

従属変数の測定誤差が統計的因果推論へ与える影響

樊 怡舟・中尾 走

RIHE Advancement of Higher Education Research

Monograph Series

No.10

1. 問題の所在

本稿の目的は、従属変数の測定誤差が統計的因果推論の分析結果に及ぼす影響を明らかにし、数理モデルによる解析から代理指標の是非を判断するための枠組みを提示することにある。

昨今、根拠に基づく政策立案 (Evidence-based policy making) の興隆もあり、教育政策や教育実践に対する効果検証が求められており、より厳密な手法の適用、中でも因果推論 (Causal Inference) の枠組みが特に重要視されている。

一方で、教育学の場合では、従属変数の多くは構成概念 (construct) である (「能力」「コンピテンシー」「非認知能力」「学力」など)。実証研究をする際には、代理指標に測定できる枠組みに構成概念を操作定義してから、あくまでも代理指標を用いて分析を行わざるを得ない。ゆえに、効果検証に因果推論を適用する以前に、まず代理指標が適切に構成概念を反映できているのかが問われる。これは単に測定の精度の問題のみならず、操作的定義そのものの妥当性問題としても提起されている。例えば、学力論争 (山内・原 2010)、質問紙を用いたコンピテンシー測定への疑義 (細尾 2017, 二宮 2021)、大学ランキングや業績 (論文数, SSCI 論文, IF など) に基づく研究評価の是非 (豊田 2019) など、教育学分野では、教育成果が把握しづらい (塚原 2003) がゆえ、代理指標の妥当性に帰結する議論が特に多い。つまり、理論・規範における「学力」という構成概念と実証・経験において「学力」という測定指標が一致しているわけではない。

ただし、代理指標の妥当性問題は際限がなく、前提となる価値・仮説に起因する。そのため、特に社会科学の場合、ある角度からみれば妥当であるが、異なる角度からみれば妥当ではなく、構成概念を完璧に定義することは不可能に近い。例えば学力研究の文脈では、「学力とは何か」という妥当性の議論を一度棚に上げ、代わりに統計分析に基づく議論で発展してきた経緯がある (川口 2019)。

一方、妥当性の議論を棚上げにして積極的に経験データを分析することも重要だが、それとともに、その分析結果がどの程度、信頼に足るものなのか、どのようなバイアスを伴っているかについても、定量的に検討する必要があるだろう。その足掛かりとして、本稿では、妥当性問題を統計分析の枠組みから捉え直すこととする。特に、代理指標と構成概念の隔たりが、①統計的因果推論にどのようなバイアスをもたらしているのか、②そのようなバイアスによって、回帰係数がどのような挙動をしているのか、を数理モデルから解析する。そのうえで、③代理指標と構成概念

の隔たりが大きくなれば、分析の信頼性が低下すると常識から考えがちだが、本当にそのようなことが言えるのか、特殊な状況において逆の現象が起きうるのはいかといったことについて検討を行っていく。

2. 先行研究の整理と本稿の検討課題

2.1. 代理指標の信頼性・妥当性と測定誤差

そもそも構成概念と代理指標の関係は、信頼性(reliability)と妥当性(validity)⁽¹⁾という二つの視点からの検討が必要である(小杉 2019, p.184)。ここで、信頼性は「測定結果が、一貫しているか」のことで、妥当性は「測りたいものが適切に測れているか」を意味する(Streiner et al. 訳書, 2016)。まさにこの二つの視点から、先行研究では「学力は能力を反映できているのか」という問題意識が生まれる。

上記の信頼性と妥当性は、測定誤差に関する議論としても捉えられる(南風原 2012)。その上で、測定誤差がどのように生じているか(以下、測定誤差の生成過程)によって、分析に異なるバイアスをもたらすと想定される。測定誤差の生成過程は大きく二つに分けられる。一つ目は、測定誤差の発生によって、測りたい構成概念を反映している部分が相対的に薄まることである。つまり、いわゆる測定の信頼性が低いことから生じるバイアスである。二つ目は、測定誤差が他の変数と従属関係になっていること(即ち内生性問題)から、線形回帰を行う際に起きる(内生的)選択バイアス(endogenous selection bias)である。つまり、内的妥当性が低くなり、分析結果の不偏性が保たれないということである。

このように、測定誤差によって多様なバイアスが生じると想定されるが、具体的に統計的因果推論にどのような影響を与えるのであろうか。

2.2. 代理指標の測定誤差に関する先行研究と本稿の課題設定

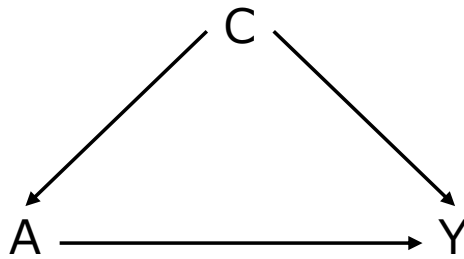


図 1 統計的因果推論で用いる 3 変数

測定誤差が統計的因果推論に与える影響を検討した先行研究は、着目する変数に従って大きく三つに分けられる（図 1）。

まず、処置変数の測定誤差である。処置変数とは、分析者が係数に興味のある変数のことを指し、図 1 の A に当たる。処置変数の測定誤差は、典型的な内生性問題（浅野・中村 2009, Engzell and Jonsson 2015 など）の一つであり、信頼性の低い測定によって生じる測定誤差が、減衰バイアス（attenuation bias）を引き起こすことが知られている。

次に、図 1 の C にあたる交絡変数の測定誤差の問題である。ここで交絡変数とは、処置変数と従属変数の両方に影響を与える要因のことを指す。交絡変数の代理指標を回帰分析に投入することによって、欠落変数バイアス（Omitted variable bias, 以下 OVB）の部分的統制（partial control）が期待できるため、測定誤差の大きさに関わらず、基本的には統制することが推奨される（Elwert and Winship 2014）⁽²⁾。

本稿で着目する従属変数の測定誤差についても、VanderWeele and Hernan (2012) や Nab et al. (2019) などが言及している。信頼性の低い測定によって減衰バイアスが生じること、そして処置変数との関連性によって多様な影響が生じることが指摘されている。ただ、それらの議論はいずれもランダム化比較試験（Randomized Control Trials）による実験データをベースにしており、基本的に二値変数を想定している。ゆえに、観察データを扱うことが多く、構成概念を連続量の変数として扱うことがある社会科学の研究に上記の知見を適用するには、社会科学固有の文脈を考慮してモデルを拡張する必要がある。

加えて、代理指標の測定誤差に関する最近の動向として無視できないのは、中尾ほか (2022) と樊ほか (2022) の指摘である。一般的に、測定誤差が小さいことが精緻な統計的因果推論に繋がると考えられてきたが⁽³⁾、それらの研究は、交絡変数

