解説：特集
コンピューテショナル・インテリジェンスの新展開
–クリフォード代数表現など高次元表現を中心として–

量子的コンピューティングと量子ゲーム理論

全 卓樹*

* 高知工科大学 782-8502 高知県香美市土佐山田町宮の口 185
* Kochi University of Technology, Tosa Yamada, Kochi, Japan
*E-mail: taksu.cheon@kochi-tech.ac.jp

キーワード：グローバーの検索，マイヤーのコイン・フリップ，量子力学，量子情報，クリフォード代数
JL DRFT/12/0203–v5 ©2012 TC

1．序

量子論はもともと原子世界の記述のために生まれてきたのであるが，当初からその「非常識的」な性質が哲学的論争を呼んできた．原子，電子一個の分離と操作が人間の技術の視野に入ってきた前世紀末から，そのような非常識を逆手に取って，量子の異形な姿をいわば一種の正の資産として扱おうという研究が盛んになってきた．その流れの中に「情報」を量子的に扱って従来より格段に効率的な通信，計算などを行うという試みがあり，それが広義の「量子情報科学」と知られるものである[1)]．

古典力学にない量子力学の特徴として

- 物理量の実在性の否定と状態および観測概念の登場
- 重ね合せの原理とその結果としての異なった状態の並列的存在，さらにはエンタングルメントの存在

がある．異なった状態の併存は一方で「不確定性」として物理量観測精度の限界を与えるのであるが，他方で古典的な「一つの量」に対するに波動関数という「分布」が対応し，それ故量子論は古典論より豊富な内実を含んでいる．これを巧妙に扱うことで「有用な資源」となす事も可能なわけである．本稿では「量子検索」と「量子コインフリップゲーム」という二例を取り上げて，このような量子力学的な資源が，どのようにして計算アルゴリスムや情報交換による利得の改善に転換され得るかを見ていく．

2．二状態系の量子力学

現代の量子論にあっては，単純な系に発現する優れて量子的な性質，すなわち双対性，相補性，量子異常，エンタングルメント等々の探査と応用が研究の中心となっている．最も単純な量子系は二状態のみを持つ系で，これはスピン 1/2 の粒子の方位の変化と数学的に同等である．中心を固定された微視的な矢印があって，3 次元空間のあらゆる方向を向けるようになっていながら，一時には二つの状態にしか見いだされない奇妙な対象の記述を考えるのである．

長らく量子力学に触れていなくて不案内になった読者も多いと思われるので，まずはスピン 1/2 粒子の方角に関する量子力学の基礎事項のおさらいをしておこう．実験的に観測されるのは次の事実である．

[1] スピンの向きの測定は必ずある方向付き測定軸を定めて行われ，測定結果はその方向に沿っているか（＋向き）逆か（－向き），という形でのみ与えられる

[2] 一度測定され方向が定まったスピンを，観測軸の向きを角度 θ だけ変えてもう一度測定すると，結果は不確定で確率的に「＋」と「－」が混じってくる．

[2a] 最初の測定結果が「＋」だと，二回目の測定で「＋」，「－」に観測される確率は各々$\cos^2\frac{\theta}{2}$，$\sin^2\frac{\theta}{2}$ である

[2b] 最初の測定結果が「－」だと，二回目の測定で「＋」，「－」に観測される確率は各々$\sin^2\frac{\theta}{2}$，$\cos^2\frac{\theta}{2}$ である

つまり量子力学にあっては「スピンの方向」という概念は観測者を離れた「絶対的特性」としては存在しないのである．

これらの実験結果を記述するために，スピンの状態を次元 2 の規格化された複素数係数ベクトル（ヒルベルト・ベクトル）を用いるのが量子力学である．今最初の測定を z 軸から θ だけ傾いた軸で行ったとする．z 軸とこの測定軸を含む平面が xz 平面となす角を ϕ とする（つまり極座標 (θ,ϕ) をとる）．この最初の測定軸に沿った測定で「＋」になった時のスピンの状態を $|\theta\rangle$,「－」になった時の状態を $|\bar\theta\rangle$ とかくと，それは次のベクトルで与えられる；

$$|\theta,\phi\rangle=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ e^{\mathrm{i}\phi}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},\quad |\bar\theta,\bar\phi\rangle=\begin{pmatrix}-e^{-\mathrm{i}\phi}\sin\frac{\theta}{2}\\ \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}. \qquad (1)$$

これらの複素共役ベクトルを

$$\begin{aligned}\langle\theta,\phi|&=\left(\cos\tfrac{\theta}{2}\quad e^{-\mathrm{i}\phi}\sin\tfrac{\theta}{2}\right),\\ \langle\bar\theta,\bar\phi|&=\left(-e^{\mathrm{i}\phi}\sin\tfrac{\theta}{2}\quad \cos\tfrac{\theta}{2}\right),\end{aligned} \qquad (2)$$

