アンリ・ルベーグの『解析的に表示できる函数について』と記述集合論

藤田 博司

2016 年 6 月 17 日
「第 175 回 数学文献を読む会」にて

原論文とその時代状況

Henri Lebesgue,
Sur les fonctions représentables analytiquement,
Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 1 (1905), p. 139-216.

http://eudml.org/doc/234955

時代状況 (1)

1898 年 ボレル『函数論講義』
1899 年 ベール学位論文『実変数函数について』
1902 年 ルベーグ学位論文『積分・長さ・面積』
1903 年 ルベーグ『積分論講義』

ルベーグの原論文は 1904 年 5 月に執筆
同年 7 月 (?) の Comptes Rendus に概要を掲載
(「科学アカデミー 7 月 4 日の会合」の表記あり)

時代状況 (1)

1898 年 ボレル「函数論講義」について

- 可算集合の概念
- 実数直線の非可算性
- 測度の論法 (ハイネ・ボレル定理)
- シュレーダー・ベルンシュタインの定理の紹介
- デュボアレイモンの定理と超限順序数
- 「実数の任意の函数」への疑念

時代状況 (1)

ベールとルベーグは, ボレルの示した路線に沿って
解析学に新しい観点を持ち込む

ベール：函数の不連続点の分布の研究
ルベーグ：ボレルの測度論にもとづく新しい積分論

集合論にもとづく新しい解析学の展開??

時代状況 (2)

1901 年 ラッセルのパラドックス
1904 年 ツェルメロの整列定理証明
1905 年 ツェルメロの証明をめぐる論争
1906 年 ヤング夫妻『点集合の理論』
1914 年 ハウスドルフ『集合論概要』

ディリクレ・リーマンの函数概念

実数と実数の, まったく任意の対応
(フーリエ級数の研究に示唆された定義)

ディリクレの不連続函数

$$D(x) = \begin{cases} 0, & (x \text{ が無理数}) \\ 1, & (x \text{ が有理数}) \end{cases}$$

解析的に表示できる函数

「ディリクレとリーマンの提唱するまったく一般的な函数概念が広く受容されているのは事実だが, 解析学においては実際上, 解析的な表示をもつ函数ばかりが扱われてきた.」

「特異な函数としてたびたび引用されるディリクレの不連続函数にしても, 解析的な表示をもつ」

$$D(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$$

問題設定

解析的に表示できる函数

問題設定

- そもそも解析的に表示できない函数が考えられるか

解析的に表示できる函数

問題設定

- そもそも解析的に表示できない函数が考えられるか
- 解析的に表示できる函数に共通の特徴とは何か

解析的に表示できる函数

「解析的に表示できる函数」の定義の問題

解析的に表示できる函数

「解析的に表示できる函数」の定義の問題

論理学的・構文論的??

解析的に表示できる函数

「解析的に表示できる函数」の定義の問題

論理学的・構文論的?? (←時代的に無理な注文)

解析的に表示できる函数

ルベーグによる定義

変数 $x_1, \ldots, x_n$ と定数から，和と積と極限移行の高々可算回の繰り返しによって得られる函数を，解析的に表示できる函数と呼ぶ

解析的に表示できる函数

ルベーグによる定義

変数 $x_1, \ldots, x_n$ と定数から，和と積と極限移行の高々可算回の繰り返しによって得られる函数を，解析的に表示できる函数と呼ぶ

ベール函数のクラスと一致

ベール函数のクラス

連続函数の全体から, 函数列の (各点での) 極限をとる操作を繰り返して得られる函数.

ベール函数のクラス

連続函数の全体から, 函数列の (各点での) 極限をとる操作を繰り返して得られる函数.

クラス 0 の函数: 連続函数

ベール函数のクラス

連続函数の全体から, 函数列の (各点での) 極限をとる操作を繰り返して得られる函数.

クラス 0 の函数: 連続函数
クラス 1 の函数: 連続函数の列の極限となる函数

ベール函数のクラス

連続函数の全体から, 函数列の (各点での) 極限をとる操作を繰り返して得られる函数.

クラス 0 の函数: 連続函数
クラス 1 の函数: 連続函数の列の極限となる函数
クラス 2 の函数: クラス 1 の函数の列の極限となる函数

ベール函数のクラス

連続函数の全体から, 函数列の (各点での) 極限をとる操作を繰り返して得られる函数.

