

交絡変数の測定誤差が合流点バイアスをもたらす影響について (2) : 複数の交絡変数への拡張

樊怡舟・中尾走・村澤昌崇

RIHE Advancement of Higher Education Research

Monograph Series

No.6

交絡変数の測定誤差が合流点バイアスをもたらす影響について (2) :

複数の交絡変数への拡張

[要約]

本稿は、複数の交絡変数が考えられるモデルに対して、系統誤差が入っている代理指標を統制することによって、推定値がいかに変化するかについて検討することを目的とする。ただし、中尾ほか (2022) が提示した交絡が一つ存在するモデルより、複数の交絡が存在している場合に、交絡間の因果関係が考えられるため、**a-bias** (何も統制しない時の処置効果推定値) と **p-bias** (代理指標を統制した時の処置効果の推定値) の計算が非常に複雑になる。本稿は交絡変数行列の主成分を取り、 $A \rightarrow Y$ の因果効果の推定における等価的なモデルを作り上げることによって上記の難点を克服した。結論として、複数の交絡変数が存在する場合の **p-bias** は、四つの部分から構成されていることが分かった。各構成要素の意味合いから、**p-bias** は脱落変数バイアスの部分的統制、代理指標における系統誤差が引き起こす合流点バイアス、そして処置 A が代理指標によって説明されることが起因する Z バイアスと関連していることが明らかになった。そのうえで、代理指標における系統誤差の大きさと **p-bias** の増減の関係を確認したところ、**p-bias** の挙動は中尾ほか (2022) が示した交絡変数が一つの場合と異なり、系統誤差が全く入っていないという時の漸近値が他の条件によって決まることが明らかになった。つまり、複数の交絡変数が存在する場合に、極端な条件下では、無限に系統誤差を排除したとしても、代理指標の統制が、何も統制しない時の **a-bias** より激しいバイアスを引き起こす可能性が考えられる。

[キーワード]

測定誤差, 合流点バイアス, 部分的統制, 因果推論

1 序論

本研究は、直接、測定不可能な交絡変数が複数存在する場合に、それら交絡変数を一つの代理指標を用いて統制することによって、因果効果の推定にどのようなバイアスが生じるのかについて検討する。

中尾ほか (2022) では、交絡変数が一つの場合に限定して、交絡変数の代理指標 (**proxy variable**) が合流点バイアスを引き起こす場合のバイアスの挙動を明らかにしている。しかしながら、現実の観察データを用いた因果推論では、交絡変数が複数あることが一般的であろう。そのため、本稿では、中尾ほか (2022) を拡張し、複数の交絡変数を統制するという文脈を想定し、それらの交絡変数の代理指標が合流点バイアスをもたらす場合のバイアスの挙動について明らかにする。交絡変数が複数且つプロキシの合流点バイアス問題も生じるケースとは、具体的にはどのような状態だろうか。ここでは一例として、通塾と大学進学との関係を取り上げてみよう。この例の場合、以下の図 1 のような状態が考えられる。このように、通塾が大学進学にもたらす効果を推定する際に、これまでの社会学や経済学の研究成果一般を踏まえると、常識的には交絡変数としてすくなくとも経済資本と文化資本など、社会経済的地位 (**Social economics status : SES**) に相当する変数が複数想定で

きる。しかも二つの交絡変数間もまた独立しておらず、互いに関係性が生じていると考えられる（図1ではとりあえず経済資本から文化資本に矢印を引いている）。

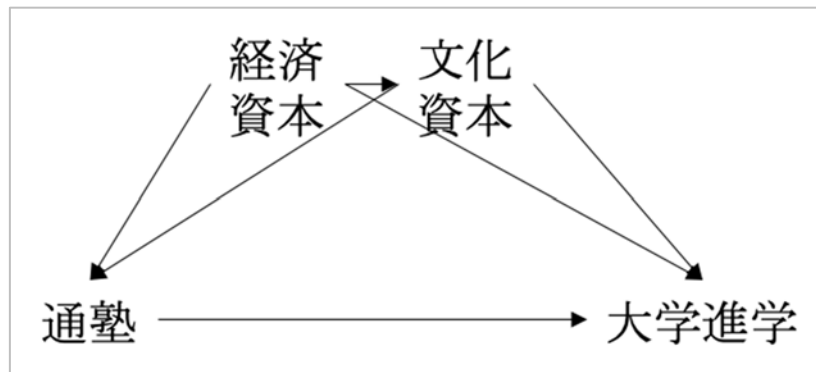


図1 交絡変数が二つの場合の因果推論の例

この場合、文化資本と経済資本を同時に統制しなければ、欠落変数バイアス（Omitted Variable Bias, 以下 OVB）が発生するため、統制しなければならない。しかし、文化資本も経済資本も完全には測定できない構成概念であるため、「本の数」や「親の職業」、「親の年収」「親の学歴」「暮らしむき」など、SES に関連する何らかの代理指標を用いた部分的統制（partial control）しかできない。その際に、代理指標としての望ましさは、文化資本や経済資本と強い相関を持つことが条件の一つとして挙げられる。但し、SES に関連する何らかの代理指標を調査する場合、日本の調査では、家庭の SES を親から直接測るのではなく、子ども（本人）に親（本人の親）の SES を間接的に尋ねるといった代理回答が多かった（平沢 2015）。そのため、偶然誤差のほかに系統誤差も伴い（白川 2021）、その要因として虚偽・誤回答、記憶の曖昧さなどが考えられる（もちろん「文化資本」に「経済資本」という変数も影響を及ぼしていると考えられる）。つまり、子の代理回答によって得られた「暮らしむき」という SES の代理指標は、以下の式のような系統誤差 u と偶然誤差 e によって引き起こされていることが想定されるのである。これを式で示すと以下の通りとなる。なお、本式において x は測定された変数を示し、 x^* は文化資本の真値、そして z は経済資本を示している。

$$x = ax^* + \beta z + u + e$$

本式における系統誤差 u は、同時に結果変数 Y にも影響を及ぼしていると仮定すると、以下の図2のような有向非巡回グラフ（Directed Acyclic Graph : DAG）が想定される。

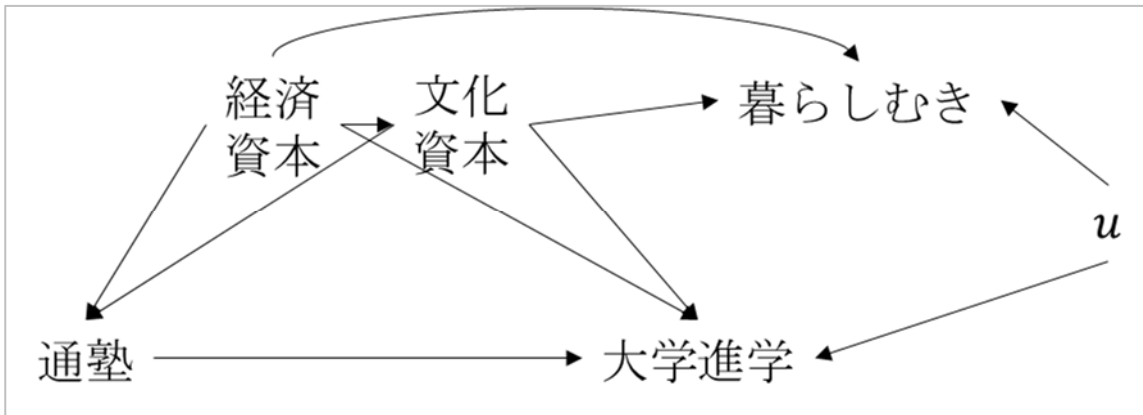


図2 想定される DAG

もし U が存在していなければ、代理指標の暮らしむきを統制することで、測定不可能な交絡変数によって生じる OVB が部分的に統制 (partial control) され、不完全統制ではあるが、処置効果の推定値が真の因果効果に近づいていく (Elwert and Winship 2014). そのため、仮に代理指標であったとしても、暮らしむきを統制することが基本的には推奨される¹⁾. しかしながら、図2の場合、 U の存在によって、暮らしむきを統制することで、 $U \rightarrow$ 暮らしむき \leftarrow 文化資本というバックドアパスが開き、即ち合流点バイアス (collider bias) が生じることになる (林・黒木 2016 ; 黒木 2017). つまり、図2のような場合、暮らしむきを統制することで、SES による OVB を部分的に統制することができる反面、同時に U の存在により新しいバックドアパスが開くことにもなる. その場合、代理指標を統制した時の推定バイアス (以下は p -bias) は、OVB と合流点バイアスとのトレードオフの結果となり、必ずしも代理指標の統制がより精度の高い推定につながるわけではないことが知られている (中尾ほか 2022).

これまで、中尾ほか (2022) を含め、交絡変数の部分的統制の問題は、Ogburn and VanderWeele (2012), Miao et al. (2017), Elwert and Pfeffer (2019) などに取り上げている. しかしながら、いずれの先行研究も交絡変数は一つであり、複数の交絡変数の場合に言及されているわけではない. 図2におけるトレードオフ問題のあり方を理解するために、中尾ほか (2022) を発展させ、複数の交絡変数の存在をも組み込みんだ、現実の問題に寄り添えるようなモデルの拡張と一般化が必要である.

そこで、本研究は、交絡変数が複数ある場合に、代理指標を統制することによって生じるバイアスの変動について検討することとする. 以下、2 節では、本稿の研究課題の難点とその対処方法を示した上で、そのような方法によって計算される a -bias を定式化する. 続く、3 節では 2 節の想定のもと、 p -bias を定式化し、 p -bias を構成する要素について解釈を行っていく. 4 節では、2 節、3 節で定式化したモデルに基づいて、 p -bias の挙動を明らかにする. 最後に、5 節では、まとめと今後の課題を提示する.