を書くと，$\langle\,|$ 型ベクトルと $|\,\rangle$ 型ベクトルとの間には内積が定義できて，それらは $\langle\theta,\phi|\theta,\phi\rangle=\langle\bar\theta,\bar\phi|\bar\theta,\bar\phi\rangle=1$，そして $\langle\theta,\phi|\bar\theta,\bar\phi\rangle=\langle\bar\theta,\bar\phi|\theta,\phi\rangle=0$ になっている．二回目の測定は z 軸に沿って行うものとし，その結果が「＋」「－」であった時のスピン状態をそれぞれ $|+\rangle$，$|-\rangle$ と書くと，これは上のベクトルで $\theta=0$ と置いたものに他ならず

$$|+\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad |-\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad (3)$$

で与えられる．最初の測定後の状態と二度目の測定後の状態について

$$\begin{aligned}|\theta,\phi\rangle&=\cos\frac{\theta}{2}\,|+\rangle+e^{\mathrm{i}\phi}\sin\frac{\theta}{2}\,|-\rangle\,,\\ |\bar\theta,\bar\phi\rangle&=-e^{-\mathrm{i}\phi}\sin\frac{\theta}{2}\,|+\rangle+\cos\frac{\theta}{2}\,|-\rangle\,,\end{aligned} \qquad (4)$$

の関係が見て取れる．この第一式を「$|\theta,\phi\rangle$ 状態は $|+\rangle$ 状態と $|-\rangle$ 状態の重ね合せである」と解釈し，各係数の絶対値の自乗 $\cos^2\frac{\theta}{2}$，$\sin^2\frac{\theta}{2}$ を二回目の観測のそれぞれの状態の発見確率と看做せば，実験事実は説明できる．第二式の $|\bar{\theta},\bar{\phi}\rangle$ についても同様である．

量子力学ではこのように，複数の状態の線形和で表されるものもまた量子状態となって，観測にかかるまではそれら複数の状態がいわば「同時に存在している」と解釈することができるのである．このような重ね合わされた状態の並列的存在性が複数の並列的状態の一括しての操作を可能にする事に注意しよう．いま次の三つの「パウリ行列」

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\ \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$

を考える．この行列の意味は $|\pm\rangle$ への作用から次のように読み取れる．まず

$$\sigma_3|+\rangle=|+\rangle,\quad \sigma_3|-\rangle=-|-\rangle, \tag{5}$$

であるので，$|\pm\rangle$ は σ_3 のそれぞれ固有値 ±1 の固有関数になっており，σ_3 は z 軸の向きを与える「観測量」に他ならない．また

$$\begin{aligned}&\sigma_1|+\rangle=|-\rangle,\quad \sigma_1|-\rangle=|+\rangle,\\&\sigma_2|+\rangle=\mathrm{i}|-\rangle,\quad \sigma_2|-\rangle=-\mathrm{i}|+\rangle,\end{aligned} \tag{6}$$

から σ_1，σ_2 が，適宜の位相を伴ってスピンを引っくり返す操作に対応することがわかる．この 3 つパウリ行列は

$$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=I\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \tag{7}$$

と「エルミート」かつ「ユニタリー」であり，また

$$\sigma_j\sigma_k=-\sigma_k\sigma_j=\mathrm{i}\sigma_\ell, \tag{8}$$

ただし $(jk\ell)=(123)$ or (231) or (312)，と互いに反可換でかつ積の演算について閉じている．パウリ行列を「指数の上にのせる」ことで,「状態空間での回転操作」を記述出来る．例えば

$$e^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\sigma_2}\equiv I\cos\frac{\theta}{2}-\mathrm{i}\sigma_2\sin\frac{\theta}{2}, \tag{9}$$

が z-軸の正負の方向を向いた状態 $|+\rangle$，$|-\rangle$ に対して y-軸周りの角度 θ の回転操作を与えているのは

$$\begin{aligned}&e^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\sigma_2}|+\rangle=\cos\frac{\theta}{2}|+\rangle+\sin\frac{\theta}{2}|-\rangle,\\&e^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\sigma_2}|-\rangle=-\sin\frac{\theta}{2}|+\rangle+\cos\frac{\theta}{2}|-\rangle,\end{aligned} \tag{10}$$

から見て取れる．ここでいう「状態空間における回転」が，一般の重ね合わせ状態に作用することで重ね合わせ比率の変更をもたらす作用を持つ，優れて量子的な操作である事を強調しておこう．

3．グローバーの量子的検索

コンピュータを小型化していくと仕舞に素子がナノメートルを切る大きさになり，そこでは量子的な不確定性からくるノイズによって，もはや信頼出来る演算が不可能になるという事が予想されていた．電子の量子的な運動を逆手に取って，従来では不可能な速度で演算を実行する可能性が指摘されたのがドイチとジョサの画期的な論文であった[2)]．これが「量子計算」アルゴリズムの嚆矢となり，時を置かずショアによる量子的な因数分解アルゴリズムに至った[3)]．因数分解に要する操作手順の数が，通常の古典的アルゴリズムでは因数分解される数の指数乗に比例するのに対して，ショアのアルゴリズムではそれが数の冪乗で済むとあって，大きな数の因数分解に解読困難さの基盤を持つ世間流通の RSA 暗号への影響が恐れられて，これが世間的にも大きな話題となったことは記憶に新しい．