クラス 0 の函数: 連続函数
クラス 1 の函数: 連続函数の列の極限となる函数
クラス 2 の函数: クラス 1 の函数の列の極限となる函数

$\vdots$

ベール函数のクラス

$$
\begin{array}{ccccccc}
f_1 & f_2 & \cdots & f_n & \cdots & \to & f \\
\color{red}{k} & \color{red}{k} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{k} & \color{red}{\cdots} & & \color{red}{k+1}
\end{array}
$$

ベール函数のクラス

$$
\begin{array}{cccccccc}
f_1 & f_2 & \cdots & f_n & \cdots & \to & f \\
\color{red}{k} & \color{red}{k} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{k} & \color{red}{\cdots} & & \color{red}{k+1}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
f_1 & f_2 & \cdots & f_n & \cdots & \to & f \\
\color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{n} & \color{red}{\cdots} & & \color{red}{\omega}
\end{array}
$$

ベール函数のクラス

$$
\begin{array}{ccccccc}
f_1 & f_2 & \cdots & f_n & \cdots & \to & f \\
k & k & \cdots & k & \cdots & & k+1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
f_1 & f_2 & \cdots & f_n & \cdots & \to & f \\
1 & 2 & \cdots & n & \cdots & & \omega
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
f_1 & f_2 & \cdots & f_n & \cdots & \to & f \\
\omega & \omega & \cdots & \omega & \cdots & & \omega+1
\end{array}
$$

ベール函数のクラス

$$\begin{array}{ccccccc} f_1 & f_2 & \cdots & f_n & \cdots & \to & f \\ k & k & \cdots & k & \cdots & & k+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} f_1 & f_2 & \cdots & f_n & \cdots & \to & f \\ 1 & 2 & \cdots & n & \cdots & & \omega \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} f_1 & f_2 & \cdots & f_n & \cdots & \to & f \\ \omega & \omega & \cdots & \omega & \cdots & & \omega+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} f_1 & f_2 & \cdots & f_n & \cdots & \to & f \\ \omega+1 & \omega+2 & \cdots & \omega+n & \cdots & & \omega+\omega \end{array}$$

ベール函数のクラス

可算順序数 α $(\neq 0)$ に対して,
クラス α の函数とはクラス α 未満の函数の列の極限となる函数のこと.

ベール函数とは,
いずれかのクラス α にあらわれる函数のこと.

ベール函数のクラス

可算順序数 α $(\neq 0)$ に対して,
クラス α の函数とはクラス α 未満の函数の列の極限となる函数のこと.

ベール函数とは,
いずれかのクラス α にあらわれる函数のこと.

(ベールは実際にはクラス 2 までの函数を主に研究した)

ベール函数のクラス

可算順序数 α ($\neq 0$) に対して,
クラス α の函数とはクラス α 未満の函数の列の極限となる函数のこと.

ベール函数とは,
いずれかのクラス α にあらわれる函数のこと.

(ベールは実際にはクラス 2 までの函数を主に研究した)

ルベーグの原論文がベールの課題を引き継ぐ形になった.

ボレル集合のクラス

現代的な定義では,
ボレル集合の全体はすべての区間を含む最小の σ-加法族

ボレル集合のクラス

現代的な定義では,
ボレル集合の全体はすべての区間を含む最小の σ-加法族

ボレルの『函数論講義』に萌芽的に含まれていた概念

ボレル集合のクラス

現代的な定義では，
ボレル集合の全体はすべての区間を含む最小の σ-加法族

ボレルの『函数論講義』に萌芽的に含まれていた概念
　ボレル→測度が定義できる集合「可測集合」
　ルベーグ→「B 可測集合」

ボレル集合のクラス

現代的な定義では,
ボレル集合の全体はすべての区間を含む最小の σ-加法族

ボレルの『函数論講義』に萌芽的に含まれていた概念
　ボレル→測度が定義できる集合「可測集合」
　ルベーグ→「B 可測集合」
階層への分類はルベーグのアイデア.

ボレル集合のクラス

$\mathbf{\Sigma}^0_1$ は 開集合のクラス
$\mathbf{\Pi}^0_1$ は 閉集合のクラス

可算順序数 $\alpha > 1$ に対して,
$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ は $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{\Pi}^0_\beta$ に属する集合の可算和の全体
$\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ は $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ に属する集合の補集合の全体

ボレル集合とは,
いずれかのクラス $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ にあらわれる点集合のこと.

ルベーグの主結果

定理 IV

函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ がクラス α のベール函数であることと，任意の開区間の逆像が $\boldsymbol{\Sigma}^0_{\alpha+1}$ に属することが同値

ルベーグの主結果

定理 IV

函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ がクラス α のベール函数であることと，任意の開区間の逆像が $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$ に属することが同値

ベール函数=ボレル可測函数

ルベーグの主結果

定理 IV

函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ がクラス α のベール函数であることと，任意の開区間の逆像が $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$ に属することが同値

ベール函数=ボレル可測函数
(解析的に表示できる函数とはボレル可測函数のことである)

ルベーグの主結果

定理 IV

函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ がクラス α のベール函数であることと，任意の開区間の逆像が $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$ に属することが同値

ベール函数=ボレル可測函数
(解析的に表示できる函数とはボレル可測函数のことである)

解析的に表示できる函数の研究

ルベーグの主結果

定理 IV

函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ がクラス α のベール函数であることと，任意の開区間の逆像が $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$ に属することが同値

ベール函数=ボレル可測函数
(解析的に表示できる函数とはボレル可測函数のことである)

解析的に表示できる函数の研究
→ ベール函数とボレル集合の研究

その他の結果の例

定理 XX

n 変数の函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ が各変数ごとに連続であったとすれば, f はクラス $n-1$ のベール函数である.

