TAKUMARO の数学雑談

TAKUMARO

1. 第一回、部分分数分解（関数論の話、大学院へ進学したキッカケ）

1.1. F 君との雑談. 最近は、本当に柔道の稽古ばかりで、全く『数学』と関わっていない。
「これは、不味いよな…」
と、感じ…少しは、『数学の記事』を書かなければと焦る。先日の夜中に、夜中といっても２３時４３分に電話があっただけなのだが、大学院時代の後輩の F 君と、K 君から連絡がきた。K 君は、今、郷里にいて、中々直ぐに会いに行く事は出来ないが、これに対して F 君は、今でも、大学院の近所に住んでいるらしい。『生存確認』も、込めて F 君の処に会いに行った。久々に F 君と話し、彼の、今住んでいるアパートにそのまま泊めてもらった。以下は、この F 君との数学雑談の中で、出てきた、数学の内容の一部である。具体的には『部分分数分解』にまつわる話である。

1.2. まえがき. 「これを誰が読むのか？」と考えた時に、僕は、正直、その読む読者のことを考えていなかった。これから、ここに出てくる内容は、数学の研究論文の如き、オリジナルな内容のものではない。なんらかの、数学の専門書には、たいていの場合その一般論まで記されている。例えば、[岸、藤本, p115–p120], [神保, p97–p99] [高木, p242–p244] 等である。僕は、これらの本を所収している。数学としての内容は、参考文献からも明らかなのだが、いわゆる『複素関数論』あるいは、『関数論』の中に含まれる『部分分数分解』にまつわる話である。上記に挙げた、参考文献とそのページにはその、一般論が記されている。これから話す内容は、この一般論の中に含まれる特殊な、あるいは、特別なものの話になる。『複素関数論』あるいは『関数論』を知らない人はその数学的な理屈はさっぱりかもしれない。ただ、以下に、出てくる具体例で、確かにそういう事実が成立するということが（感情としても）確かめられるし、これから、話す数学的事実 (定理 1.1 や定理 1.4) は、確かに人を惹きつける物だと、個人的には思っているのである。少なくとも、僕は、これから、話す内容のことに、確かに惹きつけられた。大学時代に個人的に気付いた内容になる。だから、数学専攻で大学院へ進学するというキチガイみたいなことをしたのである。定理 1.1 は定理 1.4 に含まれている内容なので、定理 1.4 から、僕が惹きつけられた式 (1.2) を紹介します。多くの人と、共感出来ればな…それだけです。

$$\phi(z) := \frac{g(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{Res(\phi, a_k)}{z - a_k} \tag{1.2}$$

著者 (ハンドル名):takumaro 住所：埼玉県 春日部市 永沼 159-3 郵便番号 344-0123.

分野、キーワード、等々: 複素関数論、部分分数分解、零点、極、ローラン展開、主要部、留数、正則.

Date: http://researchmap.jp/takumaro/.

Date: 2015.10.13. K 君との数学雑談から.

1.3. **部分分数分解、とその具体例.** F 君との話で、どういう話が出てきたのか？これからどういう話をするのか？具体例で説明します。例えば、

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = (-1) \times \frac{1}{z-1} + (1) \times \frac{1}{z-2} \tag{1}$$

この上記数式の左辺から右辺への変形が『部分分数分解』になります。検算は右辺から左辺を導く事になります。具体例は全部で６つ出てくるのでそれらで確かめてみてください。上の例だと、まだ解りづらい…念のために係数部分に（）をつけた。さらに、

$$\frac{1}{(z-2)(z-4)} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{z-2} + \left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{z-4} \tag{2}$$

となる。『係数部分に（）をつけた』意義が解ると、一気に何かが見えてくる。勿論、関数論を知っていればの話なのだが…上の２つの例は、分母の多項式が２次の場合だったが、別に何次式でも構わない。例えば、分母の多項式が３次式の例だと

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{z-1} + (-1) \times \frac{1}{z-2} + \left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{z-2} \tag{3}$$

になる。「本当か？」と感じた方は検算してみて下さい。さらには分母が４次式の例だと

$$\frac{1}{(z+1)z(z-1)(z-2)} = \left(-\frac{1}{6}\right) \times \frac{1}{z+1} + \left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{z} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{z-1} + \left(\frac{1}{6}\right) \times \frac{1}{z-2} \tag{4}$$

見たいな感じになる。

『係数部分に（）をつけた』意義、これが何を意味していたのかというと、これが実は**留数**その物であった。という、オチになります。(1), (2), (3), (4), と具体例を４つも上げましたが、具体的にこれらを定理として記述すると、以下のようになります。