量子論が計算問題を劇的に効率化する代表例として，量子的因数分解と並び称せられるものに「グローバーの量子検索アルゴリズム」がある[4)]．これは量子的アルゴリズムによる手順短縮の効果が「自乗根」で与えられる，というずっと地味なものである．しかしやはりこれはこれで大きな改善であり，問題の設定，解法ともに非常に単純で，量子的アルゴリズムというものを理解するため，ここで取り上げるのに好適な題材になっている．

N 個の状態 $|x\rangle$ $(x=0,1,...,N-1)$ を考えて，この中からある演算子 U で他から区別をつけられた特定状態 $|\omega\rangle$

$$U|\omega\rangle=-|\omega\rangle,\quad U|x\rangle=|x\rangle\quad(x\neq\omega), \tag{11}$$

を探し出す問題を考える．状態 $|x\rangle$ は $N=2^n$ となる数 n の個数の二状態量子系をもってきて並べれば

$$\begin{aligned}&|0\rangle=|+\rangle|+\rangle|+\rangle\cdots|+\rangle,\\&|1\rangle=|-\rangle|+\rangle|+\rangle\cdots|+\rangle,\\&|2\rangle=|+\rangle|-\rangle|+\rangle\cdots|+\rangle,\\&|3\rangle=|-\rangle|-\rangle|+\rangle\cdots|+\rangle,\\&\qquad\vdots\\&|2^n-1\rangle=|-\rangle|-\rangle|-\rangle\cdots|-\rangle,\end{aligned} \tag{12}$$

という具合に作れる．

この問題は古典的に考えると，各状態にあたって U の操作の結果出てくる位相を調べ，そこで $(-)$ の結果がでたら検索完了，とする以外になく，状態 $|\omega\rangle$ に当たる確率は 1 回目の試行から N 回目の試行までどれも等しいので，これには平均的に言って明らかに $N/2$ 回の演算が必要である．果たして量子的な操作ではどうだろうか．

グローバーの量子アルゴリズムではまず，全ての状態が

均等に混じり合った状態

$$|h\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=0}^{N-1}|x\rangle\,, \tag{13}$$

を作る．これは各構成要素の量子状態を全て $|+\rangle$ に置き，それにアダマール演算子 $H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_3+\sigma_1)$ を作用させ

$$H\,|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle), \tag{14}$$

を作ることによって n（$=\log_2 N$）回の操作で行える．グローバーが考えたのは，このアダマール状態を状態空間における回転操作の繰り返しで欲しい状態 $|\omega\rangle$ に変ずる手順である．このとき用いることのできる操作は欲しい状態を位相で検知する U から造られたもの，ならびに初期値として用意した $|h\rangle$ から作られるものだけである．いま $|\omega\rangle$ と相補的な状態

$$|\bar{\omega}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-1}}\sum_{x\neq\omega}|x\rangle\,, \tag{15}$$

を定義すると，アダマール状態は

$$|h\rangle = \sin\frac{\theta}{2}\,|\omega\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\,|\bar{\omega}\rangle\,, \tag{16}$$

と分解できる．ここで $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{N}}$，$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{N-1}{N}}$ と書いた．定義から $\langle\omega|\bar{\omega}\rangle = 0$ であることに注意すると，$|h\rangle$ という状態が二つの直交状態 $|\bar{\omega}\rangle$ と $|\omega\rangle$ だけから出来ていて，これは恰もスピン 1/2 の系が一つだけあるのと実質同等なことがわかる．いま仮に $|\omega\rangle$ と $|\bar{\omega}\rangle$ をそれぞれ z-軸の正の方向と負の方向を向いたスピン状態と考えれば，状態 $|h\rangle$ は状態 $|\bar{\omega}\rangle$ に回転 (9) を作用させて，xz 平面上で z 軸負の方向から z 軸正の方向へ向けて角度 θ の回転させたものと看做すことができる．ここで (11) の演算子 U を $|\omega\rangle$ を用いて書き，さらに $|h\rangle$ から同要領で演算子 F をつくる；

$$U = I - 2\,|\omega\rangle\langle\omega|\,, \tag{17}$$

$$F = -(\,I - 2\,|h\rangle\langle h|\,). \tag{18}$$

状態 $|\omega\rangle$ と $|\bar{\omega}\rangle$ から作る任意の重ね合わせ

$$|\phi\rangle = \sin\frac{\phi}{2}\,|\omega\rangle + \cos\frac{\phi}{2}\,|\bar{\omega}\rangle\,, \tag{19}$$