の測定誤差が内生性問題を引き起こす場合、測定誤差の抑制は必ずしも因果効果の推定をより正確なものにしていなかったことを明らかにした。これらの研究成果を念頭に、従属変数の場合でも、場合によって、測定誤差の抑制にもかかわらず、因果効果の推定バイアスが逆に拡大するという現象が起きることも考えられる。

この点を十分に意識し、本稿では、従属変数の測定誤差に焦点を当て、数理モデルの構築によって測定誤差がいかに関因果推論の分析結果に影響を及ぼすかについて検討していく。次の3節では、数理モデル構築のための本稿のモデル設定を明示し、4節では、従属変数の測定誤差が生じている場合の分析結果への影響を数理モデルから解析する。そのうえで、5節では、因果効果の推定値の挙動を数理モデル及びシミュレーションから解明し、6節で知見のまとめと今後の課題を提示する。

3. モデル設定

本稿では、数理モデル及びシミュレーションによって、従属変数の測定誤差が統計的因果推論の分析結果に及ぼす影響を明らかにする。実際に、観察データを用いた効果検証では、交絡変数として考えられる要因は複数存在している場合が一般的であるが、本稿では、説明を簡易にするために、まずは交絡変数一つというモデルを作成することとする。また、数理モデル構築に当たって、便宜的に全てのパラメータが正であり、変数間の全ての関係性が線形関係であることを前提とする。

3.1. データ生成過程

まず、処置変数 A 、従属変数 Y 、一つの交絡変数 C が存在するというモデルのデータ生成過程を記述する。ここでは、 A 、 Y 、 C は全て正規化されたものとする⁽⁴⁾。また、 ρ_A 、 ρ_Y は A と Y の誤差分散である。

$$U_A \sim N(0, \sqrt{\rho_A})$$

$$U_Y \sim N(0, \sqrt{\rho_Y})$$

$$C \sim N(0, 1)$$

$$A = \beta_2 C + U_A$$

$$Y = \beta_1 A + \beta_3 C + U_Y$$

このような設定を有向非巡回グラフ (Directed Acyclic Graph, 以下 DAG) で示すと前節の図1と同様となる。一般的に、 A の因果効果を推定したいという目的の元、 A の Y に対する因果効果 (以下、処置効果) が不偏性を満たすためには、交絡

変数 C を統制する必要がある。もし統制しない場合、 $OV B$ が発生し、その際の A の回帰係数 b_1^{**} は次の式で表される (Angrist and Pischke 2014)。なお、 $var(A)$ と $var(C)$ はそれぞれ A と C の分散で、本稿では正規化しているのでいずれも 1 である。

$$b_1^{**} = \beta_1 + \beta_2\beta_3 \cdot \frac{var(C)}{var(A)} = \beta_1 + \beta_2\beta_3 = \beta_1 + q_1$$

b_1^{**} は、 A と Y の真の因果効果である β_1 と、 $OV B$ に当たる $\beta_2\beta_3$ という部分からなる。ここで、 $q_1 = \beta_2\beta_3$ と置くと、 q_1 は交絡変数 C がもたらすバイアスの程度と言える。 A 、 C と Y が正規化されているもの、そしてすべてのパラメータが正であることを踏まえ、 q_1 、 ρ_Y と ρ_A を用いて β_1 、 β_2 と β_3 は、次のように書き換えることが可能である。

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -q_1 + \sqrt{-\frac{\rho_A}{1-\rho_A}q_1^2 + 1 - \rho_Y} \\ \beta_2 &= \sqrt{1-\rho_A} \\ \beta_3 &= \frac{q_1}{\sqrt{1-\rho_A}} \end{aligned}$$

3.2. 代理指標 Y^* の生成

一方、本稿の問題設定では、 Y は直接的に観測できない構成概念であり、実証研究をする際には代替的に代理指標 Y^* を回帰分析の従属変数として用いることになる。

そこで、 Y^* の生成過程について、Nab et al. (2019) を参考に、次のように設定し、 Y^* も正規化されたものとする。なお、 Y と U_{Y^*} は独立しているとし、 ρ_{Y^*} は Y の誤差分散 $var(U_{Y^*})$ である。

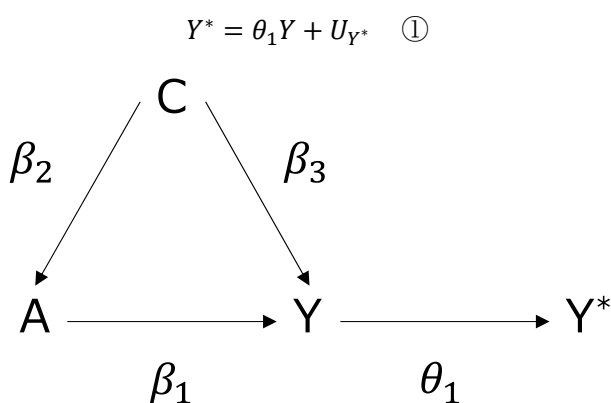


図 2 本稿の設定の DAG

Y 、そして Y^* は正規化されているため、 θ_1 と U_{Y^*} は、式②を満たす。

$$\theta_1^2 + \rho_{Y^*} = 1 \quad \text{②}$$

θ_1^2 は、 Y^* の分散うち、本来想定している構成概念 Y によって決まる部分の割合を示しており、一方、 ρ_{Y^*} はすなわち Y^* の分散のうち、測定誤差 U_{Y^*} によって決まる部分の割合である。このことを踏まえ、代理指標が構成概念を反映している部分の大きさを示す指標として、両者の比 $(\frac{\theta_1^2}{\text{var}(U_{Y^*})})$ を q_2 と置く。 q_2 が大きければ、測定誤差が抑えられ、代理指標 Y^* と構成概念 Y との相関も高くなり、構成概念を良く反映している代理指標となる。式②に基づく、 ρ_{Y^*} と θ_1 は、 q_2 を用いて次のように書き換えられる。

$$\rho_{Y^*} = \frac{1}{q_2 + 1}$$

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{q_2}{q_2 + 1}}$$

q_2 をより具体的に説明すると、 q_2 が小さいということは、分母である測定誤差 U_{Y^*} の分散が大きいことであり、信頼性の低い測定と言えよう。逆に、信頼性が高い測定を行なった場合、 q_2 が相対的に大きくなる。それでは、従属変数の測定誤差によって、どのようなバイアスが生じているのかを次節で明らかにしていく。