定理 1.1. 多項式 $f(z)$ を

$$f(z) := (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)\cdots(z-a_n)$$

と、取ります。但し $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ は、互いに異なる複素数とします。つまりは a_k は $f(z)$ の１位の零点です。そして、この $f(z)$ を用いて有理関数 $\phi(z)$ を

$$\phi(z) := \frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)\cdots(z-a_n)}$$

のように取ります。すると、$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ は有理関数 $\phi(z)$ のそれぞれ一位の**極**になります。すると、この有理関数 $\phi(z)$ の極 a_k に対して**留数** $Res(\phi, a_k)$ が以下のように取れます。

$$Res(\phi, a_k) = \lim_{z \to a_k} (z-a_k)\phi(z), \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

この**留数** $Res(\phi, a_k)$ を用いて、有理関数 $\phi(z)$ が以下のように、**部分分数分解**出来ます。

$$\phi(z) := \frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)\cdots(z-a_n)} = \sum_{k=1}^{n} Res(\phi, a_k) \frac{1}{z-a_k} \tag{1.1}$$

大学時代に関数論、実際には、『複素解析学及び演習』で学んでいて、僕自身が観て
「…綺麗だような…」
と感じた関係式 (1.1) です。この、『綺麗』と感じたのは僕の主観です。どういうキッカケで、気付いたのかは覚えていないのですが、関数論を用いて得られる事実の１つです。先に、挙げた具体例の (3) を用いて、関係式 (1.1) と照らし合わせます。

例 1.2. 有理関数 $\phi(z)$ を

$$\phi(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

とします。すると、留数はそれぞれ、

$$Res(\phi, 1) = \frac{1}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}, \qquad Res(\phi, 2) = \frac{1}{(2-1)(2-3)} = -1,$$
$$Res(\phi, 3) = \frac{1}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2},$$

なので、(1.1) を用いて

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{z-1} + (-1) \times \frac{1}{z-2} + \left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{z-2} \tag{3}$$

と得られます。

『本当なのか？』
と感じた人のために、(1)〜(4) で検証するのも良いですが、試しに、以下でも試してみてください。

問題 1.3. 以下の有理関数を部分分数分解してみよう。

$$\frac{1}{(z+1)(z-3)} \qquad \frac{1}{(z+1)(z-2)(z-3)} \qquad \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)(z-5)}$$

1.4. **さらに一歩進んで⋯.** 多項式 $f(z)$ を

$$f(z) := (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)\cdots(z-a_n)$$

と取り（但し $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ は、互いに異なる複素数とします。つまりは a_k は $f(z)$ の 1 位の零点です。）そして、この $f(z)$ を用いて有理関数 $\phi(z)$ を

$$\phi(z) := \frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)\cdots(z-a_n)} = \frac{1}{f(z)}$$

としての有理関数 $\phi(z)$ の部分分数分解が、それぞれ a_k における留数を用いて与えられることを紹介しました。話を紹介するのにあたり簡単のために、分子の多項式を 1 に取りました。ですが、実は、同じ記述が、分子に多項式がある場合でも成立します。

定理 1.4. 多項式 $f(z)$ を

$$f(z) := (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)\cdots(z-a_n)$$

と、取ります。但し $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ は、互いに異なる複素数とします。つまりは a_k は $f(z)$ の 1 位の零点です。そして、多項式 $g(z)$ も新たに取ります。但し、この $g(z)$ は次数が $f(z)$ より小さく、また $f(z)$ との共通零点を持たないとします。このときに、この $f(z)$ と $g(z)$ を用いて有理関数 $\phi(z)$ を

$$\phi(z) := \frac{g(z)}{f(z)} = \frac{g(z)}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)\cdots(z-a_n)}$$

のように定義します。すると、$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ は有理関数 $\phi(z)$ のそれぞれ一位の**極**になります。すると、この有理関数 $\phi(z)$ の極 a_k に対して**留数** $Res(\phi, a_k)$ が以下のように取れます。

$$Res(\phi, a_k) = \lim_{z\to a_k}(z-a_k)\phi(z), \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

この**留数** $Res(\phi, a_k)$ を用いて、有理関数 $\phi(z)$ が以下のように、**部分分数分解**出来ます。

$$\phi(z) := \frac{g(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} Res(\phi, a_k)\frac{1}{z-a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{Res(\phi, a_k)}{z-a_k} \tag{1.2}$$

