

新奇的な量子ホロノミー


— 断熱サイクルで変わらないこと，変わること —


田中篤司 (首都大理工 <http://researchmap.jp/tanaka-atushi/>)

全卓樹 (高知工科大 <http://researchmap.jp/TZen/>)

物理系の量子状態を自在に操れるならば、多くの物理学者の願望が満たされるだけでなく、量子情報処理のような学際的な研究でも大いにインパクトがあるはずだ。しかし、量子状態は攪乱に弱いので正確な制御は容易ではない。ここでは、系に印加する外場を利用した断熱的な制御に着目したい。例えば、静止したスピンの平行な(古典)磁場を印加したあとで、磁場の向きを十分ゆっくり動かすと、これにスピンの向きが追従する。量子状態の断熱的な制御は概念的に簡明であると同時に頑健でもあると考えられている。

このスピンに断熱サイクルを施す。つまり、磁場を閉じた経路に沿って十分ゆっくりと一周させる。サイクルの最初と最後を較べてスピンは変化するだろうか? 多くの場合スピンの期待値は元に戻るが、ベリーは波動関数に幾何学的な位相因子が現れることを指摘した。これは、微分幾何学的な解釈から量子ホロノミーとも呼ばれ、量子物理学の要所、例えば量子ホール効果の久保公式などに顔を出すことが知られている。

—————  —————
 いつでも断熱サイクルは量子系の期待値を元に戻すだろうか?

—————  —————
 多くの文献での想定とは異なり、この答は「否」だ。断熱サイクルの結果として期待値が元に戻らないことは、その背後にある量子系の定常状態が変化したことを含意する。つまり、そのようなサイクルは断熱的に系を励起させたり、あるいは逆にエネ

ルギーの低い状態へと導く。もしくは、等価なことではあるが、複数の定常状態を断熱サイクルが交換させたと考えても良い。この現象は、量子ホロノミーとの類似から「新奇的な量子ホロノミー」(exotic quantum holonomy)と呼ばれる。この現象はスピン特有のものでは無く、離散的なエネルギー固有値を持つより一般の物理系でも起き得る。

新奇的な量子ホロノミーは一見すると意外で奇妙だが、とりたてて自然法則と矛盾するものでも無い。むしろ、大半の基本的な例が前世紀には気づかれなかったことが奇妙なことのようにも感じられる。最初の報告例は一般化点状ポテンシャル下の質点である。その後、フロケ系(周期外場を受ける系)、量子回路、量子グラフ等でさまざまな例が見いだされてきた。近年では Lieb-Liniger 模型(一次元ボーズ粒子系)のような多体系での例も報告された。ただし、これらの例を実験で直接的に検証した報告はまだ無い。応用としては断熱量子計算の加速が論じられた。

具体例の探索と平行して、数理的な背景も明らかにされてきた。そこでは、サイモンや藤川が導入した幾何学的位相の理論的枠組みが引き継がれた。ここから、非エルミート系の量子論との繋りも見いだされた。さらに、アハロフ-アナンダン流の非断熱幾何学位相の、新奇的な量子ホロノミーにおける対応物も発見された。

これらの結果から新奇的な量子ホロノミーは、量子動力学に内在する位相幾何学(トポロジー)的な側面の一つだとみなせる。

—Keywords—

断熱定理:

閉じた量子系を定常的な束縛状態に準備した後で、系のパラメーターを、その変化率 v を十分小さくして動かす場合、系の状態が時々刻々の定常状態に滞在し続けること。なお、非断熱遷移の大きさは、ランダウ=ツェナー公式等から v について指数関数的に小さいため、ここから実効的に断熱的な時間発展を実現するための v を見積れる。

(通常の) 量子ホロノミー:

閉じた経路に沿った断熱的な時間発展(断熱サイクル)の結果、量子状態が位相を除いて元に戻る場合がしばしばある。このときの位相変化(擬)固有エネルギーに由来する動力学的な寄与に加え、幾何学的位相(あるいはベリー位相)と呼ばれる寄与をつ。幾何学的位相は微分幾何学のホロノミーと結びつくので、このような現象は量子ホロノミーと呼ばれる。

新奇的な量子ホロノミー:

断熱サイクルによって、(擬)固有エネルギーや固有空間が変化すること。これらは、通常の量子ホロノミーとは解釈できない。

フロケ系:

時間について周期的な外力を受ける系のこと。その周期についての時間発展作用素をフロケ作用素と呼ぶ。

1. はじめに

物理系が持つパラメーターの値を制御することで、系の状態を変化させることができる。例えば、原子や分子に外場として電磁場を印加したり、容器に封入した気体の体積を（壁を動かすことで）増減させるといったことだ。近年では、希薄原子気体中での原子間の有効相互作用を制御することもできるようになった。