に対して，これらは実は回転演算になって居て

$$U\,|\phi\rangle = -\sin\frac{\phi}{2}\,|\omega\rangle + \cos\frac{\phi}{2}\,|\bar{\omega}\rangle\,, \tag{20}$$

$$F\,|\phi\rangle = \sin(\theta - \frac{\phi}{2})\,|\omega\rangle + \cos(\theta - \frac{\phi}{2})\,|\bar{\omega}\rangle\,, \tag{21}$$

と作用する．この意味を考えると，U，F がそれぞれ，$|\omega\rangle$，$|h\rangle$ を軸とした鏡映反転であることが分る．この二つの回転を組み合わせたグローバー演算子

$$G = FU, \tag{22}$$

を定義すると，これも $|h\rangle$ と $|\omega\rangle$ の居る xz 平面上での回転となり，簡単な計算から次の表式を得る；

$$G\,|h\rangle = \sin\frac{3\theta}{2}\,|\omega\rangle + \cos\frac{3\theta}{2}\,|\bar{\omega}\rangle\,. \tag{23}$$

つまりこのグローバー演算子は $|h\rangle$ を $|\omega\rangle$ の方向へ $\theta = 2\arcsin\langle h|\omega\rangle$ だけ回転している．そしてこの操作を L 回繰り返せば

$$G^L\,|h\rangle = \sin\frac{(2L+1)\theta}{2}\,|\omega\rangle + \cos\frac{(2L+1)\theta}{2}\,|\bar{\omega}\rangle\,, \tag{24}$$

を得る．繰り返し回数 L を $\frac{(2L+1)\theta}{2} = \frac{\pi}{2}$ になるよう選べば，得られる状態 $G^L\,|h\rangle$ は求めていたもの $|\omega\rangle$ となる．N が十分大きければ，これは

$$L = \frac{\pi}{2\theta} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4\arcsin\frac{1}{\sqrt{N}}} - \frac{1}{2} \approx \frac{\pi\sqrt{N}-2}{4}, \tag{25}$$

となり，これは必要な演算回数 L が $\sqrt{N}$ に比例している事を意味している．古典的な結果は N に比例するものであったので，これは例えば古典的には一万ステップの演算だったものが量子的には百ステップに，百万ステップが千ステップにという具合の大きな改善を与えているわけである．

式 (25) で与えられる回数 L は文字通りに読むと整数とは限らないが，N が十分大きい時はグローバー演算子一度の操作による回転 $\theta = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{N}}$ は十分小さな値であり，この L に近い近辺の整数なら何であっても，$G^L|h\rangle$ は十分に $|\omega\rangle$ に近くなっている．

4．マイヤーの量子的コイン・フリップ

前世紀末に M.A. マイヤーが考案した「量子コイン・フリップ・ゲーム」[5] は，量子力学をゲーム理論に持ち込んだ最初の例の一つであり，その設定の簡明さと優雅さから，今でも量子ゲーム理論の代表的モデルであり続けている．このゲームでは箱の中に表を上にしておかれたコインを考えて，二名のプレイヤー Q と P がこれに順に触れるものとする．今まず Q，そして P，そしてもう一度 Q の順で触って，その際に両者とも相手に気取られぬまま「コインを返す」か「そのままに置く」かの選択ができるものとする．そして最後に箱を開けて「コインが表」なら Q の勝利，「コインが裏」なら P の勝利とする．

今両プレイヤーが通常の古典論に従うなら，相手の動きが見えない以上，Q，P の両者ともどのようにプレイしようとも勝率は $\frac{1}{2}$ であることが少しの省察から簡単に結論できる．ところが仮に Q のみがコインを「量子的にフリップする」事ができ，結果コインを量子的な重ね合わせ状態におくことができるとすれば，このゲームは量子的ゲーマー Q の必勝に終わる．それは次の簡単な考察から解るのである．

コインの表向きを $|+\rangle$，裏向きを $|-\rangle$ とすると，古典的プレイヤー P にはフリップしない $|\pm\rangle \to |\pm\rangle$，フリップ

する $|\pm\rangle \to |\mp\rangle$ の二種の手総計４通りが許されているのみである．一方量子的プレイヤー Q は $|\pm\rangle$ を $|+\rangle$ と $|-\rangle$ の任意の重ね合わせに変ずる事ができる．マイヤーの考えた戦略では Q が最初表向き $|+\rangle$ の状態にあったコインにアダマール変換 H を作用させる．式 (14) で見る通り，コインは $|+\rangle$ と $|-\rangle$ の位相のそろった重ね合わせとなり，次に P が何をやろうともこの状態は不変なままにおかれることになる．最後に Q がこれにもう一度アダマール変換を行う．$H^2 = \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1)^2 = I$ からわかる通り，二度のアダマール演算で元の状態 $|+\rangle$ が再現され，ゲームの勝利者は Q となる．これを式で描写すると

$$\begin{aligned} |+\rangle \ &\xrightarrow{\ Q\ } \ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right) \\ &\xrightarrow{\ P\ } \ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right) \ \xrightarrow{\ Q\ } \ |+\rangle\,, \end{aligned} \tag{26}$$

