新奇な量子ホロノミーの古典対応物

Classical analog for exotic quantum holonomy

田中篤司 (首都大理工)、全卓樹 (高知工科大)
Atushi Tanaka (TMU) and Taksu Cheon (KUT)

2017-09-24

日本物理学会 2017 年秋季大会
岩手大学（上田キャンパス）

23pJ24-10

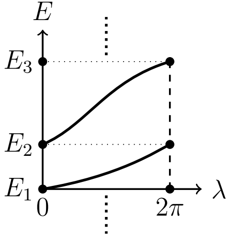
目次

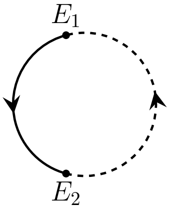
「新奇な量子ホロノミー」の古典対応物について、二つの事例を紹介。

Ref. 新奇な量子ホロノミーについては、物理学会誌 4 月号参照。

新奇な量子ホロノミー @ (擬) 固有エネルギー

...パラメーター空間 $\mathscr{M}$ 中の閉経路 C に沿って (擬) 固有エネルギーを追跡した結果、元に戻らないこと。

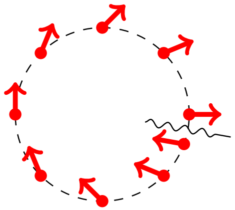




例: 一般化された点状ポテンシャル系 (Cheon 1998), 階数 1 の摂動下の量子写像 (AT and Miyamoto 2007) など。

新奇な量子ホロノミー @ 固有空間 (あるいは期待値)

... このとき、定常状態を断熱閉経路 C に沿って時間発展させると
$\langle$始状態$|$終状態$\rangle = 0$ (固有値と固有ベクトルの対応より).



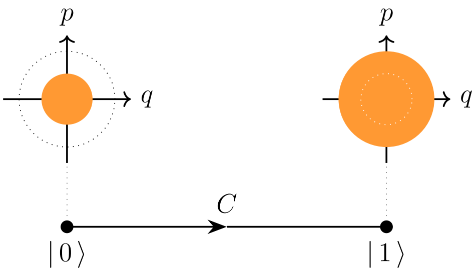
スピン-$\frac{1}{2}$ での期待値（ブロッホベクトル）の変化

例: (擬) 固有エネルギーがシフトする場合に加え、準位交差 (e.g. Aharonov-Bohm ring) (TC, AT and Kim 2009; AT and TC 2010) や相互作用反転を利用したサイクル (e.g. Lieb-Liniger 模型) (Yonezawa *et al.*, 2013)

断熱状態の変化を半古典的に考えると...

仮定：古典系の断熱定理を使うため対応する古典系は可積分とする。このとき、作用変数 $I = \oint_{\text{トーラス}} p\, dq$ が断熱不変量。

Bohr-Sommerfeld 量子化条件からトーラスと固有状態が対応する：



ゆえに「断熱サイクルが断熱不変量の値を変化させる」ことが新奇な量子ホロノミーのために起きる(？)。

目次

古典線形キックドスピン

スピン $\boldsymbol{S}$ に静磁場とパルス磁場 (周期 T) を印加：

$$H(t) = \boldsymbol{B}(t) \cdot \boldsymbol{S}, \qquad \text{ここで} \qquad \boldsymbol{B}(t) \equiv \omega \boldsymbol{e}_z + \lambda \boldsymbol{n} \sum_n \delta(t - nT).$$

$\boldsymbol{n}$ (単位ベクトル) と λ はパルス磁場の方向と強さ。ポアンカレ写像は：

$$\boldsymbol{S}' = M_\lambda \boldsymbol{S},$$

M_λ は 3x3 直交行列であり回転行列の積に分解できる:

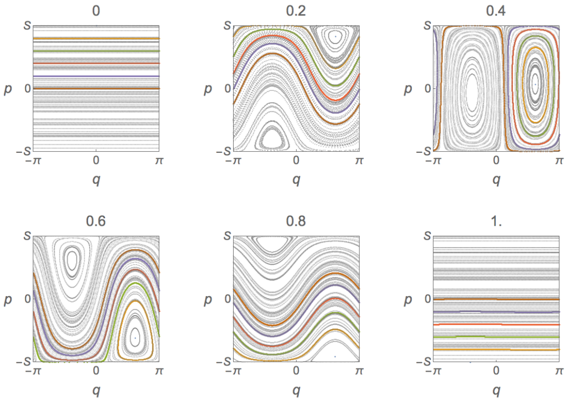
$$M_\lambda = R(\boldsymbol{e}_z, \omega T) R(\boldsymbol{n}, \lambda)$$

ここで、$R(\boldsymbol{n}, \lambda)$ は回転軸 $\boldsymbol{n}$ について角度 λ の回転。

λ を 0 から 2π に増加させる場合、M_λ は元に戻る。これを断熱閉経路 C とする。

古典線形キックドスピン：数値例

閉経路 C に沿って λ を 0 から 2π に断熱的に増やした場合。
正準共役変数 $(q,p) = (\arctan(S_y/S_x), S_z)$ を用いる。



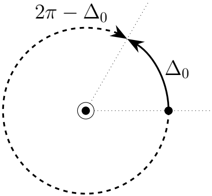
C はポアンカレ写像 M_λ を戻すが、トーラスの交換を起こす。

説明 1: 回転軸と回転角への分解の曖昧さから

線形キックドスピン特有の初等的な説明。

線形なのでポアンカレ写像は $M_\lambda = R(\boldsymbol{I}_\lambda, \Delta_\lambda)$ とできる。ここで断熱的な回転軸 $\boldsymbol{I}_\lambda$ と回転角 Δ_λ を導入した。これらは λ について連続。例えば、$\pm\boldsymbol{I}_\lambda$ は M_λ の二つの固定点に対応する。

