第 1 章の発展問題

「微積分学入門 ―例題を通して学ぶ解析学―」(培風館)
補充教材 No.5

1.1. $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}$ となることを示せ．ただし, $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ で, 定義域は $(0, \pi)$ である．
注意： $\cot^{-1}x,\ \tan^{-1}x$ はそれぞれ $\cot x,\ \tan x$ の逆関数である．後者は $\arctan x$ と書かれるが, 前者を $\operatorname{arccot} x$ とは普通は書かない．)

1.2. $f(x)$ は C^2 級であるとする． $f''(a)$ が存在すれば, 次が成り立つことを示せ．

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2} = f''(a)$$

1.3. 次の関数を微分せよ．

$$(1)\quad \arctan x + \arctan\frac{1}{x} \qquad (2)\quad \arctan\left(\frac{a\sin x + b\cos x}{a\cos x - b\sin x}\right)$$

1.4. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ とする．
(1) $f^{(n)}(0) = 0$ となることを示せ．
(2) $f(x)$ は $x = 0$ のまわりにおいてテイラー展開ができないことを示せ．

1.5. C^2 級の関数 $f(x)$ が, $f'(a) = 0,\ f''(a) > 0$ をみたすならば $f(x)$ は $x = a$ で極小, $f'(a) = 0,\ f''(a) < 0$ をみたすならば $f(x)$ は $x = a$ で極大になるのであった．ここでは, $f'(a) = f''(a) = 0$ のときにどうなるかを考えてみる．
(1) C^n 級の関数 $f(x)$ に対し,

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0$$

が成り立っているとする．このとき, 次を示せ．
(i) n が偶数のとき, $f^{(n)}(a) > 0$ ならば $f(x)$ は $x = a$ で極小, $f^{(n)}(a) < 0$ ならば $f(x)$ は $x = a$ で極大である．
(ii) n が奇数のとき, $f(x)$ は $x = a$ で極値をとらない．
(2) $f(x) = x^n e^x$ が, $x = 0$ で極値をとるかどうか判定せよ．

1.6. 関数 $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ について, 次の問いに答えよ．
(1) $f(x)$ の n 階導関数を求めよ．
(2) 問題 1.5 (1) の結果を使って, $f(x)$ の極値を求めよ．

1.7. $f(x) = e^x$ の $x = 0$ におけるテーラー展開 (マクローリン展開) を利用して, e が無理数であることを示せ. 但し, $0 < e < 3$ であることは既知としてよい.

1.8. $f(x)$ は $(0, \infty)$ において定義された関数で, 2 回微分可能であるとする.
(1) 任意の x, $y > 0$ に対して, ある θ $(0 < \theta < 1)$ が存在して次の等式が成り立つことを示せ.

$$f'(x) = \frac{f(x+y) - f(x)}{y} - \frac{f''(x+\theta y)y}{2}$$

(2) さらに, $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$ かつ $f''(x)$ は有界関数であるとき、$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ となることを示せ.
(ヒント: $y = \frac{1}{x}$ として (1) を用いる.)

1.9. $(1+x)^\alpha$ のテイラー級数

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

を用いて, 次の等式を示せ.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

1.10. $f(x)$ は $|x| \leq 1$ において定義された 2 回微分可能な関数で $|f(x)| \leq 1$ および $|f''(x)| \leq 1$ を満たしている. このとき $|f'(x)| \leq 2$ が成り立つことを示せ.