例 1.5. 有理関数 $\phi(z)$ を

$$\phi(z) = \frac{2z-1}{(z-1)(z-2)}$$

とします。すると、留数はそれぞれ、

$$Res(\phi, 1) = \frac{2-1}{1-2} = -1, \quad Res(\phi, 2) = \frac{4-1}{2-1} = 3,$$

なので、(1.2) を用いて

$$\frac{2z-1}{(z-1)(z-2)} = (-1)\times\frac{1}{z-1} + (3)\times\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{z-1} + \frac{3}{z-2}$$

と得られます。

例 1.6. 有理関数 $\phi(z)$ を

$$\phi(z) = \frac{(z+1)(z+2)}{z(z-1)(z-2)}$$

とします。すると、留数はそれぞれ、

$$Res(\phi, 0) = \frac{1 \times 2}{(-1) \times (-2)} = 1, \quad Res(\phi, 1) = \frac{(1+1) \times (1+2)}{1 \times (1-2)} = -6,$$
$$Res(\phi, 2) = \frac{(2+1) \times (2+2)}{2 \times (2-1)} = 6,$$

なので、(1.2) を用いて

$$\frac{(z+1)(z+2)}{z(z-1)(z-2)} = (1) \times \frac{1}{z} + (-6) \times \frac{1}{z-1} + (6) \times \frac{1}{z-2}$$
$$= \frac{1}{z} + \frac{(-6)}{z-1} + \frac{6}{z-2}$$

と得られます。

1.5. **部分分数分解が与えられる数学的な理由.** 複素関数論を用いて、説明をしたいと思います。

> 以下は [岸、藤本, p115–p120], [神保, p97–p99] [高木, p242–p244] 等を参照、参考にして著者 takumaro が整理した内容です。無限遠点 $z = \infty$ を含んだ議論や、分母、分子の多項式次数の制限を外した一般論については改めてこれら上記を参照、参考にして下さい。

今、多項式 $f(z)$ と $g(z)$（但し、多項式の次数は $f(z)$ の方が大きい、つまり、$\deg f > \deg g$ という条件の下で）を用いて、有理関数 $\phi(z)$ を

$$\phi(z) := \frac{g(z)}{f(z)}$$

を考えます。この時に、この有理関数 $\phi(z)$ が $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ をそれぞれ極に持つと仮定します（つまりは $f(z)$ の零点）。このそれぞれの極に対するローラン展開したときの主要部を

$$P(a_j, z) \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

と置きます。そして、新たに有理関数 $\psi(z)$ を、有理関数 $\phi(z)$ から、その考えられる主要部を全て引き算したものとして、考えます。

$$\psi(z) := \phi(z) - \sum_{k=1}^{n} P(a_j, z) \tag{1.3}$$

このような、(1.3) なる有理関数 $\psi(z)$ を考えるのが、妙技なんですが、（具体的な関数を構成するのに、このような、これに近い操作をよく見かけます。）結局、有理関数 $\psi(z)$ は、その作り方（1.3）から $\mathbf{C}$ 上で正則な関数になります。そして、$z \to \infty$ のとき、有理関数 $\phi(z)$ や、その主要部 $P(a_j, z)$ は

$$\phi(z) \to 0, \qquad P(a_j, z) \to 0 \qquad (z \to \infty)$$

になる事と、有界な整関数は定数関数である（Liouville の定理）という事実を用いて、$\psi(z) = 0$ が得られます。これより有理関数 $\phi(z)$ が、

$$\phi(z) = \sum_{k=1}^{n} P(a_j, z) \tag{1.4}$$

となり、有理関数 $\phi(z)$ が、その主要部の総和で表記できる。という事がえられます。

以上が、有理関数を部分分数分解するという事の一般論の一部分（有理関数 $\phi(z)$ が $z=\infty$ で正則で $z \to \infty$ のとき、有理関数 $\phi(z) \to 0$ な場合）になります。この、記事で扱っている部分分数分解の数学的な本質は、(1.4) に集約されます。さらに、この記事の定理 1.1 や定理 1.4 には

(1) 有理関数を構成する分母の多項式の次数の方が、分子の多項式の次数より大きい。
(2) 分母と分子の多項式は共通零点を持たない。
(3) 有理関数の極、つまり、分母の多項式 $f(z)$ の零点は、全てその位数は１位である。

という条件が入っています。特に、この条件 (3) から、改めてその主要部 $P(a_j, z)$ は、極の位数が１位である事と、留数がローラン展開で現れる場所を考えることにより

$$P(a_j, z) = \frac{Res(\phi, a_j)}{z - a_j} \tag{1.5}$$

となります。これを (1.4) に適応して、この記事の定理 1.4 の主張に相当する（定理 1.4 は定理 1.1 を含んでいます。）

$$\phi(z) := \frac{g(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{Res(\phi, a_k)}{z - a_k} \tag{1.2}$$

