 Q_{d0}、そして決定 (d1) がなされる確率 Q_{d1} は

$$\begin{aligned} Q_{d0} &= p(d0;c0)P_{c0} + p(d0;c1)P_{c1}, \\ Q_{d1} &= p(d1;c0)P_{c0} + p(d1;c1)P_{c1}, \end{aligned} \tag{1}$$

と考えるのが、事象の確率の線形性という合理的予測を表している。この両確率の和は当然ながら上の条件から $Q_{d0}+Q_{d1} = 1$ となっている。これをここでは「古典的」結果とも呼ぶ事にする。

この式の一つの帰結は不等式

$$\begin{aligned} \mathrm{Max}\,[p(d0;c0), p(d0;c1)] \geq Q_{d0} \geq \mathrm{Min}\,[p(d0;c0), p(d0;c1)]\,, \\ \mathrm{Max}\,[p(d1;c0), p(d1;c1)] \geq Q_{d1} \geq \mathrm{Min}\,[p(d1;c0), p(d1;c1)]\,, \end{aligned} \tag{2}$$

で、これが「確実事象原則」の式による表現になっている。

生物の刺激に対する反応は一般に、刺激の強度に線形に応答するのではなく、強度の log に対して線形の応答となる事が多い。与件に対する判断に於いても、危急の場合大脳皮質に達しないで判断が行われて、そのような log に対して線形の応答があると推測する事は可能である。この場合二つの与件への平均的な応答は、相加平均でなく相乗平均

$$\begin{aligned} &2\sqrt{p(d0;c0)P_{c0}\,p(d0;c1)P_{c1}}\,, \\ &2\sqrt{p(d1;c0)P_{c0}\,p(d1;c1)P_{c1}}\,, \end{aligned} \tag{3}$$

が関与すると考えることができる。実際の人間の判断はこのような「脊椎反応」(3) によって「大脳皮質の判断」(1) が補正されると推測してみよう。そうすると不定与件での決定 (c0)、(c1) の確率が二つの実数パラメータ α、β をもった式

$$\begin{aligned} Q_{d0} &= p(d0;c0)P_{c0} + p(d0;c1)P_{c1} + 2\sqrt{p(d0;c0)P_{c0}\,p(d0;c1)P_{c1}}\,\alpha, \\ Q_{d1} &= p(d1;c0)P_{c0} + p(d1;c1)P_{c1} + 2\sqrt{p(d1;c0)P_{c0}\,p(d1;c1)P_{c1}}\,\beta, \end{aligned} \tag{4}$$

で与えられると考えることができる。ここで相加平均と相乗平均の大小関係

$$\begin{aligned} p(d0;c0)P_{c0} + p(d0;c1)P_{c1} \geq 2\sqrt{p(d0;c0)P_{c0}\,p(d0;c1)P_{c1}}\,, \\ p(d1;c0)P_{c0} + p(d1;c1)P_{c1} \geq 2\sqrt{p(d1;c0)P_{c0}\,p(d1;c1)P_{c1}}\,, \end{aligned} \tag{5}$$

と当然の要請 $1 \geq Q_{d0} \geq 0$、$1 \geq Q_{d1} \geq 0$ からパラメータの範囲 $1 \geq \alpha \geq -1$、$1 \geq \beta \geq -1$ が定まる。そしてさらに基本的要請 $Q_{d0} + Q_{d1} = 1$ から二つのパラメータの間には

$$\sqrt{p(d0;c0)\,p(d0;c1)}\,\alpha = -\sqrt{p(d1;c0)\,p(d1;c1)}\,\beta, \tag{6}$$