2 モデル化のための事前設定

2.1 モデル化の難点と本稿の方法

中尾ほか (2022) とは異なり、交絡変数が複数ある場合の難点は、交絡変数間の関係性を考慮しなければならない点である. 特に、交絡変数間に因果関係が想定される場合、交

絡変数と処置変数との相関の計算はかなり複雑な場合分けが必要となる。その影響により、p-biasに加え、未統制の交絡変数間が複雑に影響し合う際の OVB (a-bias) の計算自体も難しくなる。

交絡変数が複数存在するが、互いに相関関係がないという場合であれば、上記の難点がなくなる。つまり、交絡変数間が複雑に影響し合うという真のモデルに対して、交絡変数間が互いに独立し、 $A \rightarrow Y$ という因果効果の推定には全く影響を与えない等価的なモデルを想定することが問題解決の鍵となる。このような等価的モデルの想定に対して、本稿では真の交絡変数の主成分を取り（即ち真の交絡変数の分散共分散行列に対する固有値分解を行う）、その主成分行列を操作的に交絡変数行列として認識するという方法をとる。なぜなら、そうして取った主成分（即ち操作的に認識した交絡変数行列の各次元）は交絡変数の真値のセットの直交基底となるので、互いに相関がないからである。

2.2 直交化変換と a-bias の計算

前提として、 $A \rightarrow Y$ の因果効果の推定に対して、 r 個の測定不可能且つ互いに絡み合う交絡要因が存在しており、そのモデルに関してサンプルサイズが n のデータを取得していると想定する。交絡変数を並べた行列を C とすると、互いに影響し合うことで、 C の分散共分散行列 Σ_C が対角行列ではない。

この場合、主成分得点の算出は、即ち C の分散共分散行列の対角化を行うことである。交絡変数間の関係についてはひとまず保留し、処置変数と結果変数の生成プロセスは以下の数式①に従うことが分かる。また、簡単化を期すために、式①のすべてのパラメータが正であると仮定する。

$$\begin{cases} A = C\beta_A + U_A \\ Y = C\beta_Y + A\beta + U_Y \end{cases} \quad \text{①}$$

C は、 $n \times r$ になる潜在的交絡行列であり、 β_A と β_Y はいずれも $r \times 1$ のベクトルで、交絡変数からそれぞれ A と Y を生成する際の係数が並んでいる。 β は Y という結果変数に対しての A という処置の因果効果である。

上記のモデルに対して、交絡行列 C に対して、 r 次元の主成分まで抽出しその主成分得点を並べる。そうすると、 $n \times r$ になる交絡主成分行列 Q^* が得られる。 C と Q^* との関係については、次のように表記することとする。

$$\begin{aligned} Q^* &= C \cdot \text{pca}(C) \\ \Rightarrow C &= Q^* \cdot \text{pca}(C)^{-1} \end{aligned}$$

($\text{pca}(C)$ は形が $r \times r$ にある C の主成分係数行列。)

そのうえで、 Q^* を用いて式①を書き換えると、交絡変数間が影響し合っていない等価的なモデル②ができる。

$$\begin{cases} A = Q^*\beta_A^* + U_A \\ Y = Q^*\beta_Y^* + A\beta + U_Y \end{cases} \quad \text{②}$$

モデル①とモデル②の等価性を保つため、係数行列 β_A^* と β_Y^* は次の式を満たすこととする。

$$\begin{aligned} \beta_A^* &= \text{pca}(C)^{-1}\beta_A \\ \beta_Y^* &= \text{pca}(C)^{-1}\beta_Y \end{aligned}$$

このような想定のもと、変換後の交絡変数 Q_j^* (交絡主成分行列 Q^* の j 列目)がそれぞれの個体 n にもたらす $a - bias_j$ は次の式になる ($\beta_{Aj}^* \beta_{Yj}^*$ はそれぞれの係数ベクトルの j 行目を意味する).

$$a - bias_j = \beta_{Aj}^* \beta_{Yj}^* \frac{var(Q_j^*)}{var(A)} \quad ③$$

式③から考えると、 β_{Aj}^* と β_{Yj}^* の「単位」を変換することによって、 Q_j^* の分散を不変なものにできることが分かる (便宜的に分散が1になるように調節する). 単位変換後の主成分交絡行列を Q とすると、 $a - bias_j$ の大きさは β_{Aj}^* と β_{Yj}^* の積によって一義的に決まる. つまり、変換後の各交絡変数の影響力はその変数の分散から比較できる. 変換後の係数ベクトルの j 行目を b_{Aj} と b_{Yj} とすると、そのような変換は次の式④に従う.

$$\frac{b_{Aj}}{\beta_{Aj}^*} = \frac{b_{Yj}}{\beta_{Yj}^*} = std(Q_j^*) \quad ④$$

ここで、元々の交絡変数 C の場合と主成分分析によって等価的なモデルを作成したモデルを図で表すと以下の図3のようになる. ただし、本稿では、 C の個数を r 個としているが、以下の図3では分かりやすくするために、2個で示している.

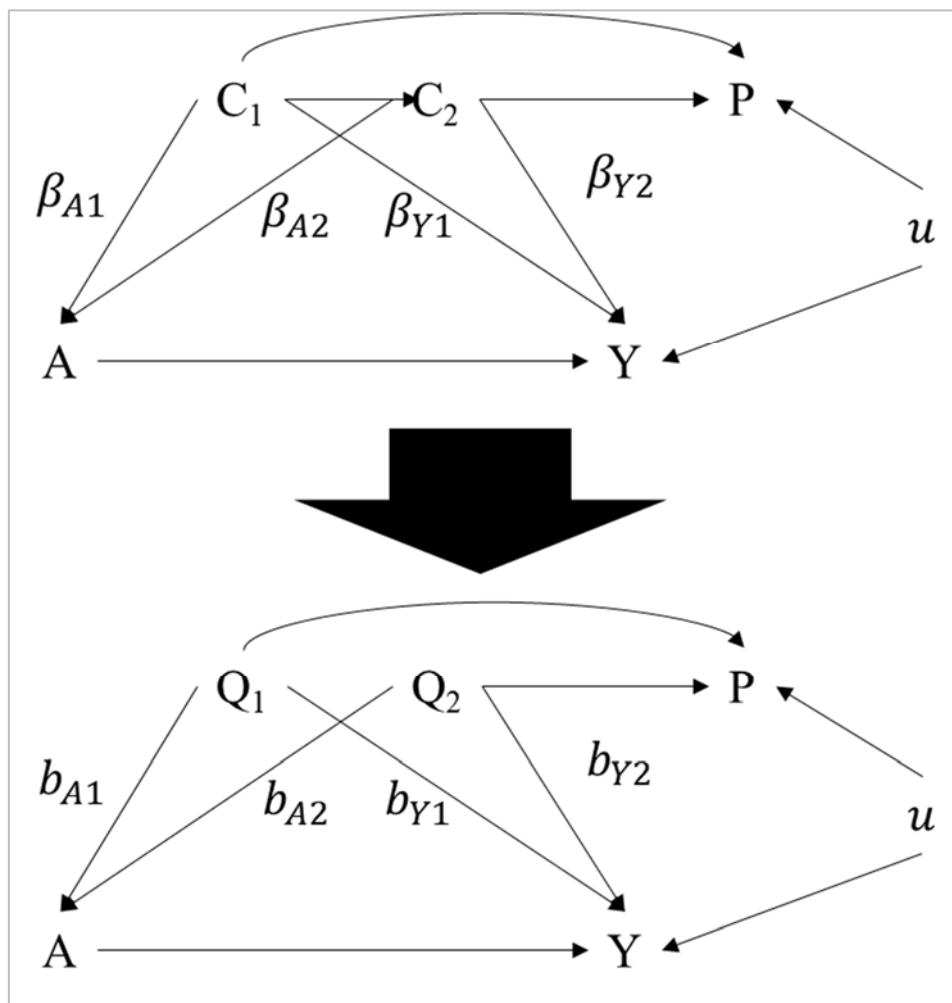


図3

Q を操作的に交絡として認識すると、何も統制せずに生じる a -bias は式⑤のように表記

できる（その時の OVB を含む推定結果を β^* とする）。

$$\begin{aligned} a - bias &= \beta^* - \beta = \frac{cov(A, Y)}{var(A)} - \beta = \frac{cov(A, Qb_Y + A\beta + U_Y)}{var(A)} - \beta \\ &= \frac{cov(Qb_A, Qb_Y)}{var(A)} = \frac{\sum_j b_{Aj}b_{Yj}}{var(A)} \quad ⑤ \end{aligned}$$

3 p-bias の構成

3.1 p-bias の計算

2 節の設定のもと，プロキシ P を Q と U_Y から生成する．T は $r \times 1$ のプロキシの生成係数ベクトルである．

$$P = QT + U_Y$$

P を統制した時の推定結果を β^{**} とすると，その値は式⑥から求められる²⁾．

$$\beta^{**} = \frac{corr(A, Y) - corr(A, P) \cdot corr(P, Y) \frac{std(Y)}{std(A)}}{1 - corr(A, P)^2} \quad ⑥$$

式⑥における $corr(A, P)$ ， $corr(Y, P)$ は次になる．

$$\begin{aligned} corr(A, P) &= \sum_j \frac{b_{Aj}T_j}{std(P)std(A)} = \sum_j \frac{b_{Aj}corr(p, Q_j)}{std(A)} \\ corr(Y, P) &= \sum_j \frac{(b_{Yj} + b_{Aj}\beta)T_j}{std(P)std(Y)} + \frac{var(U_Y)}{std(P)std(Y)} \\ &= \sum_j \frac{b_{Yj}corr(p, Q_j)}{std(Y)} + \beta \cdot corr(A, P) \frac{std(A)}{std(Y)} + \frac{var(U_Y)}{std(P)std(Y)} \end{aligned}$$