となる．

実はこの解析はとりあえず Q の必勝法の一つを示しただけであって，このゲームの完全な解析にはなっていない．量子的資源を持ったプレイヤーの圧倒的優位を示すにはそれで十分だが，ゲーム理論的にはやはり完全な解析が望まれる．それはマイヤーの論文から１０年経って，J.M. チャペル，A. イクバルたちの論文によって漸く達成された[6]．

古典的なコイン・フリップと量子的なそれを同一の枠で記述するには「密度行列」の定式化が必要なので，ここではまずそれを略述する．状態ベクトル $|\alpha\rangle$ に対応する密度行列 ρ_α を次のように定義する；

$$\rho_\alpha = |\alpha\rangle\langle\alpha|. \tag{27}$$

この ρ_α は（状態ベクトルに作用する量であった）演算子と同様な形態を持っている事に注意しよう．状態 $|\alpha\rangle$ に操作 U を加えて $|\alpha'\rangle = U|\alpha\rangle$ を得たとすると，それに対応する密度行列への操作は行列 U とその共役転置行列 $U^\dagger$ をもちいて

$$\rho_\alpha \longrightarrow \rho_{\alpha'} = U\rho_\alpha U^\dagger, \tag{28}$$

と書ける事はすぐに了解される．二つの密度行列の実係数の線形和で係数の和が１になるもの，すなわち

$$\rho = p\rho_\alpha + (1-p)\rho_\beta = p|\alpha\rangle\langle\alpha| + (1-p)|\beta\rangle\langle\beta|, \tag{29}$$

も密度行列であり，これは二つの状態がそれぞれ確率 p と $(1-p)$ をもって混在している古典的な確率分布状況を表していると考えることができる．このようなものを「混合状態」と称し，(27) のような単一の量子状態からできた密度行列の表す「純粋状態」と区別する．混合状態 (29) と量子的な重ね合わせ状態 $|\gamma\rangle = \sqrt{p}|\alpha\rangle + e^{\mathrm{i}\varphi}\sqrt{1-p}|\beta\rangle$ から作る純粋状態 $\rho_\gamma = |\gamma\rangle\langle\gamma|$ との違いに注意されたい．

マイヤーのゲームの解析に戻って，コインは最初表向きに置かれるので，これを密度行列で表現すると

$$\rho_0 = |+\rangle\langle+| = \frac{1}{2}(I + \sigma_3), \tag{30}$$

となる．Q がこれに対してもっとも一般的な量子的コイン・フリップを行ったと考えると，それは最も一般的な回転操作

$$U_1 = e^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\sigma}, \tag{31}$$

で表されるが，ここで σ とはパウリ行列を $a^2+b^2+c^2=1$ となる三つの実数 a，b，c の比で組み合わせた $\sigma = a\sigma_1 + b\sigma_2 + c\sigma_3$ のことである．さて Q の操作によって

$$\rho_1 = U_1\rho_0 U_1^\dagger, \tag{32}$$

と変じた状態に対して，古典的なプレイヤーは確率 p でコインを返し $(1-p)$ で何もしないとすると，古典的なコイン返しは (6) にみるとおり σ_1 で表されるので，P の手を経た後のコインの状態は，密度行列

$$\rho_2 = p\sigma_1\rho_1\sigma_1 + (1-p)\rho_1, \tag{33}$$

の混合状態で記述される．最後に Q が先程とは別の一般的回転 U_3 を行うと，コインの状態は

$$\rho_3 = pU_3\sigma_1U_1\rho_0U_1^\dagger\sigma_1U_3^\dagger + (1-p)U_3U_1\rho_0U_1^\dagger U_3^\dagger, \tag{34}$$

となる．古典的プレイヤー P の戦略を表す確率 p によらずに，この最終状態 ρ_3 を最初の上向き状態 ρ_0 と常に等しくなるような状態回転操作の組 $\{U_1, U_3\}$ があれば，それが量子的プレイヤー Q の必勝戦略を与える訳である．すべての p でこれが成り立つには，まず第二項が $(1-p)\rho_0$ に等しくなくてはならない．表式 (30) をみれば，これは U_3U_1 が σ_3 と可換，すなわち $U_3U_1\sigma_3 = \sigma_3U_3U_1$ という条件に等しい．これが満たされるのは

$$U_1 = U_3^\dagger\ e^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}\sigma_3}, \tag{35}$$

とかける場合で尽くされる．すると最終状態は

$$\rho_3 = pU_3\sigma_1U_3^\dagger\rho_0U_3\sigma_1U_3^\dagger, +(1-p)\rho_0 \tag{36}$$