直接的な計算から $\boldsymbol{I}_{2\pi} = -\boldsymbol{I}_0$, $\Delta_{2\pi} = 2\pi - \Delta_0$.
つまり、これらは λ について 2π 周期では無い。



ゆえに、断熱サイクル C は M_λ の二つの固定点を交換する。ゆえにトーラスについても同様。

説明 2: spin-$\frac{1}{2}$ での厳密な量子古典対応

スピン-$\frac{1}{2}$ での期待値の運動方程式と、古典系の運動方程式は同じ形：

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{B}(t) \times \boldsymbol{S} \qquad \text{(いわゆるブロッホ方程式).}$$

これと、量子系で断熱サイクル C が新奇な量子ホロノミーが起きることから、古典系でもトーラスが交換する。

なお、量子系のフロケ作用素が C を閉経路に持つためには、この例では古典系のハミルトニアンに「おまけ」を加える必要がある:

$$H_{\text{量子}}(t) = H_{\text{古典}}(t) + \frac{1}{2}\hbar\lambda \sum_n \delta(t - nT)$$

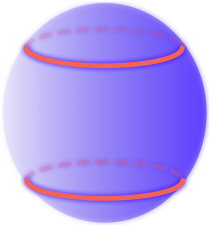
(AT and Miyamoto 2007).

説明 3: トポロジカルな構造からの説明（シナリオ）

この系のトーラスの族 (葉層構造) を考える。あるトーラスから出発したとき、断熱的な時間発展でたどりつけるのは作用変数の値が同じもののみ。

ちなみに、スピンでは作用変数の値をトーラスが張る立体角に比例するように選べる。

線形スピンでは、このようなトーラスは自分を含め二つのみ (縮退し得るが例外的)。



このようなトーラスの組は**被覆空間**をなす。すると、新奇な量子ホロノミーの位相幾何学的な定式化 (AT and TC 2015) を利用できる。例えば、パラメーター空間 $\mathscr{M}$ の基本群 $\pi_1(\mathscr{M})$ のうち、非自明元に対する断熱閉経路のみが、トーラス交換を起こし得る。

目次

非線形キックドスピン

近可積分系での例を紹介する。近可積分系では一般的な断熱定理が無いことに注意。

$H(t) = \boldsymbol{B}(t) \cdot \boldsymbol{S}$ として、$\boldsymbol{B}(t)$ が弱く S_z に依存する場合を考える:

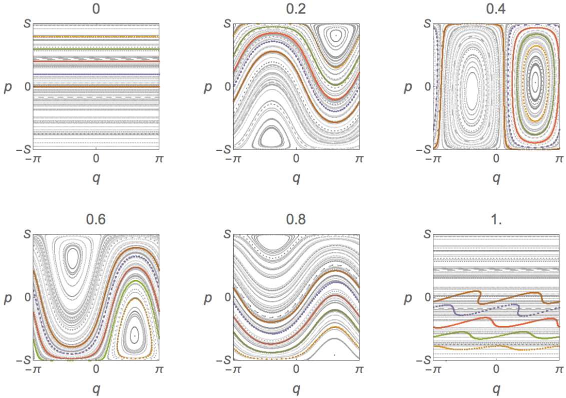
$$H(t) = \left[\omega S_z + \frac{1}{2} k S_z^2\right] + \lambda \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{S} \sum_n \delta(t - nT). \tag{1}$$

cf. Haake, Kús and Scharf 1987.

この場合もポアンカレ写像 M_λ は λ について 2π 周期なので、C は断熱閉経路。

非線形 キックドスピン：数値例 ($k = 0.1$)

C に沿った断熱的な時間発展。ここで $(q, p) = (\arctan(L_y/L_x), S_z)$.



C による トーラス 交換は崩れる。

可積分近似による解釈

（可積分近似については例えば、Hanada, Shudo and Ikeda, PRE 2015）

線形キックドスピンのポアンカレ写像は、自励的な有効ハミルトニアン $H_{線形}(\lambda)$ から生成されるとみなせる。そこで、$H_{線形}(\lambda)$ がトーラス交換の機構を持っていると考えてよい。

非線形キックドスピンでは、摂動を受けるたものが新たな有効ハミルトニアンになる：

$$H(\lambda) \simeq H_{線形}(\lambda) + V \qquad ここで \qquad V \equiv \frac{k}{2} S_z^2.$$

この系のトーラスの、断熱サイクル C についての非周期的な変化は $H_{線形}(\lambda)$ の場合に起きたものについて、摂動を受けたものだとみなせる。

まとめ

- 新奇な量子ホロノミーの古典対応物を得た。すなわち、トーラスを断熱閉経路 C に沿って時間発展させると、別のトーラスに辿りつくような例を見いだした。
- 線形キックドスピン での厳密な例について、いくつかの解釈を与えた (回転行列の定義、spin-1/2 の量子古典対応、位相幾何学的な解釈)。
- 非可積分系の例を示し、これについて可積分近似による解釈を与えた

展望

- 位相幾何学的な解釈を完成させるのは、今後の課題。
  (∼「葉層構造のパラメーター変形に対するモノドロミー」となるはず)
- 具体例を増やす
  - 可積分 キックドスピン/top で、かつ線形の場合と異なる葉層構造 (Euler top のような) を持つ例の探索
  - キックドスピン/top 以外の例の探索 (e.g. サイクロトロン運動での磁場を時間的・空間的に変調する系)
- Hannay 角の「非対角」版を考える土台になるはず
  (cf. Manini and Pistolesi 2000 の非対角ベリー位相)。