本稿では、量子系の持つパラメーターを十分ゆっくりと変化させる場合の量子状態の変化を論じたい。ただし、系は外界と熱的な接触を持たず、その時間発展がユニタリーな場合のみを考える。また、始状態として系の離散的な固有エネルギーに対応する定常状態を選ぶ。この場合の時間発展は断熱定理^{1,2)}に従う¹。すなわち、時々刻々のパラメーターの値に対応する系の定常状態と、量子状態とが位相因子を除いて一致する。つまり、量子系の断熱的な時間発展を求めるには、定常状態のパラメーター依存性を理解すれば良い²。

加えて、ここでは、パラメーターを動かす経路が閉じているとする。つまり、断熱サイクルを調べる。断熱サイクルは、一見、量子系の状態を全く変化させないように見えるかもしれない。しかし、その反例としてベリー位相が良く知られている^{4, 5, 6)}。これは、断熱サイクルの結果として波動関数に「幾何学的な位相因子」が現われることだ。サイモンによる微分幾何学を通じた解釈⁷⁾により、この現象は量子ホロノミーとも呼ばれる。

本稿では、物理量の期待値が断熱サイクルによって変化する現象を主題とする（図 1(a)）。これは断熱サイクルの結果、量子状態が別の直交した方向に変わることにはならない。このときサイクルに沿って固有エネルギーの変化を追跡すると、固有エネルギーは最初のものとは別のものに繋がる（図 2(a)）。つまり、断熱サイクルは複数の固有エネルギーや定常状態を置換する。このため定常状態や固有エネルギーはパラメーターについての多価性を帯びる。この現象を量子ホロノミーにならって「新奇な量子ホロノミー」と呼ぶ³。

混乱を避けるため、本稿での考察と熱力学との関係を確認する。ここでの主題は断熱サイクルによる量子系のメカニカルな変化である。用語としても近いため、一見、これは熱力学的な断熱準静サイクルと似ているように思えるかもしれないが、良く知られているように、断熱準静サイクルは系に一切変化をもたらさない点で、全く異なる。

このように、新奇な量子ホロノミーが禁止される物理的な理由は特に無い。一方で、その具体例は、著者らの知る

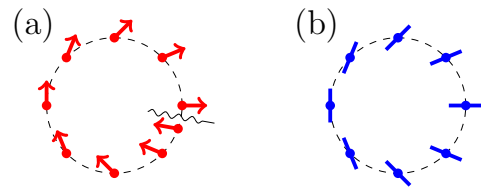


図1 物理量の期待値に現れる新奇な量子ホロノミーの概念図。フロケ系のスピン-1/2 (§ 2) の定常状態の断熱変化を描いた。(a) 断熱サイクル C (破線) の各点上でのブロッホベクトル \mathbf{a} (スピンの期待値, 矢印で示す)。 C に沿って \mathbf{a} を追跡すると、多価性による“カット”(波線) を越えてしまうので、一周すると \mathbf{a} が反転する。(b) \mathbf{a} から向きを捨象した配向子⁸⁾ (太線) は C 上で一価。ここから、新奇な量子ホロノミーと配向子の回位 (ディスクリネーション) との対応が示唆される (§ 5 を参照)⁹⁾。

限りでは、文献¹⁰⁾以降に報告された近年のものに限られる。

新奇な量子ホロノミーが起きる場合、エネルギー準位のパラメーター依存は二種類に分けることができる。ひとつは、準位のシフトだ（図 2(a)）。ただし、ある準位でのシフトは両隣の準位に伝播し、固有エネルギーが $\pm\infty$ に発散する原因になる^{10, 11)}。フロケ系（周期外力系）では、固有エネルギーの代わりに擬固有エネルギーを導入するため発散の問題は無くなる（図 2(b)）。もう一つは、準位交差だ（図 2(c)）。ただし、一般の摂動に対し準位交差は脆弱なので、実際にこれを利用するには何らかの手立てが必要である。

本稿では最近見いだされた新奇な量子ホロノミーの具体例をいくつか紹介する。§ 2 ではフロケ系の準位シフトを利用した、新奇な量子ホロノミーの最も簡潔な例を挙げる。§ 3 では多体ハミルトン系での準位シフトの例を、一次元ボーズ粒子系を記述する Lieb-Liniger 模型¹²⁾ で示す。この可解模型に特有の保存量の役割も紹介したい。§ 4 では準位交差を伴う断熱サイクルの例を説明する。新奇な量子ホロノミーについての理論的な進展を § 5 でごく簡単に触れる。最後に § 6 でまとめを述べる。