となる．これが恒等的に ρ_0 であるためには，先ほどと同じ議論で $U_3\sigma_1U_3^\dagger$ が σ_3 と可換であればよい；

$$U_3\sigma_1U_3^\dagger\sigma_3 = \sigma_3U_3\sigma_1U_3^\dagger. \tag{37}$$

この条件を満たす全ての回転 U_3 を求めるのは少し骨が折れはするが，初等的手法にて可能であって，結果は二つのパラメータ θ，ϕ を持つ族

$$U_3 = \exp\Big\{\mathrm{i}\tfrac{\phi}{2}\sigma_3 - \mathrm{i}\tfrac{\theta}{2}\left(a\sigma_1 + c_3\cot\tfrac{\theta}{2}\sigma_2 + c_3a\sigma_3\right)\Big\}, \tag{38}$$

ただし $c_3=\pm 1$，$a=\pm\sqrt{(1-\cot^2\frac{\theta}{2})/2}$，が得られ，これが量子コイン・フリップの完全解となる．マイヤーの解は $\theta=\pi$，$\phi=0$ として得られる事は簡単に確かめられる．

マイヤーの量子的コイン・フリップは，スピン 1/2 粒子一個の状態変化だけで記述されるという意味で，量子ゲーム理論の中ではいささか特異的な位置を占める．より一般的な量子ゲーム[7)]では，二個のエンタングルしたスピン 1/2 粒子を考えて，二名のゲームプレイヤーが各自に割り当てられた粒子の状態を操作する．そして二つの粒子の状態に依って変化する「利得関数」がプレイヤーごとに定義されていて，各自自分の利得関数のを極大化を試みると考えるのである．この場合も量子的な取り扱いはゲームの結果に重大な相違をもたらす事が知られているが，その詳細については別の解説があるので，そちら譲ることにしよう[8)]．

5．量子のクリフォード代数

計算アルゴリスムやゲーム戦略の量子論的な定式化による利得に関して最近，量子力学とクリフォード代数の関係についての考察から来る新しい視点が提示されている．ここまで見てきたように，状態が二つある量子系を二次元ヒルベルト空間をもって記述するのがフォン・ノイマンに始まる由緒正しい方法であるが，このような系の記述に実はクリフォード代数が好適だとの観察である[9), 10)]．相対論的量子力学においてディラックの γ 行列が 4 次元空間クリフォード代数を生成する事は早くから知られていたが，非相対論的量子力学にも類似の構造の存する事はあまり認知されていない．そこで最後に，クリフォード表現による量子論の定式化を素描し，それを用いた量子検索と量子コイン・フリップの記述に触れてみたい．

3 次元空間のクリフォード代数 $Cl(3,0)$ は，8 つの元を持った複素数の一種の拡張である．クリフォード代数に属する数 M はスカラー S，ベクトル V，バイベクトル B，トライベクトル T から

$$M=S+V+B+T, \tag{39}$$

と構成され，その共役数は $M^\dagger=S+V-B-T$ と定められる．スカラー S，ベクトル V，バイベクトル B，トライベクトル T は，夫々一つ，三つ，三つ，一つの元

$$\{1\},\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\},\{\sigma_1\sigma_2,\sigma_2\sigma_3,\sigma_3\sigma_1\},\{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\}, \tag{40}$$

から $S=s$，$V=v_1\sigma_1+v_2\sigma_2+v_3\sigma_3$，$B=b_1\sigma_1\sigma_2+b_2\sigma_2\sigma_3+b_3\sigma_3\sigma_1$，そして $T=t\sigma_1\sigma_2\sigma_3$（ここで s，v_j，b_j，t はすべて実数）と，それぞれ元の実数係数線形和として作られる．ベクトルの三つの元 σ_k はパウリ演算子と同一視でき，その積は「内積項」と「外積項」のある

$$\sigma_j\sigma_k=\delta_{jk}+\mathrm{i}\sigma_\ell\epsilon_{jk\ell}\,, \tag{41}$$

で与えられる．ここに i は虚数単位 $\mathrm{i}^2=-1$ であり，クロネッカーのデルタ δ_{jk} は $j=k$ でのみ 1 でそれ以外では 0，そして構造因子 $\epsilon_{jk\ell}$ は $\epsilon_{123}=\epsilon_{231}=\epsilon_{312}=1$ かつ $\epsilon_{132}=\epsilon_{213}=\epsilon_{321}=-1$ そしてそれ以外では 0 で与えられる．バイベクトルの三元は $\{\mathrm{i}\sigma_3,\mathrm{i}\sigma_1,\mathrm{i}\sigma_2\}$, ともかけ，また

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3=\mathrm{i}, \tag{42}$$

からトライベクトル $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ は虚数単位そのものと同一視することができる．クリフォード代数に属する二つの数の積は，常にベクトルの元の積 (41) から計算できる．