上記の計算を踏まえると， $p - bias$ は次のように整理できる．

$$p - bias = \beta^{**} - \beta$$

$$= \frac{\frac{\sum_j b_{Aj}b_{Yj}}{std(A)std(Y)} - \left(\sum_j \frac{b_{Aj}corr(p, Q_j)}{std(A)} \right) \cdot \left(\sum_j \frac{b_{Yj}corr(p, Q_j)}{std(Y)} + \frac{var(U_Y)}{std(P)std(Y)} \right) \frac{std(Y)}{std(A)}}{1 - \left(\sum_j \frac{b_{Aj}corr(p, Q_j)}{std(A)} \right)^2}$$

ここで，表記を簡単化するために， ρ という記号を導入する．具体的には，以下の通りである．

$$\frac{b_{Aj}std(Q_j)}{std(A)} = \frac{b_{Aj}}{std(A)} = \sqrt{\rho_{Aj}}$$

$$\frac{std(U_A)}{std(A)} = \sqrt{\rho_{AU}}$$

$$\frac{b_{Yj}std(Q_j)}{std(Y)} = \frac{b_{Yj}}{std(Y)} = \sqrt{\rho_{Yj}}$$

$$\frac{std(U_Y)}{std(Y)} = \sqrt{\rho_{YU}}$$

$$\beta \frac{std(A)}{std(Y)} = \sqrt{\rho_{YA}}$$

$$\frac{T_j \text{std}(Q_j)}{\text{std}(P)} = \frac{T_j}{\text{std}(P)} = \sqrt{\rho_{Pj}}$$

$$\frac{\text{std}(U_Y)}{\text{std}(P)} = \sqrt{\rho_{PU}}$$

以上を踏まえると、 $p - bias$ は、 ρ という記号を用いて式⑦のように表記できる。

$$p - bias = \frac{\sum_j \sqrt{\rho_{Aj} \rho_{Yj}} - \sum_j \sqrt{\rho_{Aj} \rho_{Pj}} \cdot \sum_j \sqrt{\rho_{Yj} \rho_{Pj}} - \sum_j \sqrt{\rho_{Aj} \rho_{Pj} \rho_{YU} \rho_{PU}}}{1 - \left(\sum_j \sqrt{\rho_{Aj} \rho_{Pj}} \right)^2} \cdot \frac{\text{std}(Y)}{\text{std}(A)} \quad (7)$$

式⑦は、以下に示すとおり 4 つの部分から構成されており、それぞれの構成要素は次のようになる。

$$p - bias = \frac{(p - bias_1) - (p - bias_2) - (p - bias_3)}{(p - bias_4)} \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p - bias_1 = \sum_j \sqrt{\rho_{Aj} \rho_{Yj}} \cdot \frac{\text{std}(Y)}{\text{std}(A)} \\ p - bias_2 = \sum_j \sqrt{\rho_{Aj} \rho_{Pj}} \cdot \sum_j \sqrt{\rho_{Yj} \rho_{Pj}} \cdot \frac{\text{std}(Y)}{\text{std}(A)} \\ p - bias_3 = \sum_j \sqrt{\rho_{Aj} \rho_{Pj} \rho_{YU} \rho_{PU}} \cdot \frac{\text{std}(Y)}{\text{std}(A)} \\ p - bias_4 = 1 - \left(\sum_j \sqrt{\rho_{Aj} \rho_{Pj}} \right)^2 \end{array} \right. \quad (9)$$

3.2 $p - bias$ の構成要素の意味合い

3.2.1 $p - bias$ の意味合い

式⑨を観察すると、それぞれの構成要素は、次のような意味合いを有することがわかる。

まず、 $p - bias_1$ は、統制変数を何も投入していない場合の、結果変数 Y に対する A の回帰係数が含む OVB (a-bias) である。

次に、 $p - bias_2$ は、交絡変数 Q が A そして Y へ伸ばした矢印を、 P によって集約することによって、 $A \leftarrow P \rightarrow Y$ という仮想的な「交絡」として部分統制される部分である。

$p - bias_1$ と $p - bias_2$ について、次のように考察できる。真の交絡 (Q でも C でも) は観測不可能なものなので、OVB の抑制は代理指標 P を通して部分的統制を図らなければならない。 $p - bias_2$ はまさに P を統制する際に疑似的に各次元の $A \leftarrow Q_j \rightarrow Y$ を $A \leftarrow P \rightarrow Y$ に集約して統制できた部分を表している。ゆえに $p - bias_1$ と $p - bias_2$ の差分は OVB が代理指標 P によって部分的統制されてもなお、残っているバイアスと解釈できる。

三つ目の $p - bias_3$ は、 $Q \rightarrow P \leftarrow U_Y$ の存在により、 P を統制することによって生じる合流点バイアスである。 $p - bias_3$ は上記の部分的統制をされてもなお残っている部分、即ち $p - bias_1$ と $p - bias_2$ の差分をさらに相殺していき、さらに場合によってその差分より $p - bias_3$ が大きい場合 $p - bias$ の符号をマイナ方向へもっていく。

最後に、 $p-bias_4$ は、代理指標 P によって A の分散の内、説明されていない部分の割合を意味している。そして、実は $p-bias_4$ は Z バイアスと呼ばれるものと等しい。その理由については、次節で紹介していく。

3.2.2 Z バイアス

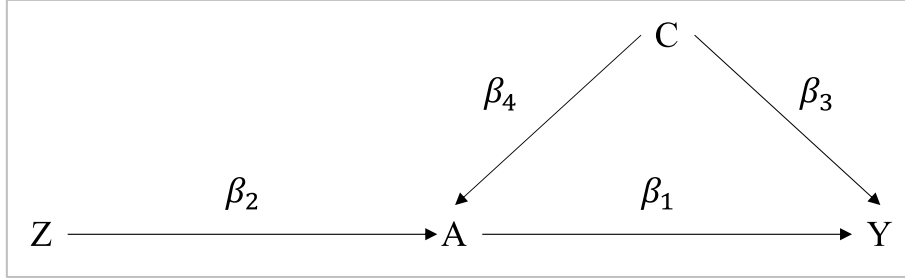


図 4 Z バイアス

Z バイアスとは、図 4 で示されるように、操作変数 (Z) のような、処置にしか直接に影響を与えないものを、そのまま A の因果効果の推定に統制した際に、統制しない時よりも、バイアスが大きくなることを言う (Heckman and Nevarro-Lozanro 2004, Wooldridge 2016)。

本稿の本論とは大きく関係ないが、以下では Z バイアスのあり方を確認し、なぜ起きるかについて確認していくこととする。図 4 の設定に対して、 A の処置効果を何も統制せずに推定した際に (式⑨)、推定値 b_1^* は式⑩のようになる。

$$Y = b_1^* A + b_2^* \quad \text{⑨}$$

$$b_1^* = \beta_1 + \beta_3 \beta_4 \frac{\sigma_C^2}{\sigma_A^2} \quad \text{⑩}$$

一方、 Z だけで Y へ回帰する際に (式⑪)、 Z の係数 b_1^{**} は式⑫になる。

$$Y = b_1^{**} Z + b_2^{**} \quad \text{⑪}$$

$$b_1^{**} = \beta_1 \beta_2 \quad \text{⑫}$$

Z を統制したうえで A の処置効果を推定する際の係数は、式⑬である。

$$Y = b_1 A + b_2 Z + b_3 \quad \text{⑬}$$

式⑬を真のモデルとして認識する場合、式⑨と式⑪の係数 b_1^* と b_1^{**} はそれぞれ A と Z に対しての OVb が起きている場合の推定値となる。つまり、 b_1^* と b_1^{**} は次の式を満たす。

$$\begin{cases} b_1^* = b_1 + \beta_2 \frac{\sigma_Z^2}{\sigma_A^2} b_2 \\ b_1^{**} = b_2 + \beta_2 b_1 \end{cases}$$

上記の式を式⑩と式⑫から、式⑭が得られる。

$$\begin{cases} b_1^* = \beta_1 + \beta_3 \beta_4 \frac{\sigma_C^2}{\sigma_A^2} = b_1 + \beta_2 \frac{\sigma_Z^2}{\sigma_A^2} b_2 \\ b_1^{**} = \beta_1 \beta_2 = b_2 + \beta_2 b_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{b_1 - b_1^*}{\left(\beta_2 \cdot \frac{\sigma_Z}{\sigma_A}\right)^2} = b_1 - \beta_1 \quad (14)$$

さらに整理すると、次のように、何も統制しないときの推定値 b_1^* と Z を統制した時の推定値 b_1 がそれぞれ真値 β_1 からどれほど離れているかが分かる。

$$\begin{aligned} \Rightarrow b_1 \cdot \left[1 - \left(\beta_2 \cdot \frac{\sigma_Z}{\sigma_X}\right)^2\right] &= b_1^* - \beta_1 + \beta_1 - \left(\beta_2 \cdot \frac{\sigma_Z}{\sigma_X}\right)^2 \cdot \beta_1 \\ \Rightarrow (b_1 - \beta_1) \cdot \left[1 - \left(\beta_2 \cdot \frac{\sigma_Z}{\sigma_X}\right)^2\right] &= b_1^* - \beta_1 \\ \Rightarrow |b_1 - \beta_1| &= \frac{|b_1^* - \beta_1|}{1 - \text{corr}(X, Z)^2} > |b_1^* - \beta_1| \quad (15) \end{aligned}$$

式⑮の分母を観察すると、統制変数が処置変数 A を説明する部分が大きいくほど、それに応じて交絡 C への説明力が伴っていないければ（即ち、分子が小さくなっていないければ）、 OVb はそれに応じて拡大していくことが分かる。とはいえ、バイアスが拡大するものの、符号が変わらないので、衰減バイアスの一種である。

交絡が複数個の時のプロキシ問題という本稿の研究課題からいうと、 $p - bias_4$ はまさにプロキシ P の処置変数 A への説明力とかかわる部分で、即ち本節で議論していた Z バイアスとなる。