という制限条件がかかることになり、α と β は独立ではなく (4) は使いやすい表式とならない。いまこれが一つのパラメータだけに陽に依存する形にかける特別な二つの状況を考えることができる。それは $p(d0;c0) = p(d0;c1)$、$p(d1;c0) = p(d1;c1)$ のとき、または $p(d0;c0) = p(d1;c1)$、$p(d1;c0) = p(d0;c1)$ ので、$\alpha = -\beta$ ととれば $Q_{d0} + Q_{d1} = 1$ がうまく満たされ、不定与件下での確率は

$$\begin{aligned} Q_{d0} &= p(d0;c0)P_{c0} + p(d0;c1)P_{c1} + 2\sqrt{p(d0;c0)P_{c0}\,p(d0;c1)P_{c1}}\cos\theta, \\ Q_{d1} &= p(d1;c0)P_{c0} + p(d1;c1)P_{c1} - 2\sqrt{p(d1;c0)P_{c0}\,p(d1;c1)P_{c1}}\cos\theta, \end{aligned} \tag{7}$$

と対称な形に書けるのである。この式では $\alpha = \cos\theta$ いう円環的パラメータ θ による表記替えをおこなっている。相加平均、相乗平均の両方が出てくるこの (7) 式は、様々な文脈で「量子的干渉」のある非線形な確率和としてよく出てくるものである。$\cos\theta = 0$ で第二項は消失するので、これが古典的な場合に対応している。第二項の存在のために、確実事象原則を表す不等式 (2) は一般には破られる。そのかわりに不等式

$$\begin{aligned} \sqrt{p(d0;c0)P_{c0} + p(d0;c1)P_{c1}} \geq Q_{d0} \geq \sqrt{|p(d0;c0)P_{c0} - p(d0;c1)P_{c1}|}, \\ \sqrt{p(d1;c0)P_{c0} + p(d1;c1)P_{c1}} \geq Q_{d1} \geq \sqrt{|p(d1;c0)P_{c0} - p(d1;c1)P_{c1}|}, \end{aligned} \tag{8}$$

が成り立つ事に注意しよう。式 (7) を用いて確実事象原則を破った心理学的実験を解析した例がいくつかあり、一定の現象論的成功を収めている。

一般の場合に適用できる量子平均

前説の (7) 式はわかりやすい形をしているが、辻褄を合わせるためには条件確率についての特別な仮定 $p(d0;c0) = p(d0;c1)$ または $p(d0;c0) = p(d1;c1)$ を必要とし、これはもちろん一般の条件に適用しようとすると必ず無理が生じる。そこで (4) に立ち帰って、この右辺は Q_{d0} と Q_{d1} の比を与えているのだと解釈し直してみる。すなわち規格化定数 N を導入して

$$\begin{aligned} Q_{d0} &= N\left(p(d0;c0)P_{c0} + p(d0;c1)P_{c1} + 2\sqrt{p(d0;c0)P_{c0}\,p(d0;c1)P_{c1}}\,\alpha\right), \\ Q_{d1} &= N\left(p(d1;c0)P_{c0} + p(d1;c1)P_{c1} + 2\sqrt{p(d1;c0)P_{c0}\,p(d1;c1)P_{c1}}\,\beta\right), \end{aligned} \tag{9}$$

としてみる。確率の基本要請 $1 \geq Q_{d0} \geq 0$、$1 \geq Q_{d1} \geq 0$、そして $Q_{d0} + Q_{d1} = 1$ をおくと、前の二つからは前節同様にパラメータの範囲 $1 \geq \alpha \geq -1$、$1 \geq \beta \geq -1$ が定まり、三つ目から N が定まる。二つの円環パラメータ $\theta_0 = \arccos\alpha$、$\theta_1 = \arccos\beta$ を導入すると結果は

$$\begin{aligned} Q_{d0} &= \frac{p(d0;c0)P_{c0} + p(d0;c1)P_{c1} + 2\sqrt{p(d0;c0)P_{c0}\,p(d0;c1)P_{c1}}\cos\theta_0}{1 + 2\sqrt{p(d0;c0)P_{c0}\,p(d0;c1)P_{c1}}\cos\theta_0 + 2\sqrt{p(d1;c0)P_{c0}\,p(d1;c1)P_{c1}}\cos\theta_1}, \\ Q_{d1} &= \frac{p(d1;c0)P_{c0} + p(d1;c1)P_{c1} + 2\sqrt{p(d1;c0)P_{c0}\,p(d1;c1)P_{c1}}\cos\theta_1}{1 + 2\sqrt{p(d0;c0)P_{c0}\,p(d0;c1)P_{c1}}\cos\theta_0 + 2\sqrt{p(d1;c0)P_{c0}\,p(d1;c1)P_{c1}}\cos\theta_1}, \end{aligned} \tag{10}$$

