

歴史の中のクォータニオン

石倉和佳

兵庫県立大学 環境人間学部

Quaternions in a Historical Context

Waka Ishikura

School of Human Science and Environment, University of Hyogo

Abstract This paper examines Hamilton's idea of quaternions in its biographical and historical contexts, in order to show that his passion for the theory of quaternions involved poetic and philosophical implications. As a pure mathematical system of calculation, quaternions may be useful even if they are divided into vector and scalar, yet for Hamilton, the theory of quaternions might be inclusive of the "mathesis" of the universe, therefore itself a complete theory; sometimes he compared it with a poetic flower of a great poet of the age, or imagined it to be developed into an electro-magnetic physical theory, or a mathematical theory of space and time expressive of four-dimensions.

現在のことではない、少し昔の話である。数学者や科学者の伝記がよく読まれた。ウィリアム・ロウアン・ハミルトン(Sir William Rowan Hamilton, 1805-65)もその例にもれず、数学者列伝の中で語られた。「酒と紙クズに埋もれて暮らした」「黙示的な解説不能な数学の断片を書き続ける」数学者—「そのロマネスクがハミルトンなのだ」といった具合である [1]。数学者に対するデカダンスなイメージは、知性へのあこがれも喚起しながら読者の興味をそそるが、このようなイメージは必ずしもハミルトン自身と重なるわけではない。とはいえハミルトンはどこかロマンティックな物語性と親和性があるのも確かである。E. T. ベルはハミルトンの人生を「アイルランドの悲劇」と称した [2]。S. L. オルトマンは、クォータニオン(quaternions、四元数)からは19世紀の頹廢の気配がにじみ出ていると評した [3]。彼の人生の中で大きな位置をしめたクォータニオンの発見は1843年のことである。それから亡くなるまではクォータニオンに明け暮れる日々となったが、そのせいで才能を無駄に浪費したと嘆くのは、ひとりベルだけではない。

クォータニオンが難解な真理への扉であるとして、その発見者ハミルトンはその扉の前で酔いどれていた—これもハミルトンの伝記によくあるイメージである。ハミルトンは中年を過ぎて酒量が多くなっていったようで、体面を重んじる当時の社会ではことさらにそのことをスキャンダラスに語った節がある。記録に残っている限りにおいて、公式の場で酒に崩れたのは一度だけである。(ただしその一度だけがかかなり問題になった。) アル中になったとまで言われた一つには、亡くなった時の部屋の散乱がひどかったことがある。肉片や酒瓶がそのあたりに散らかっていたとのことであるが、ハミルトンにとって仕事部屋は聖域であり、誰にも一指もふれさせなかった。つまり誰にも掃除ができなかったというのが本当のところだった。彼の想念

は天空を舞いながら、机の上には紙の束が大量に乱雑に置かれ、しかも本人はその紙の束の位置が少しでも違っていたら雷を落とすというのであるからどうしようもない[4]。ハミルトン畢竟の大作、『四元数講義』(*Lectures on Quaternions*, 1853) と、『四元数原論』(*Elements of Quaternions*, 1866) を手に取る人も殆どいなくなってからかなりの年月が経つだろう。しかし彼は真剣にこれらの本が、言葉や本がこの世から消滅しても残るもの、つまりこれらの本に示されたものはすべてが滅びても真理として残るものだと考えていた。それでは、不可解な数学と数学者の確信との間にあるものは何か—そのヒントは詩と哲学が与えてくれる。

ハミルトンは若い頃詩を書き、詩人のワーズワス(William Wordsworth, 1770-1850)に詩を送って講評をもらったりしている。一生詩人として詩集を発表することなどなかったハミルトンであるが、詩は晩年まで書き続けた。1832年にトリニティカレッジで行った天文学講義には、数々の詩を引用しているが、最後はジョン・ミルトン(John Milton, 1608-74)の『リシダス』(*Lycidas*) から「誉れとは現世の土に生える草にあらず」と引いて締めくくっている。ある時は、『四元数講義』と当代一の詩人テニソン(Alfred Tennyson, 1809-92)の詩とを比べ、テニソンに自分の本を贈呈したいと言い出して、友人に引き留められたりしている。ハミルトンにとって数学的真理と詩的真理は共鳴し合っていた。このことは、ハミルトンがベクトルとスカラーに分解できる超複素数体系を「クォータニオン=四つで一つの組」と命名したことにもおそらく影響している。

1843年10月16日月曜日、ハミルトンがクォータニオンを発見した日のことは、おそらく数学史の中でもっともよく知られた話の一つだろう。なぜそれほどよく知られているのか。それはハミルトン自身がその発見物語を手紙で何人もの人々に語

ってやまなかったからである。それは後の伝記作者に引用され、読まれることになった。アイルランド王立アカデミーの会長だった彼は、いつものようにダンシンク天文台のある小高い丘の上から、ダブリン市内に向かって歩いていた。ブルーム橋のもとに来たとき、電流に打たれたように彼の頭にひらめきが走り、思わず橋の石に