さていま「スピン 1/2」粒子が一個ある系を考えよう．これは量子論的には二つの状態をもって記述される．たとえば σ_3 の固有値各々$+$，$-$ の固有状態である $|+\rangle$，$|-\rangle$ を採ると良い．系の観測量は，M を構成するうちの「エルミートな量」であるスカラー 1 と ベクトル $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ の線形結合で与えられる．「偶数ランク」の量であるスカラー 1 とバイベクトル $\{\sigma_1\sigma_2,\sigma_2\sigma_3,\sigma_3\sigma_1\}$ からなる数をスピノルと呼ぶ．スピノルを用いると，クリフォード代数に属するあらゆる数に回転操作を施すことができる．すなわち長さ 1 のベクトル $\sigma=v_1\sigma_1+v_2\sigma_2+v_3\sigma_3$，$(v_1^2+v_2^2+v_3^2=1)$ と角度 ϕ を用いて

$$U=U_\sigma(\phi)=e^{-i\frac{\phi}{2}\sigma}, \tag{43}$$

を定義すると，任意の量 M は

$$M\longrightarrow M'=UAU^\dagger, \tag{44}$$

の変換で M' は σ 軸の周りに角度 ϕ だけ回転した量になる．特に $\phi=\pi$ の場合を考えると，これは軸 σ に関する鏡映反転であって $M\longrightarrow M'=\sigma M\sigma$ と表される．ここで量子状態とスピノルとの間に

$$\begin{aligned}&|+\rangle\longleftrightarrow\psi_+=1, && \mathrm{i}\,|+\rangle\longleftrightarrow\psi_{+\mathrm{i}}=\sigma_1\sigma_2,\\ &|-\rangle\longleftrightarrow\psi_-=-\sigma_3\sigma_1, && \mathrm{i}\,|-\rangle\longleftrightarrow\psi_{-\mathrm{i}}=\sigma_2\sigma_3,\end{aligned} \tag{45}$$

という対応を考える[10)]．スピノルで表現された量子状態の直感的意味は定ベクトル σ_3 に対するそのスピノルの回転操作の結果を示すベクトル量

$$\rho_\psi=\psi\sigma_3\psi^\dagger, \tag{46}$$

を見ると了解されるのである．定義を見ると，これは通常のヒルベルト空間の量子論での密度行列のような形をしている．いまスピノル $\psi_\pm$，$\psi_{-\mathrm{i}}$ から

$$\begin{aligned}&\psi_\rightarrow=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\psi_++\psi_-),\ \psi_\leftarrow=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+-\psi_-),\\ &\psi_\odot=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\psi_++\psi_{-\mathrm{i}}),\ \psi_\otimes=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+-\psi_{-\mathrm{i}}),\end{aligned} \tag{47}$$

なるものを定義すると $\rho_\pm=\psi_\pm\sigma_3\psi_\pm^\dagger$，$\rho_\leftrightarrow=\psi_\leftrightarrow\sigma_3\psi_\leftrightarrow^\dagger$，$\rho_\odot=\psi_\odot\sigma_3\psi_\odot^\dagger$，$\rho_\otimes=\psi_\otimes\sigma_3\psi_\otimes^\dagger$ は

$$\begin{aligned}&\rho_+=\sigma_3,\quad \rho_\rightarrow=\sigma_1,\quad \rho_\odot=\sigma_2,\\ &\rho_-=-\sigma_3,\quad \rho_\leftarrow=-\sigma_1,\quad \rho_\otimes=-\sigma_2,\end{aligned} \tag{48}$$

となって，これは「密度行列風」ベクトル表示 (46) がスピノルのブロッホ球による表示に他ならない事を示している．

グローバー・アルゴリスムをクリフォード代数を用いて表現してみよう．まず便宜上 $|\omega\rangle$，$|\bar{\omega}\rangle$ を $\frac{\theta}{4}$ だけ廻した基底 $|+\rangle$，$|-\rangle$ を考えると

$$
\begin{aligned}
|h\rangle &= -\cos\tfrac{\theta}{4}\,|+\rangle + \sin\tfrac{\theta}{4}\,|-\rangle\,,\\
|\omega\rangle &= -\sin\tfrac{\theta}{4}\,|+\rangle + \cos\tfrac{\theta}{4}\,|-\rangle\,,\\
|\bar{\omega}\rangle &= \cos\tfrac{\theta}{4}\,|+\rangle + \sin\tfrac{\theta}{4}\,|-\rangle\,.
\end{aligned} \tag{49}
$$

これらを (45) でクリフォード代数のスピノルを用いて表現し，(46) でブロッホ球表現にすると

$$
\begin{aligned}
h &= \psi_h\sigma_3\psi_h^\dagger = -\sin\tfrac{\theta}{2}\sigma_1 + \cos\tfrac{\theta}{2}\sigma_3\,,\\
\omega &= \psi_\omega\sigma_3\psi_\omega^\dagger = -\sin\tfrac{\theta}{2}\sigma_1 - \cos\tfrac{\theta}{2}\sigma_3\,,\\
\bar{\omega} &= \psi_{\bar{\omega}}\sigma_3\psi_{\bar{\omega}}^\dagger = \sin\tfrac{\theta}{2}\sigma_1 + \cos\tfrac{\theta}{2}\sigma_3\,,
\end{aligned} \tag{50}
$$

