

積分の単調性とその応用

「微積分学入門 ―例題を通して学ぶ解析学―」(培風館)
補充教材 No.3

本文 76 ページで述べた積分の単調性について再掲しておこう.

積分の単調性

関数 $f(x), g(x)$ は区間 $[a, b]$ で積分可能で, $f(x) \leq g(x)$ ($a \leq x \leq b$) ならば,

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

が成り立つ. さらに, $f(x), g(x)$ がともに $[a, b]$ 上連続ならば, 等号は閉区間 $[a, b]$ 上で恒等的に $f(x) = g(x)$ であるときのみ成り立つ.

例題 次の不等式を示せ.

$$\frac{\pi}{4} < \int_0^1 \sqrt{1-x^4} dx < \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

解説 積分の単調性を利用して証明するのだが,

$$f(x) < \sqrt{1-x^4} < g(x), \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}, \int_0^1 g(x) dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

となるような連続関数 $f(x), g(x)$ をうまく見つけることがポイントとなる.

解答例 $0 < x < 1$ に対し, $0 < 1-x^2 < 1-x^4, 1+x^2 < 2$ より,

$$\sqrt{1-x^2} < \sqrt{1-x^4} = \sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2} < \sqrt{2}\sqrt{1-x^2}$$

が成り立つ. 関数 $\sqrt{1-x^2}$ と $\sqrt{1-x^4}$ は $[0, 1]$ 上連続であることと

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x \right) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

に注意すると, 積分の単調性から

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx < \int_0^1 \sqrt{1-x^4} dx < \int_0^1 \sqrt{2}\sqrt{1-x^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

となることが分かる.

□

問題 1 n が 2 より大きい整数のとき, 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$(1) \quad \log(1 + \sqrt{2}) < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} < 1 \quad (2) \quad \frac{1}{2} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \frac{\pi}{6}$$

問題 2 (1) 正の整数 n に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$$

(2) $s > 0$, $s \neq 1$ に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{1-s} \{(n+1)^{1-s} - 1\} < 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} < 1 + \frac{1}{1-s} (n^{1-s} - 1)$$

(3) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は $s > 1$ のとき収束し, $0 < s \leq 1$ のとき発散することを示せ. ただし次の事実は認めて使ってよい.

単調増加する数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, ある n によらない定数 M が存在して $|a_n| \leq M$ ($n = 1, 2, \dots$) となるならば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.

問題 3 $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく.

(1) 不等式 $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) を示せ.

(2) (1) と 本文の例題 2.9 で求めた I_n の値を用いて, 次の不等式を示せ.

$$\frac{1}{2n+1} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \right)^2$$

(3) **ウォリスの公式**と呼ばれる次の等式を示せ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} = \sqrt{\pi}.$$

問題 4 n を正の整数とする.

(1) $0 \leq x \leq 1$ において次の不等式が成り立つことを示せ.

$$(1-x^2)^n \leq e^{-nx^2} \leq (1+x^2)^{-n}.$$

(2) 次の積分を問題 3 の I_n を用いて表せ.

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx$$

(3) 次の広義積分を問題 3 の I_n を用いて表せ.

$$\int_0^\infty (1+x^2)^{-n} dx$$

(4) 次の不等式を示せ.

$$\sqrt{n} \int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^\infty e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} \int_0^\infty (1+x^2)^{-n} dx$$

(5) ウォリスの公式 (問題 3 (3) 参照) を用いて

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を示せ.

(ヒント : (2) では $x = \sin \theta$, (3) では $x = \tan \theta$ とおいてみよ.)

問題 5 区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x), g(x)$ について, 次が成り立つことを示せ.

$$\left\{ \int_a^b f(x)g(x) dx \right\}^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right) \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right)$$

(ヒント : 任意の実数 t に対して $\int_a^b (tf(x) + g(x))^2 dx \geq 0$ が成り立つことを利用する.)