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

と彫り付けた。この話にはよくハミルトンの妻ヘレンが連れ添っていたように語られるが、実際には彼女はたまたま馬車で通りかかっただけのようである。橋のもとにいる挙動不審な夫を見つけて心配になったのかもしれない。ともあれそのようなことをして時間が無くなったせいか、ハミルトンはそれから馬車に乗り、本当に成り立つものなのか計算を続け、その日行われた会議の間も会長の椅子に座りながら計算を続け、夕方には確信をもってアカデミーの議事予定帳に、次回の会合で「クォータニオンの理論に関する新しい虚数についての発表を行う」と書き付けた。

クォータニオン (quaternion) は14世紀ごろから使用されている語であるが、ハミルトンも書いているように、聖書にも17世紀イギリスの詩人、ジョン・ミルトンの作品にもその使用例がある。ミルトンの『失樂園』第五巻におけるこの語の使用は、ハミルトンがクォータニオンにどのような意を見ていたかをおそらく最も示してくれるものだろう。「大気よ、自然の胎から一番初めに生まれた諸元素よ、四重に、絶え間ない円環をもって多様な形でめぐるものよ」、というミルトンの詩行には、プラトンの『ティマイオス』に描かれた、四大元素(地、水、火、風)が諸物を生成するという考え方が読み取れるのと同時に、ピタゴラス学派による数の哲学も影響している[5]。英語の“quaternion”はピタゴラスの言う“tetractys”と同義で用いられることがあったが、この場合4つ組とは、1, 2, 3, 4の数字4つが一つの組になっているという意と1+2+3+4で全体10であり、その全体は一つあるという意が重なっている。この哲学においては、すべての数の始まりは一であり、一に先立つものはなく、それは宇宙全体を指すものでもあった[6]。

クォータニオン＝四つ組は、よく複素数の複素数と説明されるが、そのように分割できるものではなく、全体で一つという意が先行していなければいけないと考えれば、ハミルトンのクォータニオンへの取り組み方も理解できるかもしれない。彼のクォータニオンに関する論考には、どこか数学的な計算方法について考える次元を超えてしまっているような印象のある部分もあるからである。そのような論考について、数学史や科学史で取り上げられることはまずない。しかしハミルトンが生涯の間に残した膨大な量の手紙には、さまざまなクォータニオンに関する思考実験の跡を見ることができる。家族ぐるみのよい友人であったド・モルガン(Augustus De Morgan, 1806-1871)との往復書簡には、クォータニオンに関する記述も多く見られる。ド・モルガンに宛てて、ハミルトンがクォータニオンをハムレットになぞらえて、その計算法を自然現象になんとか応用でき

ないかという考えが亡霊になって自分にずっと取りついていたと書けば、ド・モルガンは「クォータニオンの計算法は計算法だよ、空論には関わるべきでないね」と冷めたコメントを返している。ハミルトンは「電磁気四元数」(“electro-magnetic quaternion”)のアイデアについても一時熱が入っていた。電気と磁気の二種の二つの極とクォータニオンとのアナロジーを考えていたのである。これについては学会で会ったマイケル・ファラデー(Michel Faraday, 1791-1867)と話をし、ド・モルガンには興奮した手紙を書いているが、さすがのド・モルガンも手をつけられないと思ったのか、しばらくしてから、近況を訊ねながら「クォータニオンが君の全てではないよ」とどこか論ずるように書いている。ハミルトンはクォータニオンを「空間足す時間」と説明したりもしているが、それは彼が、クォータニオンは空間の科学である幾何学と時間の科学である代数学との双方に関わるものであると考えていたからである。

クォータニオンがハミルトンの心の全てを占めるものであるとすれば、それはハミルトンにとって真理を告げる一種の詩でもあったからかもしれない。ハミルトンが死去したとき、ド・モルガンは追悼文を書いた。その中で、ハミルトンが常日頃から、「僕は数学で生活しているが、僕自身は詩人なんだ」と言っていたというエピソードを紹介している。ド・モルガン曰く—「このような警句は読者を驚かせるかもしれない。しかし心に留めておくべきことは、数学的発明を生み出す力は、理性の力ではなく想像力だということだ。いまではもはや「詩人」(poet)を字義どおり訳して、飾らない言葉で「作り出す人」(maker)とすることはなくなったが、発見者というのはどのような人でも、「作り出す人」であり、創造的な天才なのである」[7]。

【参考文献】

- [1] 『百人の数学者 古代ギリシャから現代まで』数学セミナー増刊号 日本評論社 1989年
- [2] E. T. Bell. *Men of Mathematics: The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincare*. 1937; New York: Simon & Schuster, 1965.
- [3] Simon Altmann. *Rotations, Quaternions, and Double Groups*. Oxford: Clarendon Press, 1986.
- [4] ハミルトンの書簡、伝記的事実については、現在まで次の二つが基本文献である。Robert Percival Graves. *Life of Sir William Rowan Hamilton*. 3vols. 1882-89; New York: Arno Press, 1975. および Thomas L. Hankins. *Sir William Rowan Hamilton*. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1980.
- [5] John Milton. *Paradise Lost*. Ed. Alastair Fowler. London: Longman, 1968.
- [6] J. A. Philip. *Pythagoras and Early Pythagoreanism*. Toronto: University of Toronto Press, 1966.
- [7] Augustus De Morgan. “Sir W. R. Hamilton.” *The Gentleman's Magazine*. 1 (new series) (1866): 128-34.