4. 代理指標 Y^* を従属変数にした際のバイアス

4.1. U_{Y^*} が完全に外生的である場合

この場合を図で示すと以下のようなになる。

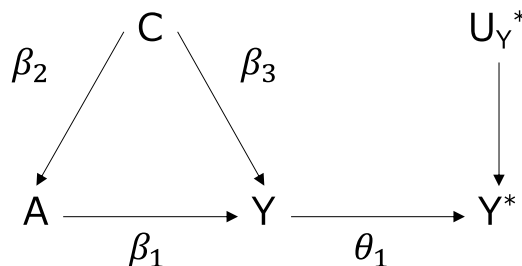


図3 U_{Y^*} が完全に外生的である場合に想定される DAG

DAG は、基本的に誤差項を描かないが (Pearl 訳書 2009)、測定誤差の問題を取り

上げる際には、分かりやすくするために、あえて描くこともあり (VanderWeele and Hernan 2012 など), 本稿も同様の理由で誤差項を描いている。また, 上記の図では, U_Y^* が Y^* の誤差項を示している。

この場合, Y^* を従属変数に, 交絡変数 C を統制したうえで A の回帰分析を行うと, A の係数は, $b_1 = \beta_1\theta_1$ となり, Y に対する真の係数 β_1 を θ_1 倍したとも捉えられる。このことは媒介分析でいう間接効果の計算と一致している。式②より, θ_1 は必ず1以下になることから, $b_1 < \beta_1$ ということが分かる。つまり, この場合に代理指標 Y^* を従属変数とすると, A の処置効果が必ず過小評価されることになる。その時のバイアスは, $\beta_1 - b_1 = (1 - \theta_1)\beta_1 = \left(1 - \sqrt{\frac{q_2}{q_2+1}}\right)\beta_1$ であり, 大きさは q_2 に依存すると言えよう。このことは, 代理指標 Y^* における外生的な測定誤差が占める割合が大きいほど (q_2 が小さいほど), 代理指標 Y^* に対して, A という処置変数が Y を通して影響を及ぼしている部分が小さくなることと解釈できる。

ただし, 過小推定にはなるが, 推定値 b_1 と真値 β_1 の符号は常に同じである。このようなバイアスは「減衰バイアス」と呼ばれており, 推定値そのものは真値と大きく異なる場合もあるが, 符号が異なることはない。

つまり, 測定誤差が小さい代理指標 (q_2 が大きい) であれば, A の処置効果の推定バイアスは小さくなるといえる。しかしながら, 外生的な測定誤差は本質的に減衰バイアスをもたらしているにすぎないので, 処置効果がプラスかマイナスかのみを検討したいのであれば, 外生的な測定誤差はさほど支障をもたらしていないともいえよう。なお, このような事実は既に知られており, Nab et al. (2019)等が指摘しているが, 本稿の以下の設定へ拡張する過程で, 共有しておく必要がある為, 取り上げている⁽⁵⁾。

4.2. U_Y^* が A または C と相関する場合

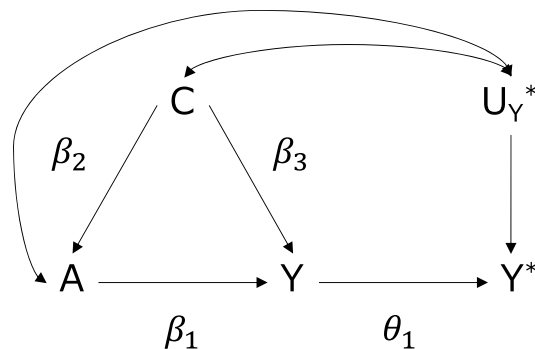


図4 U_{Y^*} がAまたはCと相関する場合に想定される DAG

もし測定誤差 U_{Y^*} は外生的ではなく、AとCとの相関関係が想定される場合に、因果効果の推定にどのようなバイアスが生じるだろうか。まず、この場合の回帰式は、以下のようなになる。

$$Y^* = b_1A + b_2C$$

上記の回帰式に従って、交絡変数Cを統制した時の、処置変数Aの回帰係数 b_1 は次の式で求められる。

$$b_1 = \frac{\text{cor}(A, Y^*) - \text{cor}(A, C) \cdot \text{cor}(C, Y^*) \frac{\text{std}(Y^*)}{\text{std}(A)}}{1 - \text{cor}(A, C)^2} \quad \textcircled{3}$$

そして、式④、⑤のように変形していくことで、 b_1 は、 $\text{cor}(A, U_{Y^*})$ 、 $\text{cov}(C, U_{Y^*})$ を用いて書き換えることができる。まず、A、C、Yそして Y^* が正規化されていて、分散が1であることから、 $\text{cor}(A, Y^*) = \text{cov}(A, Y^*)$ 、 $\text{cor}(C, Y^*) = \text{cov}(C, Y^*)$ ということをもとに、式③は式④のように書き換えることが出来る。

$$b_1 = \frac{\text{cov}(A, Y^*) - \text{cor}(A, C) \cdot \text{cor}(C, Y^*)}{1 - \text{cor}(A, C)^2} \quad \textcircled{4}$$

そのうえで、 $Y^* = \theta_1 Y + U_{Y^*}$ を式④に代入すると、共分散の性質（西山 2019, p. 64）を利用して次のように展開できる。

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\text{cov}(A, \theta_1 Y + U_{Y^*}) - \text{cor}(A, C) \cdot \text{cov}(C, \theta_1 Y + U_{Y^*})}{1 - \text{cor}(A, C)^2} \\ b_1 &= \frac{\text{cov}(A, \theta_1 Y) + \text{cov}(A, U_{Y^*}) - \text{cor}(A, C) \cdot [\text{cov}(C, \theta_1 Y) + \text{cov}(C, U_{Y^*})]}{1 - \text{cor}(A, C)^2} \\ b_1 &= \frac{\theta_1 \text{cor}(A, Y) + \sqrt{\rho_{Y^*}} \text{cor}(A, U_{Y^*}) - \text{cor}(A, C) \cdot [\theta_1 \text{cor}(C, Y) + \sqrt{\rho_{Y^*}} \text{cor}(C, U_{Y^*})]}{1 - \text{cor}(A, C)^2} \quad \textcircled{5} \end{aligned}$$

図4で示した DAG をもとに、次の三つの相関係数は、次のようになる。

$$\text{cor}(A, Y) = \beta_1 + \beta_2 \beta_3$$

$$\text{cor}(A, C) = \beta_2$$

$$\text{cor}(C, Y) = \beta_2 \beta_1 + \beta_3$$

それらを式⑤に代入して整理すると、式⑥が得られる。

$$b_1 = \frac{\theta_1 (\beta_1 + \beta_2 \beta_3) + \sqrt{\rho_{Y^*}} \text{cor}(A, U_{Y^*}) - \beta_2 \cdot [\theta_1 (\beta_2 \beta_1 + \beta_3) + \sqrt{\rho_{Y^*}} \text{cor}(C, U_{Y^*})]}{1 - \beta_2^2}$$

$$b_1 = \theta_1 \beta_1 + \frac{\sqrt{\rho_{Y^*}}}{1 - \beta_2^2} (\text{cor}(A, U_{Y^*}) - \beta_2 \cdot \text{cor}(C, U_{Y^*})) \quad \textcircled{6}$$