4. $p - bias$ の挙動について

まず、 $p - bias$ の挙動の確認は以下の二つの問題に分解することができる。

- ① T （プロキシの生成係数ベクトル）の方向が一定であるという場合のもと、 ρ_{PU} の増減に対して、 $p - bias$ がいかに変動するのか。端的に言うと、必ず ρ_{PU} （ U_Y から P への影響力）が低ければいいものか否か。
 - ② ρ_{PU} が一定の場合、どのような T が最も $p - bias$ の低い P を作り出せるのか。
- 本稿では、とりあえず問題①について答えていく。

4.1 $p - bias$ の変動部分を分離する

ρ_{PU} の範囲は $[0,1]$ で、変動を把握しにくい。ゆえに、本節では、 $q = \sqrt{\frac{1 - \rho_{PU}}{\rho_{PU}}}$ を使用して、 ρ_{PU} の増減を検討していく。 q が無限に近づいていくにつれて、 ρ_{PU} が 0 となり、 q が 0 の時に、 ρ_{PU} が 1 となる。 ρ_{PU} は、プロキシ P の分散のうちの U_Y からの影響力を示しているため、 U_Y の影響力が小さいプロキシ P であれば q は大きくなり、 U_Y の影響力が大きいプロキシ P であれば q は 0 に近づいていく。つまり、プロキシ P を測定する際の系統誤差からの影響力によって変化する。 Q が大きいくほど、プロキシとしての精度が良いといえる。

$p - bias$ 、即ち式⑨の内、 q と関連しているのは、 ρ_{Pj} と ρ_{PU} の部分である。 ρ_{PU} を q の数式で書き換えると、式⑯のようになる。

$$\rho_{PU} = \frac{1}{q^2 + 1} \quad (16)$$

ρ_{Pj} を q_U の数式で書き換えるために、まず、係数 T_j を q_U の数式で書き換えなければならない

い. 本節の設定では, ρ_{PU} の増減によらずに係数ベクトル T の方向が一定ということで, T_j は式⑭に満たすことが分かる.

$$T_j = t_j \cdot f(q) \quad (17)$$

T_j は式⑭からわかるように, t_j と $f(q)$ の二つの部分に分解できる. そのうち, t_j は ρ_{PU} の増減によらない部分で, そして $f(q)$ は j と関係ない, q についての任意の関数である. また, t_j を並べたベクトルを t は, 本節の設定では, T と同方向の任意のベクトルから選定できる.

一方, 寄与率 ρ_{PU} と ρ_{Pj} の定義, そして式⑭から次の関係式が分かる.

$$\begin{cases} \sum_j \rho_{Pj} = 1 - \rho_{PU} = \frac{q^2}{q^2 + 1} \\ \rho_{Pj} = \frac{T_j^2}{\text{var}(P)} = \frac{t_j^2 f(q)^2}{\sum_j T_j^2 + \text{var}(U_Y)} \end{cases}$$

つまり,

$$\frac{q^2}{q^2 + 1} = \frac{f(q)^2}{\sum_j T_j^2 + \text{var}(U_Y)} \sum_j t_j^2$$

そこで, 便宜的に以下の式を満たすように, t を選定する.

$$\sum_j t_j^2 = 1$$

そうすると, ρ_{Pj} を式⑮のように, q の数式で簡単に書き換えられるようになる. 即ち,

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{q^2 + 1} &= \frac{f(q)^2}{\sum_j T_j^2 + \text{var}(U_Y)} \\ \Rightarrow \rho_{Pj} &= \frac{t_j^2 f(q)^2}{\sum_j T_j^2 + \text{var}(U_Y)} = \frac{q^2}{q^2 + 1} t_j^2 \quad (18) \end{aligned}$$

式⑮と式⑮を p -bias の各構成要素 (式⑨) に代入すると, 次のようになる.

$$\begin{cases} p - bias_1 = \sum_j \sqrt{\rho_{Aj} \rho_{Yj}} \cdot \frac{\text{std}(Y)}{\text{std}(A)} \\ p - bias_2 = \frac{q^2}{q^2 + 1} \cdot \sum_j \sqrt{\rho_{Aj} t_j^2} \cdot \sum_j \sqrt{\rho_{Yj} t_j^2} \cdot \frac{\text{std}(Y)}{\text{std}(A)} \\ p - bias_3 = \frac{q}{q^2 + 1} \cdot \sqrt{\rho_{YU}} \cdot \sum_j \sqrt{\rho_{Aj} t_j^2} \cdot \frac{\text{std}(Y)}{\text{std}(A)} \\ p - bias_4 = 1 - \frac{q^2}{q^2 + 1} \cdot \left(\sum_j \sqrt{\rho_{Aj} t_j^2} \right)^2 \end{cases} \quad (19)$$

式⑲において, 四角に囲われる部分以外はすべて ρ_{PU} の増減に影響されない部分となっている.

4.2 p -bias の各構成要素の変動

本節では, q に対する p -bias の各構成要素の微分をもとめて, それぞれの変動について確認していく. なお $p - bias_1$ は即ち a -bias のことで, 代理指標 P を構成する際の誤差項と関係はない.

1) $p - bias_2$ の変動

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p - bias_2}{\partial q} &= \frac{\partial \frac{q^2}{q^2 + 1} \cdot \sum_j \sqrt{\rho_{Aj} t_j^2} \cdot \sum_j \sqrt{\rho_{Yj} t_j^2} \cdot \frac{std(Y)}{std(A)}}{\partial q} \\
&= \sum_j \sqrt{\rho_{Aj} t_j^2} \cdot \sum_j \sqrt{\rho_{Yj} t_j^2} \cdot \frac{std(Y)}{std(A)} \cdot \frac{\partial \frac{q^2}{q^2 + 1}}{\partial q} \\
&= \sum_j \sqrt{\rho_{Aj} t_j^2} \cdot \sum_j \sqrt{\rho_{Yj} t_j^2} \cdot \frac{std(Y)}{std(A)} \cdot \frac{2q}{(q + 1)^2} > 0
\end{aligned}$$

上記の計算から $p - bias_2$, 即ち $A \leftarrow P \rightarrow Y$ という仮想的な交絡の部分統制の要素は, q の増加, 即ち P に対する U_Y の影響力の減少により大きくなっていくことが分かる.

2) $p - bias_3$ の変動

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p - bias_3}{\partial q} &= \frac{\partial \frac{q}{q^2 + 1} \cdot \sqrt{\rho_{YU}} \cdot \sum_j \sqrt{\rho_{Aj} t_j^2} \cdot \frac{std(Y)}{std(A)}}{\partial q} \\
&= \sqrt{\rho_{YU}} \cdot \sum_j \sqrt{\rho_{Aj} t_j^2} \cdot \frac{std(Y)}{std(A)} \cdot \frac{\partial \frac{q}{q^2 + 1}}{\partial q} \\
&= \sqrt{\rho_{YU}} \cdot \sum_j \sqrt{\rho_{Aj} t_j^2} \cdot \frac{std(Y)}{std(A)} \cdot \frac{1 - q^2}{(1 + q^2)^2}
\end{aligned}$$

上記の式の符号は $1 - q_U$ によって決まる.

$p - bias_3$, 即ち P を統制することによって引き起こされる合流点バイアスは q の増加, 即ち P に対する U_Y の影響力の増加により, まずは小さくなり, その後また大きくなっていく. $q=1$, 即ち U_Y がちょうど P の分散の 50% を決めるときに, $p - bias_3$ が最大になる.

このことは, q が無限大に近づくとともに, P は殆ど U_Y から影響を受けない, つまりそもそも合流点バイアスが起これないという状況になる. 一方, q が 0 に近い数字だと, P は殆ど交絡変数の部分統制として機能しておらず, y の外生的な影響要因をただ統制することとなるため, 処置効果の推定値に影響を全く及ばなくなり, そして合流点バイアスも起これなくなる.

3), $p - bias_4$ の変動

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p - bias_4}{\partial q_U} &= \frac{\partial \left[1 - \frac{q^2}{q^2 + 1} \cdot \left(\sum_j \sqrt{\rho_{Aj} t_j^2} \right)^2 \right]}{\partial q_U} \\
&= - \left(\sum_j \sqrt{\rho_{Aj} t_j^2} \right)^2 \cdot \frac{2q}{(q + 1)^2} < 0
\end{aligned}$$

上記の計算から、 $p - bias_4$ 、即ち A の分散の内、指標 P によって説明されていない部分の割合は、 q の増加、即ち P に対する U_Y の影響力の減少により小さくなっていくことが分る。つまり、Z バイアスが引き起こやすくなる。

4.3 $\sum_j \sqrt{\rho_{Aj} t_j^2}$, $\sum_j \sqrt{\rho_{Yj} t_j^2}$, そして $\sum_j \sqrt{\rho_{Aj} \rho_{Yj}}$ の解釈

p -bias の挙動をさらに解釈するために、まず $\sum_j \sqrt{\rho_{Aj} t_j^2}$, $\sum_j \sqrt{\rho_{Yj} t_j^2}$, そして $\sum_j \sqrt{\rho_{Aj} \rho_{Yj}}$ の意味合いについて検討しておきたい。

$\sqrt{\rho_{Aj}}$ を縦に並べたベクトルを $\mathbf{B}_{\sqrt{\rho_A}}$ とし、 $\sqrt{\rho_{Yj}}$ を縦に並べたベクトルを $\mathbf{B}_{\sqrt{\rho_Y}}$ とし、 t_j を縦に並べたベクトルは、P を生成する際の係数ベクトル T であることを念頭に、上記の 3 式を見ると、次のことが分かる。