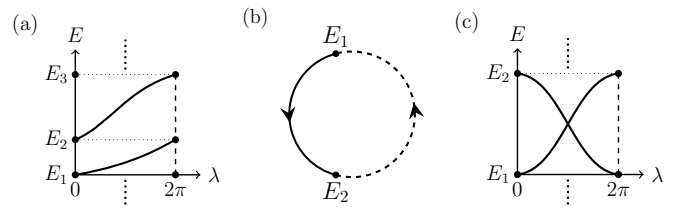


図2 新奇な量子ホロノミーが起きる場合の(擬)固有エネルギー E_j の軌跡。ここで、ハミルトニアンやフロケ演算子は断熱パラメーター λ について周期 2π を持つとして、 λ を 0 から 2π まで動かしたときの $E_j(\lambda)$ を描いた。(a) 準位 E_j が E_{j+1} へシフトする場合；(b) フロケ系での擬固有エネルギーの巻き付き（図 3 も参照）；(c) 二つの準位が厳密に交差する場合。

¹断熱過程の起点や終点で準位交差しないとする。
²時間発展が非ユニタリーの場合はこの限りでは無い。これは“定常状態”が寿命を持ち不安定なため³⁾。
³文献によっては固有空間や固有値のアンホロノミーと呼ばれる。

2. フロケ系での擬固有エネルギーの巻き付き

新奇な量子ホロノミーの最も単純な例は周期外力系で得られる。解析の便宜のため、量子カオスの研究で良く調べられている周期撃力系を観察しよう：

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \lambda \hat{V} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (1)$$

ここで \hat{H}_0 は被摂動ハミルトニアン、 $\lambda \hat{V}$ が撃力ハミルトニアン。撃力の強度 λ を断熱パラメータとする。この系のフロケ演算子、つまり、周期 T についてのユニタリな時間発展演算子として

$$\hat{U}(\lambda) = e^{-i\hat{H}_0 T/\hbar} e^{-i\lambda \hat{V}/\hbar} \quad (2)$$

を導入する。このようなユニタリ演算子で離散的に時間発展する系は、量子写像¹³⁾とも呼ばれる

この系の定常状態はフロケ演算子 $\hat{U}(\lambda)$ の固有ベクトルで記述される⁴⁾。対応する固有値は $e^{-iE T/\hbar}$ と表すことができる。ここで E は擬固有エネルギーと呼ばれ、定常状態でのエネルギーの一周期平均に相当する。擬固有エネルギー $E_j(\lambda)$ は $2\pi\hbar/T$ の不定性を持つが、話をはつきりさせるため、 $\lambda = 0$ で $0 \leq E_1(0) \leq E_2(0) \leq \dots \leq E_N(0) < 2\pi\hbar/T$ となるように並べておく。ここで N は系の準位数。

新奇な量子ホロノミーの例を論じるため、撃力ハミルトニアンが $\lambda \hat{V} = \lambda \hbar |v\rangle\langle v|$ の場合を考える。ここで $|v\rangle$ は規格化された状態ベクトル。このような模型の直観的な意味だが、例えばタイトバインディング模型でサイト $|v\rangle$ に局在した状態のエネルギーを撃力的に変化させることに相当する。 \hat{V} の定義からフロケ演算子 $\hat{U}(\lambda)$ (式 (2)) は、断熱パラメータ λ について 2π で周期的⁵⁾ だ。ゆえに、 λ を 0 から 2π へと増加させる過程は閉経路を成す。この断熱サイクルを C と記す。

フロケ演算子の λ についての周期性から、 $\lambda = 0$ での $\hat{U}(\lambda)$ のスペクトル (全ての固有値の集合) は、 C の終点 ($\lambda = 2\pi$) でのスペクトルと同じだ。では、それぞれの擬固有エネルギーは元に戻るのだろうか？ 実はそうなることは希だ。一般的な状況として、 $\hat{U}(0)$ が縮退した固有値を持たず、さらに、 $|v\rangle$ が $\hat{U}(0)$ の固有ベクトルでは無いとすると、

$$E_j(2\pi) = \begin{cases} E_{j+1}(0) & \text{for } 1 \leq j < N \\ E_1(0) + 2\pi\hbar/T & \text{for } j = N \end{cases} \quad (3)$$