式⑥のように、 b_1 を $\text{cor}(A, U_{Y^*})$ 、 $\text{cov}(C, U_{Y^*})$ などで表記することができた。ここで、処置変数 A は交絡変数と誤差項 U_A から生成されているため、 $\text{cor}(A, U_{Y^*})$ はさらに $\text{cor}(C, U_{Y^*})$ と $\text{cor}(U_A, U_{Y^*})$ に分解した上で、式⑥は次のように展開できる。

$$\begin{aligned} b_1 &= \theta_1 \beta_1 + \frac{1}{1 - \beta_2^2} (\text{cov}(\beta_2 C + U_A, U_{Y^*}) - \beta_2 \text{cov}(C, U_{Y^*})) \\ &= \theta_1 \beta_1 + \frac{1}{1 - \beta_2^2} (\beta_2 \text{cov}(C, U_{Y^*}) + \text{cov}(U_A, U_{Y^*}) - \beta_2 \text{cov}(C, U_{Y^*})) \\ &= \theta_1 \beta_1 + \frac{\sqrt{\rho_{Y^*}}}{\sqrt{\rho_A}} \text{cor}(U_A, U_{Y^*}) = \beta_1 \sqrt{\frac{q_2}{q_2 + 1}} + \frac{\text{cor}(U_A, U_{Y^*})}{\sqrt{\rho_A}} \sqrt{\frac{1}{q_2 + 1}} \quad \textcircled{7} \end{aligned}$$

式⑦を導く過程からわかるように、 $\text{cor}(A, U_{Y^*})$ を分解して展開を行なっていくと、式⑥のうち $\text{cor}(C, U_{Y^*})$ に関する項が消失する。そのことから、仮に U_{Y^*} は完全に外生的でなくとも、交絡変数 C を回帰式に投入していれば、 $\text{cor}(C, U_{Y^*})$ が起因する内生性問題も統制されることとなり、 $\text{cor}(U_A, U_{Y^*})$ のみ A の回帰係数 b_1 の推定にバイアスをもたらしているということが確認できる。

これは例えば、非認知能力を従属変数とした統計分析の事例などが考えられるだろう。非認知能力は1から7段階の順序尺度などで測定すると、リファレンス・バイアス(reference bias)が生じることが指摘されている(Heckman and Kautz 2013)。この場合、Aが教育、Cが出身階層、Yが非認知能力、 Y^* が測定された非認知能力、 U_{Y^*} がリファレンス・バイアス(reference bias)というDAGが考えられる。そこで、もしリファレンス・バイアスが処置変数Aの教育ではなく、交絡変数Cの出身階層によって引き起こされている場合、本節の数理モデルから導いた通り、回帰分析でCを統制していれば処置効果の推定に関してバイアスが生じないということが分かる。とはいえ、交絡変数の存在は全く影響を及ぼしていないわけではない。次節以降で検討するように、交絡変数Cの統制により、処置変数のVIFが拡大し、処置効果に含まれる $\text{cor}(C, U_{Y^*})$ に起因しない推定バイアスはそれに応じて拡大していく。これは、本稿の問題設定において、図4のDAGにおいてバックドア基準を満たす交絡変数Cを統制すれば処置変数Aの推定は不偏性を満たすといった短絡的な議論で片付けられない可能性を示している。

5. b_1 の範囲と挙動

式⑦から分かるように、代理指標 Y^* を従属変数とした時の A の回帰係数 b_1 は、

$$\beta_1 \sqrt{\frac{q_2}{q_2+1}} \text{ (第一項) と } \frac{\text{cor}(U_A, U_{Y^*})}{\sqrt{\rho_A}} \sqrt{\frac{1}{q_2+1}} \text{ (第二項) という二つの部分から構成されている。}$$

前者はすなわち 4.1 で説明した代理指標による減衰バイアス、後者は、 $\text{cor}(A, U_{Y^*})$ が引き起こした内生性問題による選択バイアスである。

実は、 $\text{cor}(U_A, U_{Y^*})$ の符号が β_1 と同じくプラスである限り、A の回帰係数 b_1 の値も必ずプラスである。つまり、減衰バイアスと同様に、処置効果の真値の符号の判断に支障は出ないということになる。これを二つの項で説明すると、内生性問題によって引き起こされた第二項がプラスのバイアスをもたらしており、第一項の減衰バイアスによって生じた過小推定部分を真値の方向へ戻しているとも捉えられる。

そういう意味では、稀だが、内生性問題によって正の方向へと生じる選択バイアスがちょうど負の方向へ生じる減衰バイアスと相殺して、結果的に A の回帰係数 b_1 がたまたま真値 β_1 と等しくなるという特殊な状況も考えられる。

一方、 $\text{cor}(U_A, U_{Y^*})$ の符号がマイナスであれば、第二項の内生性問題によるバイアスの部分も符号がマイナスになる。この場合、処置効果の推定は、第一項の減衰バイアスと第二項の選択バイアスの影響で二重に過小評価されることとなる。減衰バイアスが生じていたとしても、推定値の符号に影響は出ないが、第二項によるマイナスの選択バイアスが激しく生じている場合に、真値 β_1 がプラスにも関わらず、 b_1 がマイナスとなる状況もありうる。

もともと、 q_2 が 0、即ち代理指標が完全に測定誤差で構成されている場合（信頼性が極端に低い測定など）、第一項が 0 となるため、A の回帰係数 b_1 は、 $\text{cor}(U_A, U_{Y^*})$ による選択バイアスのみ（第二項）となることは式⑦から簡単にわかる。即ち、式⑦

$$\text{は、} \lim_{q_2=0} b_1 = \frac{\text{cor}(U_A, U_{Y^*})}{\sqrt{\rho_A}} \text{である。このことから、} \text{cor}(U_A, U_{Y^*}) \text{がマイナスである限り、} q_2$$

が 0 に十分近い時に、選択バイアスの影響が相対的に大きいため、 b_1 がマイナスとなると予想できる。その結果、処置効果の真値 β_1 の符号すら誤って推定されることとなる。