となる．$|\bar{\omega}\rangle$ 軸に対する鏡映反転は $\rho \to \bar{\omega}\rho\bar{\omega}$ で，$|h\rangle$ 軸に対する鏡映反転は $\rho \to h\rho h$ であるので，グローバー回転は $G = h\bar{\omega}$ と簡潔に表現され，状態 h にこの操作を L 回加えるグローバーアルゴリスム全体が

$$
h \to h_L = (h\bar{\omega})^L h(\bar{\omega}h)^L, \tag{51}
$$

と書けることになる[11)]．

ついでマイヤーのコイン・フリップを考えよう．コインの状態をクリフォード代数的に表記すると，最初それは $\psi_0 = 1$ におかれてあり，ブロッホ表記を用いれば

$$
\rho_0 = \psi_0\sigma_3\psi_0^\dagger = \sigma_3, \tag{52}
$$

である．Q がこれに対してもっとも一般的な量子的コイン・フリップ U_1 を作用させ，対して古典的なプレイヤーが確率 p でコインを返す回転 $e^{\mathrm{i}\pi\sigma_1/2} = i\sigma_1$ を行い，確率 $(1-p)$ でそのままに置くとする．そして最後に Q が一般的回転 U_3 を行うとすれば，状態は

$$
\rho_3 = pU_3\sigma_1U_1\sigma_3U_1^\dagger\sigma_1U_3^\dagger + (1-p)U_3U_1\sigma_3U_1^\dagger U_3^\dagger, \tag{53}
$$

になる[6)]．Q の必勝法は「p によらず $\rho_3 = \sigma_3$」という条件で与えられ，これは U_1U_3 がおよび $U_3\sigma_1U_1$ が σ_3 と可換であるという条件 (35)，(37) を与える事が直ちに見て取れる．

6. 結語

本稿では量子力学を用いた情報処理の威力を，量子検索のグローバー・アルゴリスム，ならびにマイヤーのコイン・フリップ量子ゲームを例にとって紹介した．そこでは通常の古典的な二進数にかわって，二つの値をとり，かつそれを重ね合わせることもできる「量子的状態」が情報を運ぶのであった．さらにそのような量子的な情報処理が，クリフォード代数をもって簡明に表現されるという事実にも触れた．量子論の適用範囲からほど遠く，古典的な取り扱いのみで話が完結しそうな事項に対しても量子力学的定式化が有効な寄与を与え得るという意外な事実は，広い分野の科学技術者に何らかの示唆を与えるのではないだろうか．

謝辞

本稿の起草にあたってはかつての同僚であるパキスタン科学技術大学のアザール・イクバル博士との度重なる議論から多くの裨益を受けた．また首都大学東京の田中篤司博士，上智大学の高柳和雄博士からは有益な助言を多数戴いた．感謝とともにここに記しておきたい．

文　　献

1） Mermin, N. D. (2007) Quantum Computer Science: An Introduction, (Cambridge U.P., Cambridge).
2） Deutsch, D., & Jozsa, R. (1992) Rapid solutions of problems by quantum computation, *Proc. Roy. Soc. London* **A 439**, 553/558.
3） Shor, P. W. (1994) Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring, *Proc. 35th IEEE Symp. Found. Comp. Sci.* 124/134.
4） Grover, L. K. (1997) Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 325/328.
5） Meyer, D. A. (1999) Quantum strategies, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1052/1055.
6） Chappell, J. M., Iqbal, A., Lohe M. A, & von Dmekal, L. (2009) An analysis of the quantum penny flip game using geometric algebra, *J. Phys. Soc. Jpn.* **78**, 054801(4p).
7） Eisert, J., Wilkens, M., & Lewenstein, M. (1999) Quantum games and quantum strategies, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3077/3080.
8） 全卓樹 (2011) 量子ゲーム理論, シミュレーション&ゲーミング **21**, 16/26.
9） Hestenes, D. (1967) Real spinor fields, *J. Math. Phys.* **8**, 798/808.
10） Parker, R., & Doran, C. (2001) Analysis of one and two particle quantum systems using geometric algebra, *arXiv.org: quant-ph/0106055*.
11） Chappell, J. M., (2011) Quantum computing, quantum games and geometric algebra, *Ph.D. thesis, U. of Adelaide.*

［著　者　紹　介］

全（ぜん） 卓樹（たくじゅ） 君(非会員)

1980 年東京大学理学部物理学科卒業．1985 年東京大学大学院理学系研究科修了．理学博士．米国メリーランド大，同ジョージア大，法政大等を経て現在は高知工科大学教授．量子力学の数理的研究に従事．最近のテーマは「量子グラフ理論」と「量子ホロノミー」である，日本物理学会会員，米国物理学会会員．