となる。これの特殊な場合、すなわち $\sqrt{p(d0;c0)p(d0;c1)}\cos\theta_0 = -\sqrt{p(d1;c0)p(d1;c1)}\cos\theta_1$ が成立する場合に、(10) が (7) に帰着する事は一見してわかる。不定与件の下での決定の確率が相加平均と相乗平均の線形結合で与えられるとすると、必然的に二つの円環パラメータが必要であるという（結果を見れば当然な）結論になる。

一般の場合にも辻褄の合った結果を与える公式 (10) は、まだ例の数が少なく限定的ながら、実験結果の解析によって、その現象論的な有効性が確かめられている [3]。

この「一般化された量子平均」の式から、(8) の代わりにさらに緩い不等式

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left(\sqrt{p(d0;c0)P_{c0}}+\sqrt{p(d0;c1)P_{c1}}\right)^2}{1-\sqrt{p(d0;c0)P_{c0}p(d0;c1)P_{c1}}-\sqrt{p(d1;c0)P_{c0}p(d1;c1)P_{c1}}} \geq Q_{d0} \\
&\qquad\geq \frac{\left(\sqrt{p(d0;c0)P_{c0}}-\sqrt{p(d0;c1)P_{c1}}\right)^2}{1+\sqrt{p(d0;c0)P_{c0}p(d0;c1)P_{c1}}+\sqrt{p(d1;c0)P_{c0}p(d1;c1)P_{c1}}}\,, \\
&\frac{\left(\sqrt{p(d1;c0)P_{c0}}+\sqrt{p(d1;c1)P_{c1}}\right)^2}{1-\sqrt{p(d0;c0)P_{c0}p(d0;c1)P_{c1}}-\sqrt{p(d1;c0)P_{c0}p(d1;c1)P_{c1}}} \geq Q_{d1} \\
&\qquad\geq \frac{\left(\sqrt{p(d1;c0)P_{c0}}-\sqrt{p(d1;c1)P_{c1}}\right)^2}{1+\sqrt{p(d0;c0)P_{c0}p(d0;c1)P_{c1}}+\sqrt{p(d1;c0)P_{c0}p(d1;c1)P_{c1}}}\,,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

が得られる。

量子平均の導出

ここまでの議論をみると、与件が不定な場合の被験者の決定を表す確率 (10) を a) 相加平均と相乗平均の線形和である、b) 確率論として辻褄が合ってる、という条件だけをたよりに推測によって導いただけのようにも見える。背後に神経回路のモデルがある訳ではない現状は、結局のところそういう段階だと言わざるを得ない。しかしこれを、このように完全にアド・ホックにではなく、通常の確率論とは異なったヒルベルト・ベクトルによる確率記述で与えられる、という単一の仮定だけから導く事も可能である。式 (10)、そしてその特殊な限定版である式 (7) を「量子的」な表式と呼んだ理由も、それによって初めて明らかになる。

「なぜ意思決定の考察に量子論か？」という読者の疑問は当然で、有効な現象論的関係式 (10) が最初にそのように導かれたという経緯 [3] だけでは、もちろん答えになっていない。しかし量子論的確率は、古典的確率論を拡張する数学のなかで、いまのところ有効性がはっきり知られた唯一のものである。それは選択肢二つの二段階意思決定というここで扱われた問題を、選択肢数や段階数を一般の場合に拡張するための健全な出発点を与える。さらにこのように作り上げられた枠組みは意思決定の心理学以外にも適用対象を見つけるかもしれない。そして最後に贅言を弄すれば、人間の思考過程に決して量子論が関与して無いとする確たる証拠の無い現状では、そのような魅力的な可能性を最初から排除する必要は無いであろう。