対して、 $\text{cor}(U_A, U_{Y^*})$ の符号と関係なく、 q_2 が無限大、即ち、測定誤差が全く起きていない（信頼性と妥当性の高い構成概念を完全に反映している代理指標）状況では、A の回帰係数 b_1 の値は最終的に処置効果の真値 β_1 に漸近していくことは式⑦から確

認できる。即ち $\lim_{q_2 \rightarrow \infty} b_1 = \beta_1$ である。

それでは、 q_2 が0から無限大に向けて大きくなっていくにつれ（測定誤差が徐々に抑えられ、構成概念を適切に反映している代理指標になる）、推定値 b_1 は具体的にどのような挙動をするのだろうか。その挙動は、 β_1 、 $\text{cor}(U_A, U_{Y^*})$ と ρ_A など他のパラメータとどのように関連しているのか。以下、これらの点について検討していく。

5.1. b_1 の範囲：切片と漸近値

ここで、 $\sqrt{\frac{1}{q_2+1}}$ と $\sqrt{\frac{q_2}{q_2+1}}$ の平方和が1であることから、 $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ を用いて、次のように、 φ の正弦と余弦で表すことが可能である。

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{q_2}{q_2+1}} = \sin\varphi \\ \sqrt{\frac{1}{q_2+1}} = \cos\varphi \end{cases} \quad (8)$$

式⑧から分かるように、 q_2 が大きい場合、 $\sin\varphi$ も大きくなるため、 φ も大きくなり、それに応じて $\cos\varphi$ は小さくなる。なお、 $\sqrt{\frac{q_2}{q_2+1}}$ と $\sqrt{\frac{1}{q_2+1}}$ はいずれも必ずプラスなので、 $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ とする。したがって、 b_1 の推定値は式⑨のように書き換えられる。

$$b_1 = \beta_1 \sin\varphi + \frac{\text{cor}(U_A, U_{Y^*})}{\sqrt{\rho_A}} \cos\varphi \quad (9)$$

式⑨の範囲を求めるために、さらに次の式を満たす ω を設定する。

$$\begin{cases} \frac{\beta_1}{\sqrt{\beta_1^2 + \frac{\text{cor}(U_A, U_{Y^*})^2}{\rho_A}}} = \cos\omega \\ \frac{\frac{\text{cor}(U_A, U_{Y^*})}{\sqrt{\rho_A}}}{\sqrt{\beta_1^2 + \frac{\text{cor}(U_A, U_{Y^*})^2}{\rho_A}}} = \sin\omega \end{cases} \quad (10)$$

式⑩からわかるように、 $\cos\omega$ は必ずプラスだが、 $\sin\omega$ の符号は $\text{cor}(U_A, U_{Y^*})$ によって決まる。 U_A と U_{Y^*} が、プラスの相関を持っている場合に、 $\sin\omega$ はプラスになり、対して、 U_A と U_{Y^*} が、マイナスの相関を持っている場合に、 $\sin\omega$ もマイナスになる。総じて、 ω の範囲は、 $-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$ とすることができる。そして、式⑩より、 ω は

β_1 , $cor(U_A, U_{Y^*})$ と ρ_A によって変化するため、 q_2 に依存していない。加えて、 $\frac{cor(U_A, U_{Y^*})}{\sqrt{\rho_A}}$ がマイナスの方向に0から離れるほど ω が小さくなっていく。つまり、 $cor(U_A, U_{Y^*})$ がマイナスで ρ_A が小さいほど、 ω が $-\frac{\pi}{2}$ に近づいていく。逆に、 $\frac{cor(U_A, U_{Y^*})}{\sqrt{\rho_A}}$ がプラスの方向に0から離れるほど ω が大きくなっていく。つまり、 $cor(U_A, U_{Y^*})$ がプラスで ρ_A が小さいほど、 ω が $\frac{\pi}{2}$ に近づいていく。以上のことを踏まえると、 b_1 の計算式は式⑩のように書き換えられる。

$$b_1 = \sqrt{\beta_1^2 + \frac{cor(U_A, U_{Y^*})^2}{\rho_A}} (\cos\omega \sin\varphi + \sin\omega \cos\varphi) = \frac{\beta_1}{\cos\omega} \sin(\varphi + \omega) \quad \text{⑩}$$

他のパラメータが一定の下で、 q_2 のみ変化するとすれば、式⑩における $\varphi + \omega$ の範囲は、 $\omega < \varphi + \omega < \omega + \frac{\pi}{2}$ になる。さらに、 q_2 の増加によって $\varphi + \omega$ という角度も大きくなる。

5.2. b_1 の挙動の計算とシミュレーション

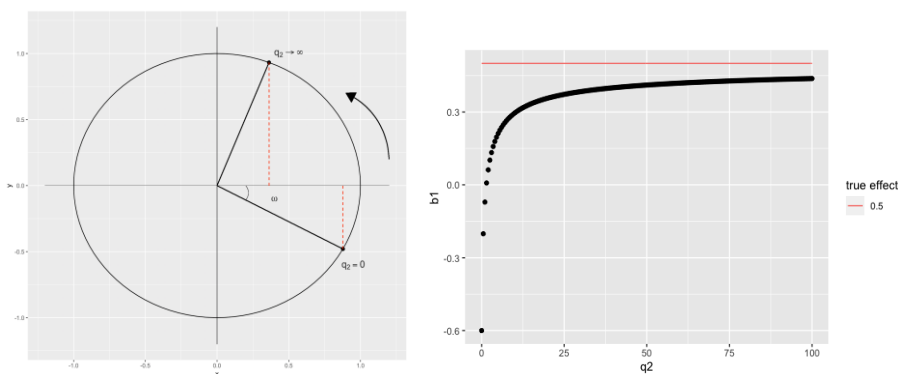
q_2 の変化に応じて、 b_1 はどう挙動するかについて次のように検討できる。以上を踏まえて、 q_2 の変化による b_1 の挙動を調べるために、 $\sin(\varphi + \omega)$ の範囲を計算しなければならないことが分かる。 $\sin(\varphi + \omega)$ の範囲は、 ω の値によって以下のようにいくつかの場合に分けて検討する必要がある。

① $-\frac{\pi}{2} < \omega < 0$ の場合

この場合、 $cor(U_A, U_{Y^*})$ がマイナスである。図5左から読み取れるように、 $\sin(\varphi + \omega)$ (即ち点線の部分) は、次の式を満たしている。

$$\sin(\omega) \leq \sin(\varphi + \omega) < \sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \cos(\omega)$$

しかるに、 b_1 の範囲は次の式のようになる。



$$\frac{\beta_1}{\cos\omega} \sin(\omega) = \frac{\text{cor}(U_A, U_{Y^*})}{\sqrt{\rho_A}} \leq b_1 = \frac{\beta_1}{\cos\omega} \sin(\varphi + \omega) < \frac{\beta_1}{\cos\omega} \cos(\omega) = \beta_1$$