ベクトル $\mathbf{B}_{\sqrt{\rho_A}}$ とベクトル $\mathbf{B}_{\sqrt{\rho_Y}}$ のなす角の余弦値 $\cos(\mathbf{B}_{\sqrt{\rho_A}}, \mathbf{B}_{\sqrt{\rho_Y}})$ は、次のように計算することができる（即ち $\sqrt{\rho_{Aj}}$ と $\sqrt{\rho_{Yj}}$ との相関係数）。

$$\cos(\mathbf{B}_{\sqrt{\rho_A}}, \mathbf{B}_{\sqrt{\rho_Y}}) = \frac{\mathbf{B}_{\sqrt{\rho_A}} \cdot \mathbf{B}_{\sqrt{\rho_Y}}}{\sqrt{|\mathbf{B}_{\sqrt{\rho_A}}|} \sqrt{|\mathbf{B}_{\sqrt{\rho_Y}}|}} = \frac{\sum_j \sqrt{\rho_{Aj} \rho_{Yj}}}{\sqrt{\sum_j \rho_{Aj}} \sqrt{\sum_j \rho_{Yj}}} = \frac{\sum_j \sqrt{\rho_{Aj} \rho_{Yj}}}{\sqrt{\sum_j \rho_{Aj}} \sqrt{\sum_j \rho_{Yj}}}$$

同じく、 $\mathbf{B}_{\sqrt{\rho_A}}$ と T のなす角、そして $\mathbf{B}_{\sqrt{\rho_Y}}$ と T のなす角は次のようになる。

$$\cos(\mathbf{B}_{\sqrt{\rho_A}}, T) = \frac{\sum_j \sqrt{\rho_{Aj} t_j^2}}{\sqrt{\sum_j \rho_{Aj}}}$$

$$\cos(\mathbf{B}_{\sqrt{\rho_Y}}, T) = \frac{\sum_j \sqrt{\rho_{Yj} t_j^2}}{\sqrt{\sum_j \rho_{Yj}}}$$

これらの余弦値は、交絡変数 Q から A または Y、及び Q から P を構成するときの係数ベクトルの類似性として理解できる。一方、分母になる $\sum_j \rho_{Aj}$ や $\sum_j \rho_{Yj}$ は、即ち A と Y が交絡 Q によって決められる部分の割合、即ち、交絡変数の影響力の強さとして解釈できる。

つまり、 $\sum_j \sqrt{\rho_{Aj} t_j^2}$, $\sum_j \sqrt{\rho_{Yj} t_j^2}$ そして $\sum_j \sqrt{\rho_{Aj} \rho_{Yj}}$ は、A や Y に対する交絡変数の影響力、及び、交絡変数がプロキシを構成する際の構造はそれが A や Y に構成するときの構造との近さで決まる。

ちなみに、 $\sum_j t_j^2 = 1$ 、そして $0 \leq \rho_{Aj}, \rho_{Yj} \leq 1$ という条件が満たされているので、 $0 < \sum_j \sqrt{\rho_{Aj} t_j^2}, \sum_j \sqrt{\rho_{Yj} t_j^2} < 1$ ということが分かる。

4.4 $p - bias$ の範囲

4.4.1 q が無限に近づくときの漸近値

式⑩を $p - bias$ の計算式（式⑧）に代入すると、次のようになる。

$$p - bias = \frac{\left(\sum_j \sqrt{\rho_{Aj}\rho_{Yj}} - \sum_j \sqrt{\rho_{Aj}t_j^2} \cdot \sum_j \sqrt{\rho_{Yj}t_j^2}\right) \cdot q^2 - \sqrt{\rho_{YU}} \cdot \sum_j \sqrt{\rho_{Aj}t_j^2} \cdot q + \sum_j \sqrt{\rho_{Aj}\rho_{Yj}}}{q^2 \cdot \left[1 - \left(\sum_j \sqrt{\rho_{Aj}t_j^2}\right)^2\right] + 1} \cdot \frac{std(Y)}{std(A)}$$

さらに表記を簡単化するために、本節では特別に、 $\sum_j \sqrt{\rho_{Aj}t_j^2}$ を X 、 $\sum_j \sqrt{\rho_{Yj}t_j^2}$ を Y 、 $\sqrt{\rho_{YU}}$ を \sqrt{U} 、そして、 $\sum_j \sqrt{\rho_{Aj}\rho_{Yj}}$ を Z と表記する。即ち式⑩のようになる。

$$p - bias = \frac{(Z - XY) \cdot q^2 - \sqrt{UX} \cdot q + Z}{q^2 \cdot (1 - X^2) + 1} \cdot \frac{std(Y)}{std(A)} \quad \text{⑩}$$

式⑩から確認できるように、 $q=0$ 即ちプロキシ P は完全に交絡と関係ないものから構成されているという場合に、 $p - bias$ は $Z \frac{std(Y)}{std(A)} = \sum_j \sqrt{\rho_{Aj}\rho_{Yj}} \frac{std(Y)}{std(A)}$ 、即ち a -bias となる。

一方、 $q \rightarrow \infty$ 即ちプロキシ P は殆ど U_Y から影響を受けていない場合に、交絡変数が1つしかないという中尾他 (2022) の設定の下では、 $p - bias$ は 0 に漸近していくこととなる。交絡変数が複数想定されるという本稿の問題設定では、 $p - bias$ の漸近値はどのようなになるだろうか。その計算式は次のようになる。

$$\lim_{q \rightarrow \infty} (p - bias) = \frac{Z - XY}{1 - X^2} \cdot \frac{std(Y)}{std(A)}$$

符号は四角に囲われる部分によって決まることが分かる。ゆえに、交絡変数が1つしかない場合と異なり、 $q \rightarrow \infty$ の時の漸近値は必ずしも 0 とはならない。つまり、複数の交絡変数に対して一つの代理指標を使うことは、仮に合流点バイアスを引き起こさない方向に（つまり P は U_Y から影響を受けないということ） P を構成したとしても、 p -bias が 0 に向かっていくとは限らない。特に、漸近値が正である場合、任意の q で p -bias がちょうど 0 になる以降、 q の増大（＝精度の良いプロキシ）は逆に必ず p -bias の増大につながる。

では、漸近値が正になるのはどういう場合だろうか。

$$\begin{aligned} \sum_j \sqrt{\rho_{Aj}\rho_{Yj}} &> \sum_j \sqrt{\rho_{Aj}t_j^2} \cdot \sum_j \sqrt{\rho_{Yj}t_j^2} \\ \Rightarrow \cos(\mathcal{B}_{\sqrt{\rho_A}}, \mathcal{B}_{\sqrt{\rho_Y}}) \sqrt{\sum_j \rho_{Aj}} \sqrt{\sum_j \rho_{Yj}} &> \cos(\mathcal{B}_{\sqrt{\rho_A}}, T) \sqrt{\sum_j \rho_{Aj}} \cos(\mathcal{B}_{\sqrt{\rho_Y}}, T) \sqrt{\sum_j \rho_{Yj}} \\ \Rightarrow \cos(\mathcal{B}_{\sqrt{\rho_A}}, \mathcal{B}_{\sqrt{\rho_Y}}) &> \cos(\mathcal{B}_{\sqrt{\rho_A}}, T) \cos(\mathcal{B}_{\sqrt{\rho_Y}}, T) \quad \text{⑪} \end{aligned}$$

幾何学の三余弦定理によると、ベクトル $\mathcal{B}_{\sqrt{\rho_A}}$ とベクトル T で決められた平面と、ベクトル $\mathcal{B}_{\sqrt{\rho_Y}}$ とベクトル T で決められた平面がちょうど垂直になっている状態（法線ベクトルの内積が 0 ）であれば、下の式がちょうど満たされる。

$$\cos(\mathcal{B}_{\sqrt{\rho_A}}, \mathcal{B}_{\sqrt{\rho_Y}}) = \cos(\mathcal{B}_{\sqrt{\rho_A}}, T) \cos(\mathcal{B}_{\sqrt{\rho_Y}}, T)$$

そして、漸近値が正になるという式⑪で示した、3つの余弦値間の関係は、ベクトル $\mathcal{B}_{\sqrt{\rho_A}}$

とベクトル T で決められた平面と、ベクトル $B_{\sqrt{\rho_Y}}$ とベクトル T で決められた平面のなす角が鋭角であることを意味している。同様に、なす角が鈍角である場合に、漸近値が負になることもこれでわかる。

例、いずれにせよ、最初はマイナスに向かう、その後漸近値に向かって近づいていくという挙動をすることが推察される。

4.4.2 p-bias の範囲

交絡が一つしかない場合、中尾他（2022）は、 q の変動による p-bias の挙動について次のようにまとめている（中尾他は本稿の q のことを「 q_2 」と表記している）。

「まず、 q_2 が大きくなるにつれて、(p-bias は) a-bias よりも小さくなっていく。そして、 $q_2 = \frac{q_1}{\sqrt{1-\rho_A}\sqrt{\rho_Y}}$ の時に、p-bias が偶然に「0」となる。その後、p-bias は引き続きマイナスの方に下がり、0 より小さい値を取り、ある値の時に下限値となる。下限値をとった後は、 q_2 が大きくなるにつれて上昇し、0 に向かって収斂していく」。

交絡が複数に存在するという本稿の設定では、p-bias の挙動はいかなるものになるだろうか。本節では、p-bias の範囲を明らかにすることとする。

$p-bias = K \cdot \frac{std(Y)}{std(A)}$ とすると、次の式が成立することが分かる。

$$\begin{aligned} \frac{(Z - XY) \cdot q^2 - \sqrt{UX} \cdot q + Z - K[1 - X^2] \cdot q^2 - K}{q^2 \cdot [1 - X^2] + 1} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{(Z - XY - (1 - X^2)K) \cdot q^2 - \sqrt{UX} \cdot q + Z - K}{q^2 \cdot [1 - X^2] + 1} &= 0 \\ \Rightarrow (Z - XY - (1 - X^2)K) \cdot q^2 - \sqrt{UX} \cdot q + Z - K &= 0 \quad \textcircled{2} \end{aligned}$$