二段階意思決定過程は、ゲーム理論において相手プレーヤーが手の内を明かした後に戦略を決めたものと看做す事も可能である。それゆえ我々のここでの扱いはゲーム理論を量子論的な枠組みで考えようとする試み [5, 6] とも関連する。

今被験者の決定の選択肢を次元２のヒルベルト空間のベクトルの二つの基底 $|0\rangle$ と $|1\rangle$ で表してみる。さらに決定に先立つ与件も、これとは別の次元２のヒルベルト空間のベクトルの二つの基底 $|0)$ と $|1)$ で表されると考えてみよう。与件が与えられる前の被験者の状態は次元２ x ２の直積ヒルベルト空間のベクトルでつぎのように表される。

$$||\Psi)\rangle = |0)\,|\psi^{(0)}\rangle + |1)\,|\psi^{(1)}\rangle\,, \tag{12}$$

ここで決定を表すベクトルは

$$\begin{aligned} |\psi^{(0)}\rangle &= \psi_0^{(0)}\,|0\rangle + \psi_1^{(0)}\,|1\rangle\,, \\ |\psi^{(1)}\rangle &= \psi_0^{(1)}\,|0\rangle + \psi_1^{(1)}\,|1\rangle\,, \end{aligned} \tag{13}$$

であって、このなかの４つの量 $\psi_j^{(k)}$ 、($k = 0, 1$ および $j = 0, 1$) は複素数であって、与件 (ck) のもとでの決定 (dj) が行われる確率は $p(dj; ck) = |\psi_j^{(k)}|^2$ で与えられる。それゆえ当然 $k = 0, 1$ について $\psi_0^{(k)*}\psi_0^{(k)} + \psi_1^{(k)*}\psi_1^{(k)} = 1$ が要求される。

与件が (c0)、(c1) のどちらかに確定しない中間的確率的事象を

$$|K) = \kappa^{(0)}\,|0) + \kappa^{(1)}\,|1)\,, \tag{14}$$

で表してみる。ここで $\kappa^{(k)}$ は条件 $\kappa^{(0)*}\kappa^{(0)} + \kappa^{(1)*}\kappa^{(1)} = 1$ を満たす複素数で、この絶対値の二乗が与件 (ck) が起きる確率 $P_{ck} = |\kappa^{(k)}|^2 = (k|K)\,(K|k)$ だと考えるのである。中間的な与件 $|K)$ が与えられたという事態を、仮想的な観測者による観測行為の結果、任意の与件状態 $|\phi)$ が状態 $|K)$ に変化したものだと想定してみる。この過程は非ユニタリー射影演算子

$$\mathcal{K}_\phi = \frac{1}{\sqrt{(\phi|K)(K|\phi)}}\,|K)(K|\,, \tag{15}$$

による射影操作 $|\phi) \to \mathcal{K}_\phi\,|\phi)$ で記述される。与件と決定の直積空間の状態 $||\Psi)\rangle$ に対しては、これを直積空間への射影に拡張したもの

$$\mathcal{K} = \frac{1}{\sqrt{\langle(\Psi||\,K)(K||\Psi)\rangle}}\,|K)(K|\,, \tag{16}$$

を考える。この $\mathcal{K}$ は与件の状態の部分的観測に相当し、状態を $||\Psi)\rangle \to ||\Psi')\rangle = \mathcal{K}\,||\Psi)\rangle$ と変化させる。すなわち

$$\big||\Psi')\big\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle(\Psi||\,K)(K||\Psi)\rangle}}\,|K)(K||\Psi)\rangle\,, \tag{17}$$