図5 $\text{cor}(U_A, U_{Y^*})$ の場合の b_1 の範囲（左図）と挙動（右図）

整理すると、 $\text{cor}(U_A, U_{Y^*})$ がマイナスの場合、 q_2 の変化によって b_1 は次のように変化する。 $q_2 = 0$ の時に、 b_1 は $\text{cor}(U_A, U_{Y^*})$ という内生性問題による選択バイアスの大きさ、即ち $\frac{\text{cor}(U_A, U_{Y^*})}{\sqrt{\rho_A}}$ によって、真値 β_1 と逆の符号に誤って推定されることとなる。その後、 q_2 の増加とともに、推定値 b_1 も大きくなっていき、やがて推定値 b_1 は符号がプラスになり、そして徐々に真値 β_1 に漸近していく（図5右を参照）。

② $0 \leq \omega$ の場合

この場合、 $\text{cor}(U_A, U_{Y^*})$ が非負である。図7から読み取れるように、 $\varphi + \omega = \frac{\pi}{2}$ の時に、 $\sin(\varphi + \omega)$ の余弦が1となるので、 $\sin(\varphi + \omega)$ （即ち点線の部分）は次の式を満たしている。

$$\min\left\{\sin(\omega), \sin\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right\} \leq \sin(\varphi + \omega) < \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

しかるに、 b_1 の範囲は、次の式のようになる。

$$\min\left\{\frac{\text{cor}(U_A, U_{Y^*})}{\sqrt{\rho_A}}, \beta_1\right\} < b_1 = \frac{\beta_1}{\cos\omega} \sin(\varphi + \omega) < \frac{\beta_1}{\cos\omega}$$

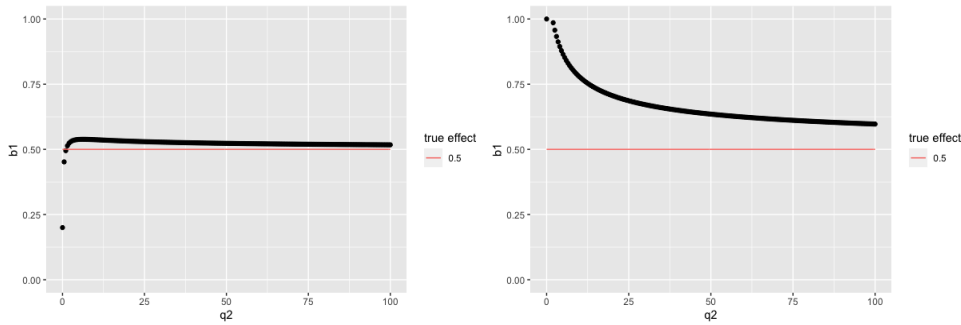


図6 $0 \leq \omega$ の場合の b_1 の挙動（左図： $0 \leq \omega < \frac{\pi}{4}$ 、右図： $\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{2}$ ）

整理すると $\text{cor}(U_A, U_{Y^*})$ が式⑫を満たす場合、 q_2 の変化によって b_1 は次のように変化する。 $q_2 = 0$ の時に、推定値 b_1 は $\text{cor}(U_A, U_{Y^*})$ という内生性問題による選択バイアスの大きさ、即ち $\frac{\text{cor}(U_A, U_{Y^*})}{\sqrt{\rho_A}}$ であるが、真値 β_1 の符号の推定に支障は出ない。その後、 q_2

の増加とともに、推定値 b_1 も大きくなり、いったん最大値をとった後、徐々に小さくなっていき、最終的に真値 β_1 に漸近していく（図6参照）。

さらに、図7左図、そして、図6左図のシミュレーションの結果から確認できるように、 $0 \leq \omega < \frac{\pi}{4}$ の時に、 $\sin(\omega) < \sin\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$ ということになる。即ち、 q_2 が大きくなっていくにつれ、 b_1 は最大値になるまでの間に、一度ちょうど真値 β_1 とまったく同値になるという特殊な状況も存在している。これは、5節の冒頭で議論した、プラスの内生性問題による選択バイアスがちょうどマイナスの減衰バイアスを相殺することによって引き起こされる。その時の φ の値は、次の式を満たす。

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\omega \quad (12)$$

対して、 $\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{2}$ であれば、 $\sin(\omega) > \sin\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)$ ということになる。 q_2 が0の時の推定値 b_1 がすでに真値 β_1 より大きくなり、その後はさらに最大値をとった後に、徐々に小さくなっていき、最終的に真値 β_1 に漸近していくので、真値 β_1 と同値になることはない（図6右図参照）。

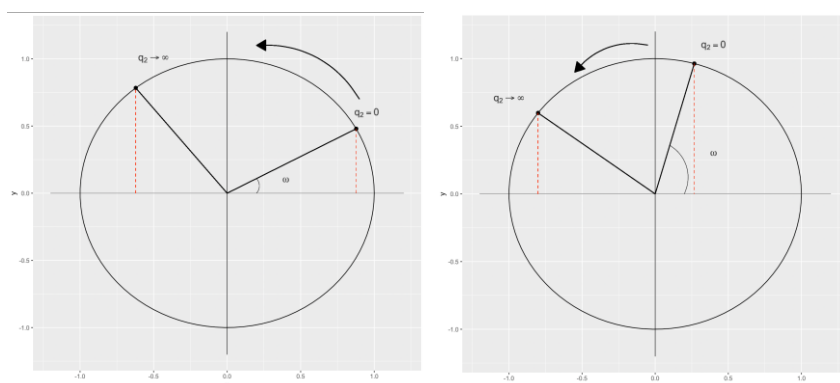


図7 $0 \leq \omega$ の場合の b_1 の範囲（左図： $0 \leq \omega < \frac{\pi}{4}$ ，右図： $\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{2}$ ）

いずれにしても、 $\text{cor}(U_A, U_{Y^*})$ がプラスの場合、 b_1 の最大値は真値 β_1 より大きいことから、最大値になるまでの間に、 q_2 の増大は、 b_1 と β_1 との差分、つまりは真値とのバイアスを大きくすることにつながる。即ち、この範囲においては、測定誤差の小さなより良い代理指標（即ち q_2 が大きくなること）にもかかわらず、処置効果のバイアスは逆に大きくなるという現象が起きているのである。

5.3. ρ_A が b_1 の挙動に与える影響及びその含意

これまで、 q_2 の変化による b_1 の挙動を確認してきた。一方、 β_1 と $cor(U_A, U_{Y^*})$ が一定という条件の下で、 ρ_A はいかに b_1 の挙動に影響を及ぼしているのだろうか。結論からいうと、 $\sqrt{\rho_A}$ が小さければ小さいほど、推定値 b_1 の挙動は極端な値をとりやすい。