式②は q に関する二次方程式となっている。 $q = \sqrt{\frac{1-\rho_{PU}}{\rho_{PU}}} \leq 1$ という本稿の設定を念頭に、

p-bias の範囲を決める K は、式②に少なくとも一つの非負解を持たなければならない。

つまり式②に実数解が存在する、即ち判別式が非負であること、そして実数解の内より大きいものが非負であることという二つの条件がそろわなければならない。

まず、式②の判別式が式③となる

$$\begin{aligned} \Delta &= UX^2 - 4(Z - XY - (1 - X^2)K)(Z - K) \\ &= UX^2 - 4Z(Z - K) + 4XY(Z - K) + 4(1 - X^2)K(Z - K) \\ &= UX^2 - 4Z^2 + 4ZK + 4XYZ - 4XYK + 4(1 - X^2)ZK - 4(1 - X^2)K^2 \\ &= UX^2 - 4Z^2 + 4XYZ + [4Z - 4XY + 4(1 - X^2)Z]K - 4(1 - X^2)K^2 \quad \textcircled{3} \end{aligned}$$

式③も K に関する二次方程式となっている。その中の二次項係数 $-4(1 - X^2)$ は複数の交絡が存在するモデルにおいて常にマイナスである（交絡が一次元で且つ A の生成式に誤差項がないという場合のみ X が 1 となる）。

つまり、 $\Delta \geq 0$ を満たす K が、 $\Delta = 0$ とさせる二つの解の間に位置づく。式③が 0 になるときの解を求めるための判別式を計算すると、次のように、必ず正であることが確認できる。

$$\begin{aligned} \Delta_k &= [4Z - 4XY + 4(1 - X^2)Z]^2 + 4(UX^2 - 4Z^2 + 4XYZ)4(1 - X^2) \\ &= 16[(2Z - XY - X^2Z)^2 + (UX^2 - 4Z^2 + 4XYZ)(1 - X^2)] \end{aligned}$$

$$= 16X^2(U - UX^2 + X^2Z^2 - 2XYZ + Y^2) = 16X^2[U(1 - X^2) + (XZ - Y)^2] > 0$$

そうすると、式②実数解が存在するという条件は、即ち、次の不等式になる（式④）。

$$\begin{aligned} \frac{(2Z - XY - X^2Z) - X\sqrt{U(1 - X^2) + (XZ - Y)^2}}{2(1 - X^2)} &\leq K \\ &\leq \frac{(2Z - XY - X^2Z) + X\sqrt{U(1 - X^2) + (XZ - Y)^2}}{2(1 - X^2)} \quad \text{④} \end{aligned}$$

そのうえで、もう一つの条件、即ち非負解が存在するというのは、式⑤になる。

$$\max \left\{ \frac{\sqrt{UX} + \sqrt{\Delta}}{2(Z - XY - (1 - X^2)K)}, \frac{\sqrt{UX} - \sqrt{\Delta}}{2(Z - XY - (1 - X^2)K)} \right\} \geq 0 \quad \text{⑤}$$

分母の符号によって、上式は次の二つの場合に分けられる。

$$2(Z - XY - (1 - X^2)K) > 0 \Rightarrow \frac{Z - XY}{1 - X^2} > K \text{ の場合に, } \frac{\sqrt{UX} + \sqrt{\Delta}}{2(Z - XY - (1 - X^2)K)} \text{ が必ずプラスなので, 式⑤}$$

は常に満たされる。

一方、 $\frac{Z - XY}{1 - X^2} < K$ の場合に、式③の一次項 $4Z - 4XY + 4(1 - X^2)Z < 0$ 。二次関数 Δ の対称軸がマイナスであることが分かる。そうすると、非負解が存在することは、即ち二つの解の積がマイナスであることを意味する。根と係数の関係に基づいて、次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{Z - K}{Z - XY - (1 - X^2)K} &\leq 0 \Rightarrow K \leq Z \\ &\Rightarrow \frac{Z - XY}{1 - X^2} < K \leq Z \end{aligned}$$

以上のように二つの場合を検討した結果、 $\frac{Z - XY}{1 - X^2} > K$ 、もしくは $\frac{Z - XY}{1 - X^2} < K \leq Z$ のいずれの場合でも式⑤が満たされることが分かった。二つの場合を合わせると、式⑥となる。

$$K \leq \max \left\{ \frac{Z - XY}{1 - X^2}, Z \right\} \quad \text{⑥}$$

実は、次の計算から確認できるように、式④の上限は式⑥の条件に内包されている。

$$\begin{aligned} &\frac{(2Z - XY - X^2Z) + X\sqrt{U(1 - X^2) + (XZ - Y)^2}}{2(1 - X^2)} - \frac{Z - XY}{1 - X^2} \\ &= \frac{(XY - X^2Z) + X\sqrt{U(1 - X^2) + (XZ - Y)^2}}{2(1 - X^2)} > \frac{X(Y - XZ) + X|XZ - Y|}{2(1 - X^2)} \geq 0 \\ &\frac{(2Z - XY - X^2Z) + X\sqrt{U(1 - X^2) + (XZ - Y)^2}}{2(1 - X^2)} - Z \\ &= \frac{(-XY + X^2Z) + X\sqrt{U(1 - X^2) + (XZ - Y)^2}}{2(1 - X^2)} > \frac{-X(Y - XZ) + X|XZ - Y|}{2(1 - X^2)} \geq 0 \end{aligned}$$

式④と式⑥を合わせると、p-bias の範囲は式⑦のようになる。

$$\frac{(2Z - XY - X^2Z) - X\sqrt{U(1 - X^2) + (XZ - Y)^2}}{2(1 - X^2)} \leq K \leq \max \left\{ \frac{Z - XY}{1 - X^2}, Z \right\}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(2Z - XY - X^2Z) - X\sqrt{U(1 - X^2) + (XZ - Y)^2} \text{std}(Y)}{2(1 - X^2) \text{std}(A)} \leq p - bias \\ & \leq \max \left\{ \frac{Z - XY \text{std}(Y)}{1 - X^2 \text{std}(A)}, Z \frac{\text{std}(Y)}{\text{std}(A)} \right\} \quad (27) \end{aligned}$$

ここで $\frac{Z - XY}{1 - X^2} \cdot \frac{\text{std}(Y)}{\text{std}(A)}$ は、p-bias の漸近値で、 $Z \cdot \frac{\text{std}(Y)}{\text{std}(A)}$ は OVB であることを念頭に上記の結果を解釈すると、p-bias の上限値は、即ち何も交絡を統制しない ($q=0$) 時の a-bias(=OVB)、もしくは q が無限に近づくときの漸近値によって決まることが分かる。

4.4.3 微分から見る p-bias の変動

本節では、 q に対して p-bias (式⑳) の微分を求めることによって、p-bias の変動の形を確認する。

$$\begin{aligned} \frac{\delta p - bias}{\delta q} &= \frac{\text{std}(Y)}{\text{std}(A)} \frac{\delta \frac{(Z - XY) \cdot q^2 - \sqrt{UX} \cdot q + Z}{q^2 \cdot (1 - X^2) + 1}}{\delta q} \\ &= \frac{\text{std}(Y)}{\text{std}(A)} \frac{\frac{\delta [(Z - XY) \cdot q^2 - \sqrt{UX} \cdot q + Z]}{\delta q} [q^2 \cdot (1 - X^2) + 1] - \frac{\delta [q^2 \cdot (1 - X^2) + 1]}{\delta q} [(Z - XY) \cdot q^2 - \sqrt{UX} \cdot q + Z]}{[q^2 \cdot (1 - X^2) + 1]^2} \\ &= \frac{\text{std}(Y)}{\text{std}(A)} \frac{(2(Z - XY)q - \sqrt{UX})[q^2(1 - X^2) + 1] - 2q(1 - X^2)[(Z - XY)q^2 - \sqrt{UX}q + Z]}{[q^2(1 - X^2) + 1]^2} \\ &= \frac{\text{std}(Y)}{\text{std}(A)} \frac{q^2(1 - X^2)\sqrt{UX} + 2(Z - XY - (1 - X^2)Z)q - \sqrt{UX}}{[q^2(1 - X^2) + 1]^2} \\ &= \frac{\text{std}(Y)}{\text{std}(A)} \frac{q^2(1 - X^2)\sqrt{UX} + 2(X^2Z - XY)q - \sqrt{UX}}{[q^2(1 - X^2) + 1]^2} \end{aligned}$$

微分の符号は四角囲いの部分によって決まる。その部分は q に関する二次関数となっており、符号が正になる条件は次のように考えられる。

四角囲われた部分を観察すると、 q の二次項係数が正で、定数項が負であることが分かる。つまり、その部分をちょうどゼロとさせる q は正数解と負数解がそれぞれ一つ存在することが分かる。 $q > 0$ という制限を考慮すると、正数解のみ存在する音が分かる。その正数解を \underline{q} と置くと、 $q < \underline{q}$ の区間において p-bias の微分がマイナスで、そして $q > \underline{q}$ の時に p-bias の微分がプラスになる。即ち、 q が大きくなるのにつれて、p-bias は先に減少し（マイナスになる可能性もある）、 $q = \underline{q}$ の時に最小値となり、その後は前節で示した漸近値に向かって近づいていく。ここまでの分析から、中尾ほか（2022）が示した交絡変数が一つの場合の p-bias 挙動と基本同じ形をしていることが確認できる。

では、 \underline{q} の値は何だろうか。そして何によって影響されるのか。

$$\begin{aligned} & (1 - X^2)\sqrt{UX}q^2 + 2(X^2Z - XY)q - \sqrt{UX} = 0 \\ \Rightarrow \underline{q} &= \frac{-2(X^2Z - XY) + \sqrt{4(X^2Z - XY)^2 + 4(1 - X^2)UX^2}}{2(1 - X^2)\sqrt{UX}} \\ \Rightarrow \underline{q} &= \frac{-(XZ - Y) + \sqrt{(XZ - Y)^2 + (1 - X^2)U}}{(1 - X^2)\sqrt{U}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{q} = \frac{Y - XZ}{(1 - X^2)\sqrt{U}} + \sqrt{\left(\frac{Y - XZ}{(1 - X^2)\sqrt{U}}\right)^2 + \frac{1}{1 - X^2}} \quad (28)$$