が成立する。つまり、新奇な量子ホロノミーが起きる (図 3)。

以下、式 (3) について、より一般的な証明の概略を説明したい。この証明は擬固有エネルギーの巻き付き⁶⁾ が新奇な

⁴⁾ 周期外力系の定常状態はハミルトニアンの時間周期 T で振動する。

⁵⁾ $(|v\rangle\langle v|)^2 = |v\rangle\langle v|$ が成り立つため。

⁶⁾ 近年、擬固有エネルギーの巻き付きと、Thouless ポンプやトポロジカル絶縁体との関係が論じられている^{14, 15)}。

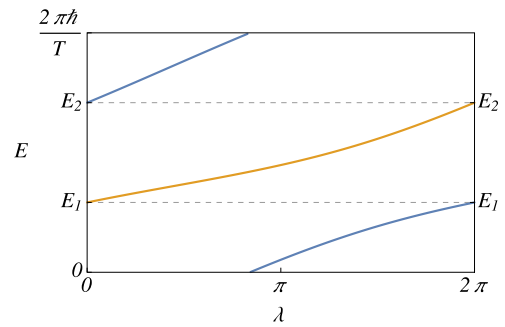


図 3 スピン-1/2 のフロケ系での新奇な量子ホロノミー。横軸はフロケ演算子 $\hat{U}(\lambda)$ (2) の断熱パラメータ λ で、 $\hat{U}(\lambda)$ の周期性から $\lambda = 0$ と $\lambda = 2\pi$ は同一視される。縦軸は擬固有エネルギーで、擬固有エネルギー空間の周期性から $E = 0$ と $E = 2\pi\hbar/T$ は同一視される。 $\lambda = 0$ での E_1 (E_2) から出発した準位は $\lambda = 2\pi$ で E_2 (E_1) に到達する意味で、擬固有エネルギーのアンホロノミーが起きる。ここで $\hat{H}_0 = \omega \hat{S}_{z_2}$ 、 $\hat{V} = |v\rangle\langle v|$ とした。また、 $\omega T = 7\pi/6$ 、 $|v\rangle = (|+\rangle + \sqrt{2}|-\rangle)/\sqrt{3}$ ($\hat{S}_{z_2}|\pm\rangle = \pm(\hbar/2)|\pm\rangle$)。

量子ホロノミーを導くとする描像を導くものだ。まず、断熱サイクルに沿って $E_j(0)$ を延長したときの、断熱サイクル一周に対する擬固有エネルギーの総和の変化は

$$\Delta_C \equiv \sum_{n=1}^N \int_0^{2\pi} \frac{\partial E_n(\lambda)}{\partial \lambda} d\lambda \quad (4)$$

だ。被積分関数の $\partial_\lambda E_n(\lambda)$ は一次摂動論に類似した関係 $\partial_\lambda E_n(\lambda) = \langle n(\lambda)|\hat{V}|n(\lambda)\rangle$ を満たす¹⁶⁾。ここで $|n(\lambda)\rangle$ は $E_n(\lambda)$ に対応するフロケ演算子の規格化された固有ベクトル。これらから跡公式¹⁷⁾

$$\Delta_C = \frac{2\pi}{T} \text{Tr}[\hat{V}] \quad (5)$$

を得る。ここでは $\text{Tr}[\hat{V}] = \hbar \text{Tr}[|v\rangle\langle v|] = \hbar$ なので、 $\Delta_C = 2\pi\hbar/T$ 。つまり、断熱サイクル C を一周する間に、擬固有エネルギーの総和は擬固有エネルギー空間を一周する。一方、この模型では、 C の途上で擬固有エネルギーは単調増大 ($\partial_\lambda E_n(\lambda) > 0$) し、しかも準位交差は起きない。これらから、擬固有エネルギーのシフト (式 (3))、即ち、新奇な量子ホロノミーが起きると結論される。

この証明からわかるように、 \hat{H}_0 や $|v\rangle$ を多少変化させても式 (3) は成立する。この意味で新奇な量子ホロノミーは構造安定だ^{17, 18)}。

3. 多体問題 (一次元ボーズ粒子系) での例

周期境界条件下の一次元空間中に閉じこめられている N 個のボーズ粒子を記述するのが Lieb-Liniger 模型である¹²⁾。そのハミルトニアンは

$$H = -\frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + g \sum_{(j,\ell)} \delta(x_j - x_\ell). \quad (6)$$

ここで g は粒子間の結合強度。簡単のため $\hbar = 1$ 、ボーズ粒子の質量を 1 、空間周期を 2π とする。

ここで考える断熱サイクル C は三つの径路から成る. 最初の径路 $C^{(0)}$ は $g = 0$, すなわち自由なボーズ系を起点とし, g を断熱的に ∞ まで増大させる (Tonks-Girardeau 領域¹⁹). 次に, $C^{(1)}$ にて g を瞬間的に反転させ $g = -\infty$ とする⁷ (super-Tonks-Girardeau 領域²⁰). 最後に, $C^{(2)}$ にて g を $-\infty$ から断熱的に増大させ $g = 0$ で止める. このサイクルによって N 体系の固有エネルギーのシフトが起きる (図 4). 断熱サイクル C は super-Tonks-Girardeau 気体を実現させた実験で調べられた過程に含まれるものである²⁰. ただし, ここでは粒子数を固定し, 始状態は熱平衡状態の代わりにハミルトニアン固有状態を考える.

以下, C に沿って固有エネルギーを追跡することで, 新奇な量子ホロノミーが起きることを示す. 二粒子での例を図 4 に示した. 固有値問題を解くには, ベーテ仮設を使い, 固有関数が N 個の擬運動量 k_j ($j = 1, \dots, N$) を持つとする. このとき k_j が満たすべき条件は

$$e^{i2\pi k_j} = \prod_{\ell \neq j} \frac{k_{j\ell} + ig}{k_{j\ell} - ig}. \quad (7)$$

ここで, $k_{j\ell} \equiv k_j - k_\ell$ とした. この方程式の解を $k_j(g)$ と記すと, 固有エネルギーは $E(g) = \sum_j \{k_j(g)\}^2 / 2$.