まず、すでに論じたように、内生性問題の影響は、 $\frac{cor(U_A, U_{Y^*})}{\sqrt{\rho_A}}$ である。 $cor(U_A, U_{Y^*})$ が一定の場合、 ρ_A が小さいほど、推定値 b_1 は、 $cor(U_A, U_{Y^*})$ の影響を相対的に大きく受けることとなる。即ち、内生性問題による選択バイアスが拡大する。その結果、挙動の切片、即ち q_2 が0の時の推定値 b_1 は、より極端な値をとりやすくなる。

また、 ρ_A が小さくなるにつれ、 $\sqrt{\beta_1^2 + \frac{cor(U_A, U_{Y^*})^2}{\rho_A}} = \frac{\beta_1}{\cos\omega}$ が大きくなる。ゆえに、 $cor(U_A, U_{Y^*})$ がプラスの場合、 b_1 の最大値が大きくなる。また、プラスの内生性問題による選択バイアスがちょうどマイナスの減衰バイアスと相殺するという状況が起きる場合、 $\sqrt{\rho_A}$ が小さくなると、その相殺が q_2 のより小さいときに起きるということが式⑫から分かる。

整理すると、 ρ_A が小さいと、 q_2 の変化による b_1 の挙動が激しくなり、極端な値になりやすく、推定が不安定になるといえる。 ρ_A の定義に立ち戻って考えると、 ρ_A は即ち処置変数Aの分散のうち、交絡変数Cによって説明されない部分のことである。回帰式でCが統制されている以上、 $\frac{1}{\rho_A}$ は多重共線性の指標VIFと同義的になる。そのような捉え方をすると、 ρ_A が極端に小さい場合に起きる現象は、多重共線性が激しく発生することによって、 b_1 の推定が不安定になることが原因である。一般的に、多重共線性は、推定値の標準誤差を拡大させる要因として知られており、有意性こそ検出しにくくなるのだが、推定値 b_1 の不偏性に支障は出ないとされている。しかし、本稿のこれまでの計算で示した通り、本稿の設定においては、測定誤差によって内生性問題が生じている場合に、選択バイアス（式⑦の第二項）は、VIFに比例して拡大することを示している。

6 まとめ

本稿は、従属変数の測定誤差が統計的因果推論の分析結果に及ぼす影響を数理モデル構築とその解析から明らかにしてきた。具体的には、本稿の知見は以下のよう
にまとめられる。

一つ目に、従属変数の測定誤差 U_Y^* が完全に外生的である場合、推定値 b_1 には減衰

バイアスが生じることが知られていたが（4.1節）、従属変数の測定誤差 U_Y^* が処置変数Aまたは交絡変数Cと相関する場合に、内生性問題による選択バイアスが発生する。一方、回帰式で交絡変数Cを統制している場合、Cと U_Y^* の相関は、処置効果の推定にバイアスをもたらさないようになることが分かった（4.2節）。

二つ目に、推定値 b_1 の変化の範囲を求めた結果、次のことが分かった。測定の信頼性が極端に低い($q_2 = 0$) 場合、Aの回帰係数 b_1 は、 $cor(U_A, U_Y^*)$ による選択バイアスであり、一方で、測定誤差が全く起きていない($q_2 \rightarrow \infty$) 場合、Aの回帰係数 b_1 は処置効果の真値 β_1 に漸近していく（5節）。

三つ目に、測定誤差がマイナスの選択バイアスを引き起こした場合、代理指標における測定誤差の割合が小さくなる(q_2 が大きくなる)につれ、推定値 b_1 は、最初はマイナスで、その後、 q_2 の増加とともに、推定値 b_1 も大きくなっていき、やがて推定値 b_1 は符号がプラスになり、徐々に真値 β_1 に漸近していく。シミュレーションの結果からわかるように、この場合、処置効果の符号まで誤って推定されてしまう可能性がある（5.2節②）。

四つ目に、測定誤差がマイナスの選択バイアスを引き起こした場合、代理指標における測定誤差の割合が小さくなる(q_2 が大きくなる)につれ、推定値 b_1 は、まず大きくなり、いったん最大値をとった後、徐々に小さくなっていき、最終的に真値 β_1 に漸近していく。推定値 b_1 は常にプラスということから、バイアスが発生するものの、真値 β_1 の符号の推定に支障は出ない。ただ、この場合に、 b_1 が最大値になるまでの間に、測定誤差の抑制（即ち q_2 が大きくなること）が逆に推定バイアスの拡大につながるという現象が起きる（5.2節③）。

五つ目に、処置変数Aの分散のうち、交絡変数Cによって説明されない部分 ρ_A が小さいと、 b_1 の挙動が激しくなり、極端な値になりやすく、推定が不安定になる。それはCとAの両方を回帰式に投入することによる多重共線性が原因である。つまり、測定誤差によって内生性問題が生じている場合に、多重共線性は選択バイアスの拡大につながる（5.3節）。

教育学の分野では、従属変数は教育成果のような構成概念が多く、結果的に何等かの代理指標で分析を進めざるを得ない。その際に、本稿の取り組みはどのような影響が生じているか、即ち代理指標の妥当性を考察するためのフレームワークとして活用できる。本稿の結論からいうと、代理指標の妥当性を考察するには、代理指標の測定誤差の大きさを見積もるだけでなく、内生性問題や多重共線性と合わせて考慮する必要がある。処置効果の真値と同方向の内生性問題が起きている場合、推

定バイアスが大きくても処置効果の符号の判断に支障は出ない。一方、逆方向の内
生性問題が起きている場合、特に多重共線性が強く起きていれば、符号を間違っ
て推定されるリスクが高いといえる。

しかしながら、本稿はあくまで一つの交絡変数が存在するモデルを想定しており、
実際の観察データを用いた分析では、複数の交絡が存在し、しかも統制できないも
のもあることが現実が多いであろう。そういった設定を取り入れることによって、
測定される代理指標に含まれる誤差項の状況から「推定バイアス」を逆算する感度
分析のフレームワークに応用できるようになる。そのようなインプリケーションを
目指し、さらなるモデルの一般化・精緻化を今後の課題とする。

〈注〉

- (1) 妥当性には多様な定義があるが(村山 2012)、南風原(2012)など妥当性とい
う言葉が用いられていることから、「妥当性」という言葉を用いていく。
- (2) ただし、Frost(1979)は、代理指標による部分的統制が必ずしも望ましいわ
けではないことを指摘している。
- (3) 例えば、親の出身階層などの変数で測定誤差が生じないような調査設計(前
向き調査)が望まれてきたし(平沢 2018)、調査で得られた中学3年時の成績を
怪しげな指標(中澤 2022)として取り上げる例などが挙げられる。
- (4) この先も本稿では全ての変数が正規化されているものとして取り上げるため、
回帰式の切片項は記していない。
- (5) なお、本稿では処置効果の不偏性のみ取り上げているが、有効性が満たされ
ないという性質もある(Nab et al. 2019)。

〈引用文献〉

Angrist, Joshua. D., and, Jörn-Steffan Pischke, 2014, *Mastering' metrics*,
Princeton University Press.