式(28)から見ると、他の要件が一定の下で、 U が大きいほど \underline{q} の値が小さくなることが分かる。即ち、 Y の分散の内、誤差項の分散が占める比重が高いほど、より小さい \underline{q} で p -bias の最小値を取ることができるといえる。

そして、 Z と \underline{q} の関係はどうだろうか。下記のように計算すると、偏微分が常にマイナスであることがわかる。このことから、 Z の増大、即ちもともとの OVb が激しければ、より小さい \underline{q} で p -bias の最小値を取ることができる。

$$\frac{\partial \underline{q}}{\partial Z} = \frac{\frac{X(XZ - Y)}{\sqrt{(XZ - Y)^2 + (1 - X^2)U}} - X}{(1 - X^2)\sqrt{U}} = \frac{\frac{XZ - Y}{\sqrt{(XZ - Y)^2 + (1 - X^2)U}} - 1}{\frac{(1 - X^2)\sqrt{U}}{X}} < 0$$

一方、 X と Y が共変関係にあり、同時にプロキシ P の構成によって影響される。ゆえに、 \underline{q} と X や Y との関連性についての議論は、 P を構成する際の係数ベクトル T がかわってくる。つまり、 ρ_{PU} が一定の場合、どのような T が最も p -bias の低い P を作り出せるのかという課題になる。以上の理由で X や Y の変動と \underline{q} の関係については、本稿では割愛し、また別稿で検討することとする。

4.4.4 p -bias と a -bias の比較

これまでの分析から、複数の交絡変数が存在するモデルにおいて、 p -bias の挙動が中尾ほか(2022)で計算した交絡変数一つの場合と似たような形になっている。ただ、複数の交絡が存在する場合に、 q が無限大に大きくなる時の p -bias の漸近値は必ずしも 0 ではない。4.4.1で議論したように、 $Z - XY$ の正負によって、漸近値がプラスになる場合(図5)、そして漸近値がマイナスになる場合(図6)に分けられる。

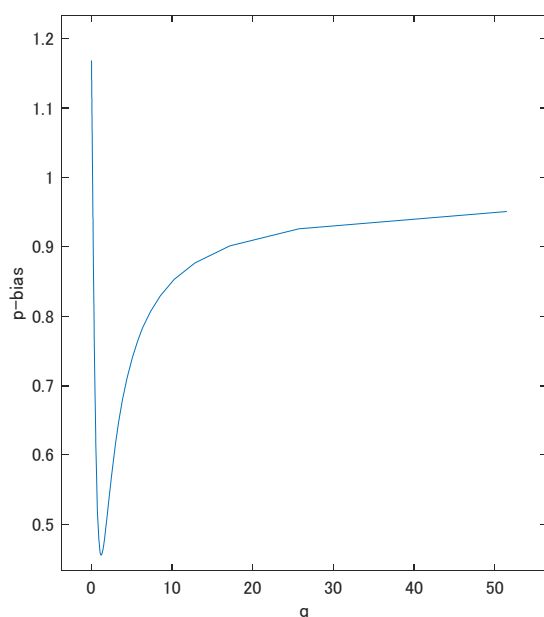


図 5 漸近値がプラスの場合

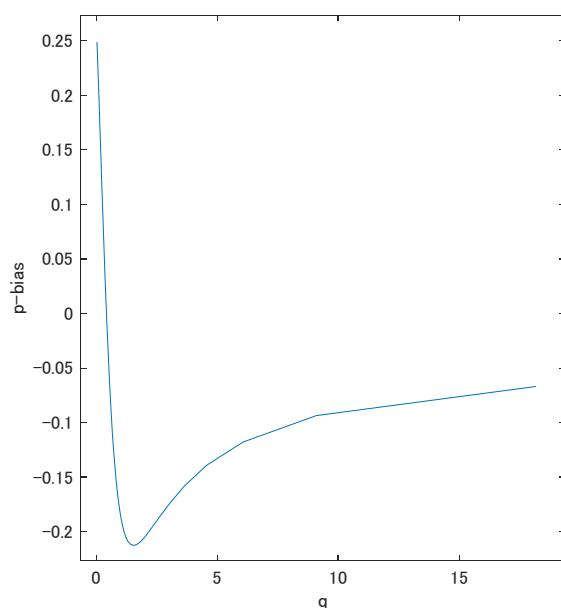


図 6 漸近値がマイナスの場合

プロキシ P を統制する是非について議論する際に、a-bias(=OVB)との比較が重要である。本節では特別に、プロキシを統制した場合に逆に a-bias(=OVB)よりも激しいバイアスを引き起こすという可能性について考える。

p-bias の上限値が a-bias, 即ち $OVB = Z \cdot \frac{std(Y)}{std(A)}$ を超えるという場合を考えていく (図 7)。

それは即ち、q が無限に近づくときの漸近値が $\frac{Z - XY}{1 - X^2} > Z$ になるという場合である。

$$\frac{Z - XY}{1 - X^2} > Z$$

$$\Rightarrow Y < ZX$$

即ち、ベクトル $\mathbf{B}_{\sqrt{\rho_A}}$ とベクトル T で決められた平面と、ベクトル $\mathbf{B}_{\sqrt{\rho_A}}$ とベクトル $\mathbf{B}_{\sqrt{\rho_Y}}$ で決められた平面のなす角が鈍角であることを意味している。この時に、q の精度を無限に挙げていくのにつれ、p-bias が 0 へ収束するどころか、統制しない時のバイアス (OVB) よりも大きなバイアスの値へと漸近していく。

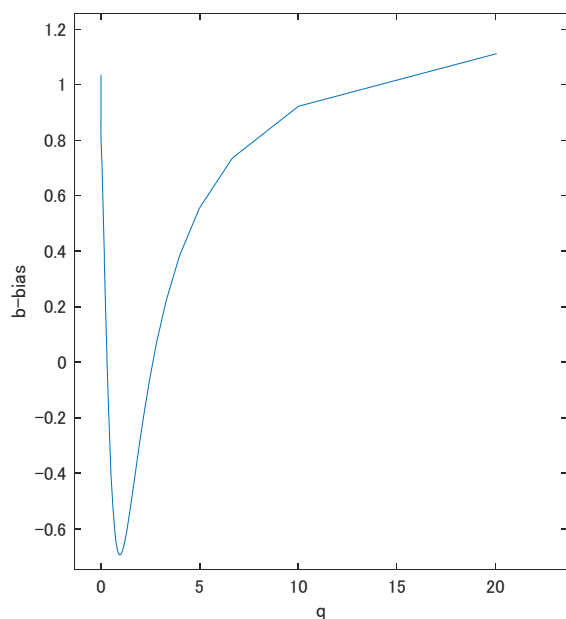


図 7 漸近値が a-bias を超える場合

逆に，XYZ の関係が次の式になるときに，p-bias の漸近値が何も統制しない時のバイアスの値の反対の数字よりも低くなる（図 8）. 下の式からわかるように，この状況は Z が比較的小さい時，即ちもともとの交絡の強さがさほど大きくない時に起きやすい.

$$Z < \frac{XY}{2 - X^2}$$

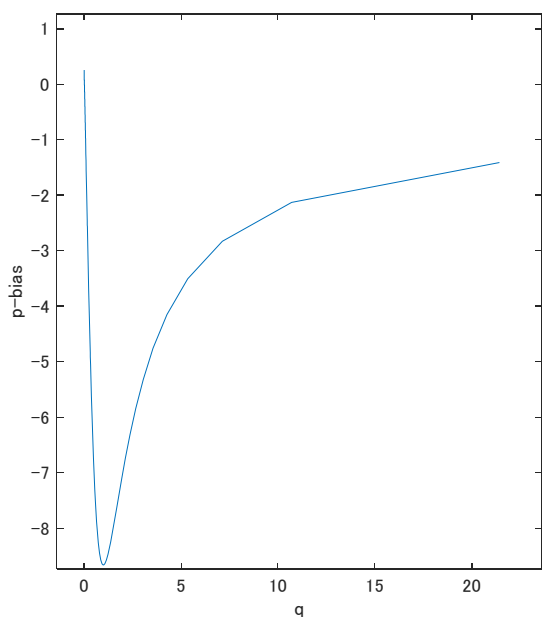


図 8 漸近値が -a-bias より小さい場合

また，p-bias の漸近値が何も統制しない時のバイアス（OVB）の値の反対の数字よりも

低いという極端な状況ではないものの、下限値が **a-bias** より低いという可能性も考えられる (図 9). その場合、次のように計算できる.