ベーテ方程式 (7) には二つの“保存量”があり, これらが解の g 依存性を決めている. ひとつは $-\infty < g < \infty$ で定義される

$$I_j(g) \equiv k_j(g) - \frac{1}{\pi} \sum_{j \neq \ell} \arctan \frac{g}{k_{j\ell}(g)}. \quad (8)$$

この値は g に依らない. なぜなら, $I(g)$ は g について連続だが, 式 (7) より $I_j(g)$ は整数に限られるため. もう一つの保存量は

$$J_j(g) \equiv k_j(g) + \frac{1}{\pi} \sum_{j \neq \ell} \arctan \frac{k_{j\ell}(g)}{g} \quad (9)$$

だが, これは $g \neq 0$ でのみ定義される. $J_j(g)$ が取る値は, 粒子数 N が偶 (奇) のとき半整数 (整数) のみ.

これらを利用し C に沿って $k_j(g)$ の値を追跡する. 簡単のため二体 ($N = 2$) の場合を説明する. まず C の起点を $0+$, 終点を $0-$ と記し区別する. $k_j(0+)$ を与えたとして, C に沿って $k_j(g)$ を延長し $k_j(0-)$ を求める. ただし, $C^{(0)}$ ($0+ < g < \infty$) にて $k_1(g) < k_2(g)$ となるように擬運動量を並べておく.

最初の区間 $C^{(0)}$ では, $I_j(g) = k_j(0)$ と $J_j(g) = k_j(\infty)$ が成立する. なお, $I_j(g)$ は $g = \infty$ へ延長できないことに注意. ここから, $0 < g < \infty$ で $k_j(\infty) - k_j(0) = J_j(g) - I_j(g)$ が成立する. すると, 式 (8), (9) から

$$k_j(\infty) - k_j(0) = \frac{1}{2} \sum_{\ell \neq j} \operatorname{sgn} \left(\Re \frac{k_{j\ell}(g)}{g} \right). \quad (10)$$

⁷ $C^{(1)}$ にて g の値は不連続に変化するが, 固有エネルギーや固有空間は滑らかに繋がる. このため, 実用上は $C^{(1)}$ を断熱的過程とみなせる.

$N = 2$ なら右辺は $(-1)^j / 2$. $k_j(g)$ の値は $C^{(1)}$ では変化しないので, $C^{(2)}$ でも $J_j(g) = k_j(\infty)$ が成立する. 一方, $-\infty < g \leq 0$ にて $I_j(g) = k_j(0-)$. つまり, $C^{(0)}$ と $C^{(2)}$ では $I_j(g)$ の値は異なる. ゆえに C の前後で擬運動量が

$$k_j(0-) = k_j(0+) + (-1)^j \quad (11)$$

と変化するため, 固有エネルギーもシフトする (図 4).

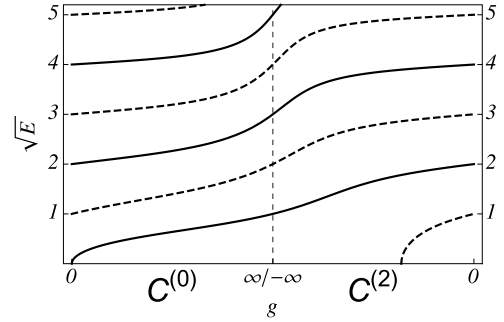


図 4 Lieb-Liniger 模型での新奇な量子ホロノミー (二体の場合)¹¹. 自由ボゾンの基底状態 (太線) および第一励起状態 (太破線) に対応する準位を示した. 左側と右側はそれぞれ $C^{(0)}$ ($g \geq 0$) と $C^{(2)}$ ($g \leq 0$) に対応し, 境界で g が反転する. 横軸は $\tan^{-1} g$ に比例する. 縦軸は \sqrt{E} とし, $E \geq 0$ の場合のみを示した. 空間周期は 2π .

この議論の背景にあるレベルダイナミクスの観点を説明する. これは断熱パラメーター g を仮想的な時間とみなし, これに沿った固有エネルギーの“時間発展”のことだ. レベルダイナミクスは量子カオス系の準位統計の議論にも用いられてきた^{21, 22}.

ここで使った $I_j(g)$ や $J_j(g)$ はレベルダイナミクスの保存量だが, これらは断熱パラメーター空間内の局所的な領域でのみ意味を持つ点で特殊である. 例えば $I_j(g)$ は $C^{(0)}$ および $C^{(2)}$ のそれぞれの領域では一定値を取る. しかし, $C^{(1)}$ ($g = \infty$) での特異性ゆえに C 全体を通してみると $I_j(g)$ の値は変化する. これらの影響から固有エネルギーが変化し, つまり, 新奇な量子ホロノミーが起きた.