が得られます。

1.6. **高木貞治「解析概論」と比較して** [高木, p242–p244]. 実は、この記事の定理 1.4 に関するその物が、高木貞治「解析概論」にあります。条件は定理 1.4 と一緒です。そこには、どう書いてあるかというと、

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{g(a_k)}{f'(a_k)} \frac{1}{z - a_k} \tag{1.6}$$

とあります。（厳密には「解析概論」では分母の多項式を $\psi(z)$ 分子の多項式を $\phi(z)$ として有理関数を $f(z)$ と置いて議論しています。）つまり、この記事の (1.2) と (1.6) は同じ物になります。さらに具体的には、つまり、

$$Res(\phi, a_k) = \frac{g(a_k)}{f'(a_k)} \tag{1.7}$$

が成立する。という事になります。実際に a_k は $f(z)$ の零点だという事を用いて

$$Res(\phi, a_k) = \lim_{z \to a_k} (z - a_k)\phi(z) = \lim_{z \to a_k} (z - a_k)\frac{g(z)}{f(z)} = \lim_{z \to a_k} = \frac{g(z)}{\frac{f(z) - f(a_k)}{z - a_k}} = \frac{g(a_k)}{f'(a_k)}$$

となり確かに (1.7) が成立します。

1.7. **あとがき.** 「解析概論」には [高木, p244] に (1.6) が表記されていて、**『Lagrange の補間式』**として紹介されています。（大学院時代に N さんが僕に教えてくれました。）また、この (1.6) は『複素関数論』を知らなくても、有理関数の部分分数分解を与える公式になっています。成程な、『複素関数論』を知らない人にとっての、部分分数分解を与える公式を提示するならば、(1.6) の方が見やすいし解りやすいのだろうな…ただ、僕個人が、最初に出会った式は、(1.2) でした。ここで、読者に質問なんですが、

『(1.2) と (1.6) を比較したときに、どちらが、あなたにとっての数学的に魅了されますか？』

僕は、こうして比較しても、やはり、(1.2) に魅せられます。自身が、『複素関数論』を学んでいく過程で気付いた事実という経験もあるからなのかもしれませんが、ただ、不思議ですよね。(1.2) と (1.6) を両方を見ていて、同じものを見ているはずなのに、僕個人の中で、まるで違うものを見ている位の意識差があります。街を歩いていて、よく見かける

「後姿美人！」

と同じ感覚です。(公平性を保つために、男女を問いません。また、この『美人』という形容には多分に見ている人の主観が入ります。) そもそも、(1.2) や (1.6) にしても特殊な場合を眺めています。特殊な場合だからこそ、僕は魅せられているのだろうな…とも思います。

最後に、実際の F 君との数学雑談では、さらに一歩進んで、この記事の定理 1.4 を用いて、さらに上手い有理関数 $\phi(z)$ を取る事に依ってゼータ関数 $\zeta(z)$ の特殊値（に相当する）の計算例を見せてくれました。F 君との数学雑談のメインの内容は、ゼータ関数 $\zeta(z)$ の特殊値（に相当する）の計算例で、計算方法のいくつかを僕に見せてくれました。たまたま、話を聞いていたら定理 1.4 の話が出てきて、僕自身の大学４年から大学院時代１年目の頃を思い出した次第です。そして、定理 1.4 をメインにして、記事を書いてみた次第です。有理関数 $\phi(z)$ のローラン展開や、その主要部を考えて、有理関数 $\phi(z)$ が１位の極しか持たないときに、それぞれの極 a_k に対する留数 $Res(\phi, a_k)$ を用いて、有理関数 $\phi(z)$ が以下 (1.2) のように部分分数分解される。綺麗だと思いませんか？

$$\phi(z) := \frac{g(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{Res(\phi, a_k)}{z - a_k} \tag{1.2}$$

また、次回、お会いしましょう。

References

[岸、藤本] 岸　正倫　藤本　坦孝：「複素関数論」　学術図書出版社　(1994).
[神保] 神保　道夫：「複素関数入門」　岩波書店　(2006).
[高木] 高木　貞治：「解析概論、改訂第三版、軽装版」　岩波書店　(1996).

著者 (ハンドル名):TAKUMARO

本名：小川 琢磨 (Takuma Ogawa)

住所：埼玉県 春日部市 永沼 159-3 郵便番号 344-0123
E-mail address: takumaro_math1@mopera.net