であり、ここに登場する部分的行列要素 $(K\|\Psi)\rangle$ は

$$\begin{aligned}(K\|\Psi)\rangle &= \langle 0|(K\|\Psi)\rangle\,|0\rangle + \langle 1|(K\|\Psi)\rangle\,|1\rangle \\ &= (\kappa^{(0)*}\psi_0^{(0)} + \kappa^{(1)*}\psi_0^{(1)})\,|0\rangle + (\kappa^{(0)*}\psi_1^{(0)} + \kappa^{(1)*}\psi_1^{(1)})\,|1\rangle\,, \end{aligned} \tag{18}$$

で与えられる。この $||\Psi')\rangle$ の中に含まれる $|K)|j\rangle$ の前の係数の絶対値の二乗が、中間与件 $|K)$ の下での被験者の決定 (dj) の確率 Q_{dj} を表している。つまり

$$Q_{dj} = \left|\langle j|\,(K\,\big|\big|\Psi')\rangle\right|^2 = \frac{|\langle j|\,(K\|\Psi)\rangle|^2}{|\langle 0|\,(K\|\Psi)\rangle|^2 + |\langle 1|\,(K\|\Psi)\rangle|^2}, \tag{19}$$

となり、これを書き換えると

$$Q_{dj} = \frac{p(dj;c0)P_{c0} + p(dj;c1)P_{c1} + 2\sqrt{p(dj;c0)P_{c0}\,p(dj;c1)P_{c1}}\cos\theta_j}{1 + 2\sqrt{p(d0;c0)P_{c0}\,p(d0;c1)P_{c1}}\cos\theta_0 + 2\sqrt{p(d1;c0)P_{c0}\,p(d1;c1)P_{c1}}\cos\theta_1}, \tag{20}$$

となって、前節の (10) が導かれるのである。ここで θ_j $(j = 0, 1)$ は

$$\kappa^{(0)}\kappa^{(1)*}\psi_j^{(0)*}\psi_j^{(1)} = e^{i\theta_j}\sqrt{p(dj;c0)P_{c0}\,p(dj;c1)P_{c1}}\,, \tag{21}$$

によって定義される。前節で被験者の心理的特性を記述するものとして導入されたこの現象論的円環パラメータは、ここでの導出では量子位相に他ならないことが判明した訳である。そしてこれは $\cos\theta_j$ の入った「相乗平均」の項が量子干渉項に他ならないことを意味するのである。

考察

我々の中間事象の射影演算子 (16) による取り扱いは、量子観測理論の言語では Lüders 射影公準 [7] を採用した事に相当する。もし同一の初期直積状態 $||\Psi)\rangle$ のアンサンブルを考え、それに対して同一の中間的与件状態 $|K)$ による測定を繰り返し行う、という操作を想定すれば、Lüders 射影公準は純粋状態 $\rho = |K)(K|$ を用いた通常の von Neumann 射影公準 [8] に帰着する。仮にこの純粋状態を、同一の $\kappa^{(0)}$ と $\kappa^{(1)}$ をもつが位相がランダムな多くのベクトルからなる混合状態で置き換えるとすれば、(20) 中の干渉項は打ち消し合ってしまうであろう [9]。その場合は von Neumann 射影公準は古典的確率公式 (1) に移行するのである。

追記 (H25.1)

本稿で「確定事象原則」として紹介した「Sure-thing Principle」の訳語は、実験心理学で「当然原理」としてある程度定着しているという指摘を共同研究者の高橋泰城博士より受けたので、その後はこの語を用いることにしている。