なお, $I_j(g)$ や $J_j(g)$ は Lieb-Liniger 模型特有の保存量である. レベルダイナミクスはこの他に無限個の保存量を持つ^{23, 24} が, 新奇な量子ホロノミーとの関係は不明だ.

4. 固有エネルギーの交差の利用

新奇な量子ホロノミーを実現する一つの方法は, 固有エネルギーの交差を利用することだ²⁵ (図 2(c))⁸. その一例として, 量子グラフ (ワイヤー) の切り貼りと伸縮を伴うサイクルを紹介する^{28, 29}. 長さ L の一次元空間中 (量子グラフ) に質点が閉じこめられているとする. 系の始状態は基底状態だとする (図 5 (a) の ψ_1).

⁸誘導ラマン断熱遷移 (STIRAP)²⁶ は原子や分子に振動電磁場を印加し, これを断熱変化させて状態を制御する. これは擬固有エネルギーの交差を利用した断熱状態励起だとみなせる²⁷. この意味で, STIRAP では新奇な量子ホロノミーが起きると言ってもよい.

サイクルの最初の過程 C_1 では、グラフを二つに断熱的に切断する。このとき、片方（左側と呼ぶ）を少し短かめにする。つまり、切断後の左（右）側の長さ $l_{L(R)}$ について $l_L = L/2 - \epsilon$, $l_R = L/2 + \epsilon$ ($0 < \epsilon < L/3$) とする。ここでの断熱的な切断とは、切断箇所に δ -関数状のポテンシャルを置き、その強度を 0 から ∞ にゆっくり強めることに相当する。 C_1 の途中では基底状態は準位交差を起こさない。 C_1 を終わるとグラフは二つに切れたとみなせ、質点は右のグラフに局在する。つまり、左のグラフは空だ（図 5 (c)）。

次の過程 C_2 では、二つのグラフの全長 L を保ちつつ、それぞれを断熱的に伸縮させる。 C_2 の最後では、左側は伸び、右側は縮んで $l_L = L/2 + \epsilon$, $l_R = L/2 - \epsilon$ となるとする。 C_2 の終点では、質点は右側の基底状態を占有したままだが、左側の空の基底状態が全体としての基底状態だ。実は C_2 の途中で準位交差が起きたので、この過程の終状態は全系の第一励起状態だ（図 5 (e)）。

最後に C_3 で左右を断熱的に繋げる。これは C_1 の逆過程に相当し準位交差は起きない。 C_3 の終点で系のハミルトニアンは始点に戻るが、質点は第一励起状態を占有する（図 5 (a) の ψ_2 ）。つまり、新奇な量子ホロノミーが起きる。

この例では、 C_2 での準位交差のために励起が起きた。準位交差は一般の摂動に対して脆弱なので、この例の実現可能性に疑問が起きる。この問題を解決する一つの方法は、対称性等で交差を保護することで、もう一つは微細な準位反発を透熱的に飛び越させることだ。後者を説明する。これは、 C_2 での準位交差を壊すのは、左右のグラフのトンネル過程のみであることを利用する。もし C_2 で二つのグラフを十分離せば、準位反発は指数関数的に小さく抑えることができ、準位反発に沿う断熱過程を実現することはむしろ困難となる。このとき、摂動を加味しない場合の準位交差に沿ったいわゆる透熱的な時間発展が実現しやすくなる。

以上の結果は多体系にも拡張できる。弱く相互作用したボーズ粒子系を基底状態に準備した場合、この断熱サイクルの結果、終状態では全てのボーズ粒子が第一励起状態を占有し、完全な反転分布が得られる³⁰⁾。一次元的ボーズ気体は実験的操作の段階に入っていることを考えれば、この機構による誘導放出とレーザーへの応用は十分現実的なものと考えられる。一次元においては強く相互作用するフェルミ気体が弱く相互作用するボーズ気体と同等である事実^{31, 32)}を考えれば、この機構の適用範囲は一次元電子ガス等へと、さらに広がるだろう。