浅野哲・中村二郎, 2009, 『計量経済学』有斐閣。

Elwert, Felix and Christopher Winship, 2014, “Endogenous Selection Bias,”
Annual Review of Sociology, Vol. 40, No. 1, pp. 31-53.

Engzell, per and Jonsson, J. O., 2015, “Estimating Social and Ethnic Ineq
uality in School Surveys,” *European Sociological Review*, Vol. 31, No. 3,
pp. 312-325.

- 樊怡舟・中尾走・村澤昌崇, 2022, 「交絡変数の測定誤差が合流点バイアスをもたらす影響について (2)」『Advancement of Higher Education Research: RIHE Monograph Series』6, pp.1-23.
- Frost, P. A., 1979, “Proxy Variables and Specification Bias,” *The Review of Economics and Statistics*, Vol.61, No.2, pp.323-325.
- 南風原朝和, 2012, 「尺度の作成・使用と妥当性の検討」『教育心理学年報』第51巻, pp.213-217.
- Heckman, J. J. and Kautz, T., 2013, “Fostering and Measuring Skills,” *IZA Discussion Papers*, Vol.7750, pp.1-122.
- 平沢和司, 2018, 「世帯所得と子どもの学歴」『2015年SSM調査研究報告書「教育Ⅱ」』.
- 細尾萌子, 2017, 『フランスでは学力をどう評価してきたか』ミネルヴァ書房。
- 川口俊明, 2019, 「日本の学力研究の動向」『福岡教育大学紀要』第68号(4), pp.1-11.
- 小杉孝司, 2019, 『言葉と数式で理解する多変量解析入門』北大路書房。
- 村山航, 2012, 「妥当性」『教育心理学年報』第51集, pp.118-130.
- Nab, L., Groenwold, R. H. H., Welsing, P. M. J., and van Smeden, M., 2019, “Measurement error in continuous endpoints in randomised trials,” *Statistics in Medicine*, 38, pp.5182-5196.
- 中尾走・樊怡舟・村澤昌崇, 2022, 「交絡変数の測定誤差が合流点バイアスをもたらす影響について」『理論と方法』71, pp.34-52.
- 中澤渉, 2022, 「社会調査における自己評価成績」『社会学評論』72(4), pp.487-503.
- 二宮祐, 2021, 「学習成果の可視化に資するコンピテンシー・ディクショナリー」『大学評価研究』第20号, pp.91-100.
- 西山慶彦, 2019, 「データの整理と確率変数の基礎」西山慶彦・新谷元嗣・川口大司・奥井亮『計量経済学』有斐閣, pp.14-77.
- Pearl, J., 2000, *Causality: Models, Reasoning, and Inference*, Cambridge University Press. (=2009, 黒木学訳『統計的因果推論』共立出版).
- Streiner, D. L., Norman, G. R., Cairney, J., 2015, *Health Measurement Scales*, Oxford University Press, (=2016, 木原雅子・加治正行・木原正博訳, 『医学的測定尺度の理論と応用』メディカル・サイエンス・インターナショナル).

- 豊田長康, 2019, 『科学立国の危機』東洋経済新報社。
- 塚原修一, 2003, 「教育政策と評価のダイナミズム」『教育社会学研究』第72集, p. 5-20.
- VanderWeele, T. J. and Hernan, M. A., 2012, “Results on Differential and Dependent Measurement Error of the Exposure and the Outcome Using Signed Directed Acyclic Graphs,” *American Journal of Epidemiology*, Vol.175, No.12, pp.1303-1310.
- Yland, J. J., Wesselink, A. K., Lash, T. L. and Fox, M. P., 2022, “Misconceptions About Misclassification,” *American Journal of Epidemiology*, online first.
- 山内乾史・原清治, 2010, 「はしがき」山内乾史・原清治編著『日本の学力問題 上巻 学力論の変遷』日本図書センター, pp.1-2.

Advancement of Higher Education Research: RIHE Monograph Series について

『Advancement of Higher Education Research: RIHE Monograph Series (旧ディスカッションペーパーシリーズ)』は、速報性を重視し暫定的にまとめて発信することを目的として企画されたシリーズ (オープン・ジャーナル) です。これまでに、「ディスカッションペーパーシリーズ」として、国際共同研究、公募型研究、戦略的プロジェクト研究、客員研究員による研究等、成果として取りまとめられたものが発信されました。(執筆者の所属は刊行時のものです)

本事業の推進にあたり、以下の資金提供を受けた。記して感謝したい。

JSPS 科研費

- ・JP18K18651 (研究代表者: 村澤昌崇, 「多様な使命と目的を同時最適化する卓越した大学モデルの探索」)
- ・JP20H01643 (研究代表者: 村澤昌崇, 「EBPM の批判的検討を通じた高等教育政策・研究の高度化と EIPM への展開可能性」)
- ・JP 22K18591 (研究代表者: 村澤昌崇, 「社会科学の計量分析再考: “説明” の評価と解釈に関する数理的開発と検証」)
- ・JP22K20217 (研究代表者: 中尾走, 高等教育研究における代理指標を用いた統計的因果推論の限界と可能性)
- ・JP 19H00619 (研究代表者: 松繁寿和, 「社会的能力の特定化とその育成適正期および教育効果の検証」)
- ・JP 22K18627 (研究代表者: 西谷元, 「COVID-19 の影響下での、英語力向上とコンピテンシーの相関/因果関係分析」)
- ・JP19H00621 (研究代表者: 小林信一, 「知のオープン化時代の大学・科学関連システムの再構築」)

執筆者: 樊 怡舟・中尾 走 (広島大学)

RIHE Advancement of Higher Education Research
Monograph Series

No.10

2022 (令和 4) 年 9 月 29 日 発行

人文学・社会科学分野の研究の再現性に関する基礎調査

執筆者: 樊 怡舟・中尾 走 (広島大学)

〒739-8512 広島県東広島市鏡山 1-2-2 電話 (082) 424-6240
<https://rihe.hiroshima-u.ac.jp/>

RIE 広島大学高等教育研究開発センター