またその後の研究で、式 (10) はその「当然原理の破れ」とならんで心理学者を悩ませた「連言錯誤」の解析にも有効である事が確認された 。連言錯誤とは、対象に体する二つの言明 A と B についての真偽を問うた場合、被験者の解答において「A でありかつ B である」とする確率が「B である」と認定される確率より高く出る場合があるという心理的錯誤現象である。 すなわち「合理的予測」を表す式 (1) から直ちに導かれる古典的不等式

$$Q_{d1} \geqslant p(d1; c1)P_{c1}, \tag{22}$$

が破られる事象の存在がトヴェルスキとカーネマンによって実験的に示されている [10] のである。その後の詳しい半定量的研究は、文献 [11] にある２０ほどのデータ（その代表が「リンダは銀行員であるか／リンダはフェミニストの銀行員であるか」への答え）に結実した。我々の論文 [12] では、式 (10) に２つの位相パラメータ $\cos\theta_0 = 0.391$、$\cos\theta_1 = -0.812$ を用いて、このデータの系統的記述可能なことが示された（Figure 1 参照：図中の q_1、$p_{11}q_1$、Q_1 は上の式 (22) の P_{c1}、$(d1; c1)P_{c1}$、Q_{d1} に対応する）。「量子的平均」の式 (10) が、少なくとも現象論的には有効である事が確認されたと言って良いであろう。

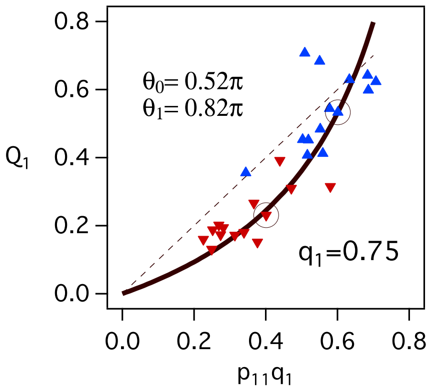

Figure 1: This solid line depicts theoretical prediction of Q_1 versus $p_{11}q_1$ with the assumption $q_1 = 0.75$ and the quantum phase parameters $\theta_0 = 0.52\pi$, $\theta_0 = 0.82\pi$. Experimental data, taken from [11], are shown with upward triangle for ”(i)” series and downward triangle for ”(c)” series. The dashed line is the limiting line $Q_1 = p_{11}q_1$, below which no points should appear if the classical conditional probability theory is applicable. Encircled data are the ones used to determined the phase parameter as shown in Figure.1.

References

[1] E. M. Pothos and J. R. Busemeyer, *A quantum probability explanation for violations of 'rational' decision theory*, Proc. Roy. Soc. B **276** (2009) 2171.

[2] A. Yu. Khrennikov and E. Haven, *Quantum mechanics and violations of the sure-thing principle: The use of probability interference and other concepts*, J. Math. Psychol. **53** (2009) 378.

[3] T. Cheon and T. Takahashi, *Interference and inequality in quantum decision theory*, Phys. Lett. **A375** (2010) 100.

[4] A. Tversky and E. Shafir, *The disjunction effect in choice under uncertainty*, Psychol. Sci. **3** (1992) 30509.

[5] T. Cheon and I. Tsutsui, *Classical and quantum contents of solvable game theory on Hilbert space*, Phys. Lett. **A348** (2006) 147.

[6] T. Cheon and A. Iqbal, *Bayesian Nash equilibria and Bell inequalities*, Phys. Soc. Jpn. **77** (2008) 024801.

[7] G. Lüders, *Über die Zustandsänderung durch den Messprozess*, Ann. Phys. (Leipzig) **8** (1951), 322.

[8] J. von Neumann, "Mathematical foundations of quantum mechanics", (Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1955).

[9] N. Gisin, *Quantum measurements and stochastic process*, Phys. Rev. Lett. **52** (1984), 1657.

[10] A. Tversky and D. Kahneman, *Extension versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment*, Psychol. Rev. **90** (1983), 293.

[11] E. Shafir, E. E. Smith, and D. N. Osherson: *Typicality and reasoning fallacies*, Mem. Cogn. **18** (1990) 229.

[12] T. Cheon and T. Takahashi, *Quantum phenomenology of conjunction fallacy*, J. Phys. Soc. Jpn. **81** (2012), 10480.