5. 数理的背景

本節では、新奇な量子ホロノミーの数理的な背景に関する二つの考察^{34, 9)}を概観する。

まず、これらの原型である、断熱サイクル C に対する既存の量子ホロノミー、特にベリー位相 $\gamma(C)$ について述べ

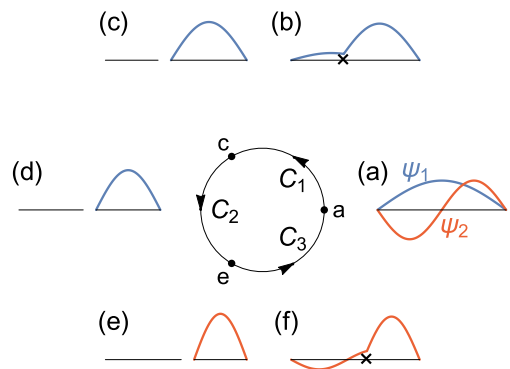


図 5 量子グラフの切り貼りと伸縮を伴うサイクル C による新奇な量子ホロノミー。サイクルの途中でグラフの形状（水平線）と、その上での固有関数を描いた。× は δ ポテンシャルの位置を示す。(a) $\psi_1(x)$ と $\psi_2(x)$ はそれぞれ C の起点および終点（中心の円上の点 a）で粒子が占有する状態。前者は基底状態で、後者は第一励起状態；(b) 円上の点 a と c を結ぶ経路 C_1 の途中；(c) C_1 の終了後、グラフは二つに切断された；(d) 点 c と e を結ぶ経路 C_2 途中の準位交差点直上；(e) C_2 の終点 e では全系の第一励起状態；(f) 点 e と a を結ぶ経路 C_3 の途中。

る。 $\gamma(C)$ はパラメーター空間のエネルギー縮退点に存在する有効モノポールと対応させることができる。これの放つ磁場が C を囲む面を貫く磁束は $\gamma(C)$ と等しく、これは C に沿った幾何学的なベクトルポテンシャルの線積分でもある⁴⁾。 $\gamma(C)$ を幾何学的に捉えるため、断熱的に時間発展する量子状態の空間へと、閉経路 C を“持ち上げ”た軌跡 \tilde{C} を調べる⁹⁾。 \tilde{C} の始点と終点との食い違いは位相因子 $\exp[i\gamma(C)]$ と等しく、これはファイバー束のホロノミーとみなせる。この解釈は確率振幅の変化に着目したものが、一方で、基底ベクトルに現れるホロノミーとしての解釈を藤川は与えた^{33, 6)}。

量子ホロノミーの、新奇なものを含めた統一的定式化を紹介する³⁴⁾。そこでは、定常状態 $|n\rangle$ に断熱サイクル C を課したのから動力的位相を除いた $|n(C)\rangle$ を調べるため、重なり積分 $\langle m|n(C)\rangle$ からなる行列 $M(C)$ に着目する。これはベリー位相や非対角幾何学的位相³⁶⁾といった位相のホロノミーの情報および、固有空間の移り変りの情報の両方を含む。藤川の定式化³³⁾の拡張から、 $M(C)$ は非アーベル的なベクトルポテンシャルの径路に（逆に沿った）積分（指数関数）¹⁰⁾であることを示すことができる。ここから、非エルミートの縮退点と新奇な量子ホロノミーとの関係を示すこともできる³⁷⁾。

次に、固有空間の変化に焦点を当てた幾何学的な議論を紹介する⁹⁾。複数の固有空間の変化をまとめて調べるため、 j 番目の固有空間に対応する射影演算子を P_j と記し、これらを順序付けて並べたものを $p \equiv (P_1, P_2, \dots)$ とする。断

⁹⁾いわゆる動力的位相の寄与は \tilde{C} から除く。

¹⁰⁾非アーベル的なベクトルポテンシャルが現れる点で新奇な量子ホロノミーと Wilcek-Zee のホロノミー³⁵⁾は似ているように思えるが、これらは全く別のものだ。前者は複数の固有空間の交換で、後者は縮退準位内のベクトルの回転だ。

熱サイクル C に対応して p は軌跡 \tilde{C} を描く。 \tilde{C} の始点と終点との食い違いは、固有空間の移り変わり、すなわち新奇な量子ホロノミーを表す。ここでの幾何学的対象は被覆空間として位相幾何学で知られるものであり、離散的な構造群を持つファイバー束とみなせる³⁸⁾。これを二準位系に適用すると、図 1(b) にあるように“配向子”の断熱経路に沿った変形が回位を起こすことと、新奇な量子ホロノミーとの対応が理解できる。さらに、この定式化はアハロノフ-アナンダン流の非断熱拡張³⁹⁾を新奇な量子ホロノミーにもたらし⁹⁾。この意味で、量子力学のトポロジカルな一側面が新奇な量子ホロノミーに現れると言ってよいだろう。

6. おわりに

本稿では、新奇な量子ホロノミーが起きる三つの事例を紹介し、二つの理論的な考察の概要を述べた。紙幅の都合で断熱量子計算の計算時間短縮への応用⁴⁰⁾の説明は省いた。それぞれの事例では模型固有の解析だけでなく、より多くの模型へ拡張できるような、できるだけ一般性のある議論を示した。他方ここで示した具体例はいささか人為的な「量子ホロノミーの純粋培養」となっているのも事実だ。実験的例証を念頭に、より自然な文脈の中にある例を見つけ出すことは、これからの大きな課題である。

ひるがえって考えれば、「周回操作を推進的一方向運動に転換する機構」が物理学の工学的応用にもつ大きな重みは、熱力学的エンジンを考えるだけでも明らかだ。量子ホロノミー現象への工学的な興味も、量子エンジン、量子ポンプ、量子冷却といった新しい量子操作への応用が示唆される故に、決して小さくはないだろう。量子論の中に、円環運動を推進運動に変換する機構が内包されていた、という本稿のメッセージを再度強調して筆をおきたい。