$$\frac{(2Z - XY - X^2Z) - X\sqrt{U(1 - X^2) + (XZ - Y)^2}}{2(1 - X^2)} < -Z$$

$$4Z - XY - 3X^2Z < X\sqrt{U(1 - X^2) + (XZ - Y)^2}$$

$$(4Z - XY - 3X^2Z)^2 < X^2[U(1 - X^2) + (XZ - Y)^2]$$

$$16Z^2 + X^2Y^2 + 9X^4Z^2 - 24X^2Z^2 - 8XYZ + 6X^3YZ < X^2[U(1 - X^2) + X^2Z^2 - 2XYZ + Y^2]$$

$$16Z^2 + 8X^4Z^2 - 24X^2Z^2 - 8XYZ + 8X^3YZ < U(1 - X^2)X^2$$

$$8(1 - X^2)(2 - X^2)Z^2 - 8XYZ(1 - X^2) < U(1 - X^2)X^2$$

$$8(2 - X^2)Z^2 - 8XYZ - UX^2 < 0$$

$$\frac{8XY - \sqrt{64X^2Y^2 + 32(2 - X^2)UX^2}}{16(2 - X^2)} < 0 < Z < \frac{8XY + \sqrt{64X^2Y^2 + 32(2 - X^2)UX^2}}{16(2 - X^2)}$$

$$\Rightarrow Z < \frac{2Y + \sqrt{4Y^2 + 2(2 - X^2)U}}{4(2 - X^2)} X$$

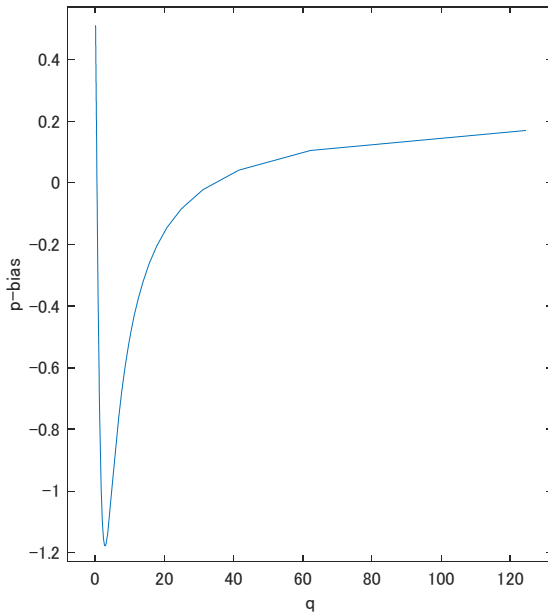


図 9 最小値が **-a-bias** より小さい場合

5 まとめと今後の課題

本稿では、複数の交絡が存在するというモデルにおいて、それら交絡の代理指標として一つの代理指標 **P** を統制した時のバイアスを計算し、その挙動を確認した. 検討した結果から、次のような知見を得られた.

一つ目に、複数の交絡変数が存在するモデルは、交絡変数行列の主成分を取り、**A**→**Y** の因果効果の推定における等価的なモデルを作り上げることによって、計算上の難点が克服できることを確認した.

二つ目に、複数の交絡変数が存在する場合の **p-bias** は、四つの部分から構成されている

こと、そして各構成要素がどのような意味合いを持つのかについて論じた。

三つ目に、プロキシ P の精度を示す q を用い、 q の増減と p -bias の変動について確認した。本稿が扱うモデルの p -bias は、中尾（2022）が指摘する交絡変数が一つしかないモデルの p -bias と似たような動きをしていることが確認できた。即ち、 q の増加（より系統誤差の小さい、即ち精度の良いプロキシになる）につれ、代理指標 P が引き起こすバイアスは先に減少し、そして式⑧で示した q の時に、 p -bias が最小値を取り、その後はある漸近値に向かって大きくなっていく。ただし、複数の交絡が存在している本稿のモデルでは、中尾（2022）に比して、 p -bias の挙動は一緒ではあるものの、漸近値が必ずしも 0 となるわけではないことがわかった。漸近値は、 Q が P を構成する際の係数ベクトル T と Q が A や Y を構成する際の係数ベクトルとのなす角によって決まる。

一方、今後の課題として、以下のことが挙げられる。

まず、 p -bias の挙動について本稿は q の増減による変動のみに焦点を絞っている。今後は、さらにどのような T が最も p -bias の低い P を作り出せるのかについて明らかにしていく。

また、4.4.4 で示した各場合の p -bias の形から、 a -bias を超えない P の安全区間を計算することが可能である。今後は、それに基づいて、本研究の知見がプロキシ選択する際の参考として活用できるように、感度分析の方法を開発していく。

最後に、本稿は複数の交絡変数を有するモデルに一つのプロキシを投入する際の是非について検討したが、実際の研究では複数の代理指標を投入することが普通であろう。今後は、本稿の知見に基づいて、FWL 定理などをモデルの計算に取り入れ、複数のプロキシを投入する場合に p -bias がどう変わるかについてさらに検討していく必要がある。

[注]

- 1) ただし、Frost（1979）は、合流点バイアスが生じなくとも、代理指標 P による部分的統制が必ずしも望ましいわけではなく、その他の変数の相関の強さに依存することを指摘している。
- 2) 本稿では、 $corr$ は相関を、 std は標準偏差の記号としてを用いている。

[文献]

- Elwert, Felix and Christopher Winship, 2014, “Endogenous Selection Bias: The Problem of Conditioning on a Collider Variable,” *Annual Review of Sociology*, 40(1): 31–53.
- Elwert, Felix and Pfeffer, Fabian. T., 2019, “The Future Strikes Back: Using Future Treatments to Detect and Reduce Hidden Bias,” *Sociological Method & Research*, 1-38.
- Engzell, Per, 2019, “What Do Books in the Home Proxy For? A Cautionary Tale,” *Sociological Method & Research*, 1-28.
- Engzell, per and Jonsson, J. O., 2015, “Estimating Social and Ethnic Inequality in School Surveys:

- Biases from Child Misreporting and Parent Nonresponse,” *European Sociological Review*, 31(3): 312-325.
- Frost, P. A., 1979, “Proxy Variables and Specification Bias,” *The Review of Economics and Statistics*, 61(2): 323-325.
- 林岳彦・黒木学, 2016, 「相関と因果と丸と矢印のはなし：はじめてのバックドア基準」岩波データサイエンス刊行委員会『岩波データサイエンス 3』岩波書店.
- Heckman, J., and Navarro-Lozano, S., 2004, “Using matching, instrumental variables, and control functions to estimate economic choice models,” *Review of Economics and Statistics*, 86: 30-57.
- 平沢和司, 2015, 「世帯所得と子どもの学歴：前向き分析と後向き分析の比較」『2015年SSM調査研究報告書「教育II」』.
- 黒木学, 2017, 『構造的因果モデルの基礎』共立出版.
- Looker, E. D., 1989, “Accuracy of proxy reports of parental status characteristics,” *Sociology of Education*, 62(4): 257-276.
- Miao Wang, Geng Zhi, and Tchetgen, E. T., 2018, “Identifying Causal Effects With Proxy Variables of an Unmeasured Confounder,” *Biometrika*, 105(4): 987-993.
- 中尾走・樊怡舟・村澤昌崇, 2022, 「交絡変数の測定誤差が合流点バイアスをもたらす影響について」『理論と方法』71：(in press) .
- Ogburn, E. L. and VanderWeele, T. J., 2012, “On the Nondifferential Misclassification of a Binary Confounder,” *Epidemiology*, 23(3): 433-439.
- 白川俊之, 2021, 「子どもによる社会経済的背景の報告とその妥当性」『社会と調査』27：64-75.
- Vanderweele, T. J. and Hernan, M. A., 2012, “Results on Differential and Dependent Measurement Error of the Exposure and the Outcome Using Signed Directed Acyclic Graphs,” *American Journal of Epidemiology*, 175(12): 1303-1310.
- Wooldridge, J., 2016, “Should instrumental variables be used as matching variables?,” *Research in Economics*, 70: 232-237.

The Impact of Collider Bias due to Confounder Measurement Error (2): Extension to Models with Multiple Confounding Variables

Abstract

This study focuses on the estimation bias in the regression models with multiple unobservable confounding variables when a proxy for these unobservable confounding variables induces a collider bias simultaneously due to endogenous systematic errors in the measurement. From the result, we confirm that some of the main findings draw by Nakao and others (2022) which discussed models with a single unobservable confounding variable is valid even in the case of multiple confounding variables. Especially, the dilemma between the collider bias and the insufficient control of the confounders also occurs in the models with multiple unobservable confounding variables, which means that it is not the case that the greater the correlation with the proxy variable, the smaller the bias becomes. Moreover, in the model of this paper, where multiple confounding exists, we find that although the way p-bias changes with increasing q (precision of the proxy) is the same as Nakao and others (2022), the asymptote is not necessarily zero. The asymptote is determined by the angle between the coefficient vector T when Q constitutes P and the coefficient vector when Q constitutes A or Y (showed in 4.4.4), which means that it is much more difficult to compare p-bias (bias when the proxy is controlled) with a-bias (bias without any controlling variables) in models with multiple confounding variables.

Keywords

measurement error, collider bias, proxy variable, causal inference

広島大学高等教育研究開発センター
Advancement of Higher Education Research:
RIHE Monograph Series について

『Advancement of Higher Education Research: RIHE Monograph Series (旧ディスカッションペーパーシリーズ)』は、速報性を重視し暫定的にまとめて発信することを目的として企画されたシリーズ (オープン・ジャーナル) です。これまでに、「ディスカッションペーパーシリーズ」として、国際共同研究、公募型研究、戦略的プロジェクト研究、客員研究員による研究等、成果として取りまとめられたものが発信されました。(執筆者の所属は刊行時のものです)

本事業の推進にあたり、以下の資金提供を受けた。記して感謝したい。

JSPS 科研費

- ・JP18K18651 (研究代表者: 村澤昌崇, 「多様な使命と目的を同時最適化する卓越した大学モデルの探索」)
- ・JP19H00621 (研究代表者: 小林信一, 「知のオープン化時代の大学・科学関連システムの再構築」)
- ・JP20H01643 (研究代表者: 村澤昌崇, 「EBPM の批判的検討を通じた高等教育政策・研究の高度化と EIPM への展開可能性」)
- ・JP20J14673 (日本学術振興会特別研究員: 中尾走, 「高等教育政策を事例にした EBPM の批判的検討」)

RIHE Advancement of Higher Education Research
Monograph Series

No.6

2022 (令和 4) 年 4 月 1 日 発行

交絡変数の測定誤差が合流点バイアスをもたらす影響について (2):
複数の交絡変数への拡張

執筆者: 樊 怡舟 (広島大学教育学研究科) 中尾 走 (広島大学教育学研究科・日本学術振興会特別研究員)・村澤 昌崇 (広島大学高等教育研究開発センター)

〒739-8512 広島県東広島市鏡山 1-2-2 電話 (082) 424-6240
<https://rihe.hiroshima-u.ac.jp/>

RIHE 広島大学高等教育研究開発センター