

第2章の発展問題

「微積分学入門 一例題を通して学ぶ解析学」(培風館)
補充教材 No.6

2.1. 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{dx}{(x^4 - 1)^2}$$

2.2. 次の定積分を計算せよ.

$$(1) \int_0^{\pi/2} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx \quad (2) \int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{(1 - x^2)^{3/2}} dx \quad (3) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

2.3. 次の広義積分を計算せよ.

$$(1) \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx \quad (2) \int_0^1 x^{-1/2} (1 - x)^{-1/2} dx$$

2.4. 次の広義積分で定義される I_n ($n = 1, 2, \dots$) が満たす漸化式を導き, I_n を求めよ.

$$I_n = \int_1^{\infty} \frac{(\log x)^n}{x^2} dx$$

2.5. 次の広義積分は収束するが絶対収束しないことを示せ.

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

2.6. $a > 0, b > 0, ab > c > 0$ を満たす正の定数 a, b, c に対して, 広義積分

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{c-1}}{(1 + x^a)^b} dx$$

は収束することを示せ. さらにこの積分をベータ関数を使って表せ.

2.7. $t > 0$ とし, 広義積分 $I(t)$ を次で定める.

$$I(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$$

(1) 積分記号下の微分により, $I'(t) = -\frac{1}{t^2 + 1}$ を示せ.

(2) $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$ を示せ.

(ヒント: $I(t)$ の積分記号下において, 不等式 $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1$ を用いよ.)

(3) 次の広義積分を求めよ.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx$$

2.8. $R \geq 0, t > 0$ とする. そして, 以下の広義積分を考える.

$$I_R(t) = \int_R^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$$

(1) 積分記号下の微分により次の等式を示せ.

$$I'_R(t) = -e^{-Rt} \frac{\cos R + t \sin R}{t^2 + 1}$$

(2) $|I'_R(t)| \leq e^{-Rt}$ を示せ.

(3) $R > 0$ のとき, $\left| \lim_{t \rightarrow +0} I_R(t) \right| \leq \frac{1}{R}$ が成り立つことを示せ.

(4) $\lim_{t \rightarrow 0+} I_0(t) = \frac{\pi}{2}$ を示せ.

(5) 次の等式

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0+} \int_0^R e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0+} I_0(t) - \lim_{t \rightarrow 0+} I_R(t)$$

において $R \rightarrow +\infty$ とすることにより,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

を示せ.

2.9. 関数 $f(x), g(x)$ を次で定める.

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

(1) $f'(x) + g'(x) = 0$ を示せ.

(2) $f(x) + g(x) = \pi/4$ を示せ.

(3) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を示せ.

2.10. (1) $u(x)$ が区間 (c, d) 上で微分可能で $u'(x)$ も (c, d) 上で連続であるとき $c < a < b < d$ に対して

$$\int_a^b u(x) \sin(\lambda x) dx \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

となることを示せ.

(2) 関数 $\varphi(x)$ を次で定める.

$$\varphi(x) = \begin{cases} (\sin x - x)/x & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

このとき $\varphi(x)$ は $\mathbb{R}$ 全体で微分可能で $\varphi'(x)$ も連続であることを示せ. このことから

$$\int_0^\pi \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \right) \sin(\lambda x) dx \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

を示せ.

(3) 等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

を, 次の式を使って示せ.

$$\begin{aligned} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^\pi \frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right)}{t} dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \right) \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt + \int_0^\pi \frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \right) \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt + \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt \right) dt \end{aligned}$$