本稿で紹介した内容は宮本学, Sang Wook Kim, 根本香絵, 米澤信拓, Ondřej Turek, 霞江翔との協同研究を通じて得た成果の一部である。

参考文献

- 1) M. Born and V. Fock: *Z. Phys. A* **51** (1928) 165.
- 2) T. Kato: *J. Phys. Soc. Japan* **5** (1950) 435.
- 3) R. Uzdin, A. Mailybaev, and N. Moiseyev: *J. Phys. A* **44** (2011) 435302.
- 4) M. V. Berry: *Proc. Roy. Soc. London A* **392** (1984) 45.
- 5) 倉辻比呂志: *日本物理学会誌* **47** (1992) 447.
- 6) 藤川和男: *日本物理学会誌* **62** (2007) 163.
- 7) B. Simon: *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 2167.
- 8) P. G. de Gennes and J. Prost: *The Physics of Liquid Crystals* (Oxford University Press, Oxford, 1993) second ed., Chap. 1.
- 9) A. Tanaka and T. Cheon: *Phys. Lett. A* **379** (2015) 1693.
- 10) T. Cheon: *Phys. Lett. A* **248** (1998) 285.
- 11) N. Yonezawa, A. Tanaka, and T. Cheon: *Phys. Rev. A* **87** (2013) 062113.

- 12) E. H. Lieb and W. Liniger: *Phys. Rev.* **130** (1963) 1605.
- 13) M. Berry, N. Balazs, M. Tabor, and A. Voros: *Ann. Phys. (NY)* **122** (1979) 26.
- 14) T. Kitagawa, E. Berg, M. Rudner, and E. Demler: *Phys. Rev. B* **82** (2010) 235114.
- 15) P. Titum, E. Berg, M. S. Rudner, G. Refael, and N. H. Lindner: *Phys. Rev. X* **6** (2016) 021013; L. Zhou, C. Chen, and J. Gong: *Phys. Rev. B* **94** (2016) 075443.
- 16) K. Nakamura and H. J. Mikeska: *Phys. Rev. A* **35** (1987) 5294(R).
- 17) A. Tanaka and M. Miyamoto: *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 160407.
- 18) M. Miyamoto and A. Tanaka: *Phys. Rev. A* **76** (2007) 042115.
- 19) T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss: *Science* **305** (2004) 1125; B. Paredes, A. Widera, V. Murg, O. Mandel *et al.*: *Nature* **499** (2004) 277.
- 20) E. Haller, M. Gustavsson *et al.*: *Science* **325** (2009) 1224.
- 21) P. Pechukas: *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 943.
- 22) T. Yukawa: *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 1883.
- 23) K. Nakamura and M. Lakshmanan: *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 1661.
- 24) T. Yukawa: *Phys. Lett. A* **116** (1986) 227.
- 25) T. Cheon, A. Tanaka, and S. W. Kim: *Phys. Lett. A* **374** (2009) 144.
- 26) B. W. Shore: *Manipulating Quantum Structures Using Laser Pulses* (Cambridge, Cambridge, 2011).
- 27) S. Guérin, L. P. Yatsenko, and H. R. Jauslin: *Phys. Rev. A* **63** (2001) 031403(R).
- 28) T. Cheon, A. Tanaka, and O. Turek: *Acta Polytechnica* **53** (2013) 410.
- 29) S. Kasumie, M. Miyamoto, and A. Tanaka: *Phys. Rev. A* **93** (2016) 042105.
- 30) A. Tanaka and T. Cheon: *New J. Phys.* **18** (2016) 045023.
- 31) M. Girardeau: *J. Math. Phys.* **1** (1960) 516.
- 32) T. Cheon and T. Shigehara: *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 2536.
- 33) K. Fujikawa: *Phys. Rev. D* **72** (2005) 025009.
- 34) T. Cheon and A. Tanaka: *Europhys. Lett.* **85** (2009) 20001.
- 35) F. Wilczek and A. Zee: *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984) 2111.
- 36) N. Manini and F. Pistolesi: *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 3067.
- 37) S. W. Kim, T. Cheon, and A. Tanaka: *Phys. Lett. A* **374** (2010) 1958.
- 38) H. Mehri-Dehnavi and A. Mostafazadeh: *J. Math. Phys.* **49** (2008) 082105.
- 39) Y. Aharonov and J. Anandan: *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987) 1593.
- 40) A. Tanaka and K. Nemoto: *Phys. Rev. A* **81** (2010) 022320.

(2016年11月21日原稿受付)

Exotic Quantum Holonomy — a topological aspect of adiabatic/nonadiabatic quantum dynamics

Atushi Tanaka and Taksu Cheon

abstract: Several examples of systems that exhibits exotic quantum holonomy are reviewed. Related theoretical works are briefly explained.