定理 XXI

1 変数の函数 $f(x)$ がクラス $n-1$ のベール函数であれば, 各変数ごとに連続な n 変数函数 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ が存在して $f(x) = \varphi(x, \ldots, x)$ となる.

各クラスに固有のベール函数の存在

可算順序数 $\alpha > 0$ が (具体的に) 与えられたとする.

各クラスに固有のベール函数の存在

可算順序数 $\alpha > 0$ が (具体的に) 与えられたとする.

クラス α のベール函数 f は, クラス α 未満のベール函数の列 $\{f_n\}$ の極限. 各 f_n は, さらに低いクラスのベール函数の列の極限であるか, または連続函数である.

各クラスに固有のベール函数の存在

可算順序数 $\alpha > 0$ が (具体的に) 与えられたとする.

クラス α のベール函数 f は, クラス α 未満のベール函数の列 $\{f_n\}$ の極限. 各 f_n は, さらに低いクラスのベール函数の列の極限であるか, または連続函数である.

連続函数は多項式の可算列の極限として表わされる.

各クラスに固有のベール函数の存在

可算順序数 $\alpha > 0$ が (具体的に) 与えられたとする.

クラス α のベール函数 f は, クラス α 未満のベール函数の列 $\{f_n\}$ の極限. 各 f_n は, さらに低いクラスのベール函数の列の極限であるか, または連続函数である.

連続函数は多項式の可算列の極限として表わされる.

そこで, クラス α の函数に対しては, 多項式の可算族と, それら多項式から函数列の極限への移行の繰り返して f を得るためのレシピとが対応する.

各クラスに固有のベール函数の存在

実数の無限小数展開を用いると，それらの情報 (多項式の可算族と極限移行のレシピ) を，ひとつの実数 (0 以上 1 以下とする) で代表させることができる．

各クラスに固有のベール函数の存在

実数の無限小数展開を用いると，それらの情報 (多項式の可算族と極限移行のレシピ) を，ひとつの実数 (0 以上 1 以下とする) で代表させることができる．

クラス α の函数のコード化

各クラスに固有のベール函数の存在

実数の無限小数展開を用いると，それらの情報 (多項式の可算族と極限移行のレシピ) を，ひとつの実数 (0 以上 1 以下とする) で代表させることができる．

クラス α の函数のコード化

函数 f からその “コード” は一意に決まらない

各クラスに固有のベール函数の存在

実数の無限小数展開を用いると，それらの情報 (多項式の可算族と極限移行のレシピ) を，ひとつの実数 (0 以上 1 以下とする) で代表させることができる．

クラス α の函数のコード化

函数 f からその “コード” は一意に決まらない
コードはクラス α の函数を一意に定める

各クラスに固有のベール函数の存在

実数 t がクラス α の函数 f_t のコードのとき

$$f(t,x) = f_t(x)$$

とする.

各クラスに固有のベール函数の存在

実数 t がクラス α の函数 f_t のコードのとき

$$f(t,x) = f_t(x)$$

とする．コード化を適切に定めれば，$f(t,x)$ が 2 変数のベール函数として得られる．しかし，

各クラスに固有のベール函数の存在

実数 t がクラス α の函数 f_t のコードのとき

$$f(t,x) = f_t(x)$$

とする．コード化を適切に定めれば，$f(t,x)$ が 2 変数のベール函数として得られる．しかし，この $f(t,x)$ はクラス α 以下の函数ではない

各クラスに固有のベール函数の存在

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & f(x,x) = 0 \text{ のとき} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

と定めた φ がクラス α 以下だとすると，コード t が存在して，

$$f(t,x) = \varphi(x)$$

となるはずだが，とくに $x = t$ のとき

$$\varphi(t) = 1 \iff \varphi(t) = f(t,t) = 0$$

となって矛盾する．(対角線論法)

各クラスに固有のベール函数の存在

ルベーグの構成した函数 $\varphi(x)$ はクラス $\alpha + 1$ のベール函数

定理

すべての可算順序数 β に対し真にクラス β のベール函数 $\varphi_\beta(x)$ を指名できる.

実際は $\varphi_\beta(x)$ は順序数 β の与えられ方に依存.
たとえば 0 と 1 の間の有理数の順序型 β の整列部分集合を与えれば, そのデータをパラメータとして $\varphi_\beta(x)$ が定められる.

ベール函数でない函数の存在

濃度の論法からは，ベール函数でない函数の存在はほとんど自明

存在証明に対するルベーグの姿勢:
「実際に定義しないかぎり，函数について語らぬことにしたい」

「ひとつの対象が定義される，もしくは与えられるのは，その対象に，そしてその対象だけにあてはまる有限の個数の言葉が言われたとき，すなわちその対象を特徴づける性質が指名されたときである」(p.205)

指名する: *nommer* ということの重視

ベール函数でない函数の存在

濃度の論法による存在証明

ベール函数でない函数の存在

濃度の論法による存在証明

1. ベール函数の各クラス α は高々連続体の濃度をもつ

ベール函数でない函数の存在

濃度の論法による存在証明

1. ベール函数の各クラス α は高々連続体の濃度をもつ
2. 可算順序数 α の個数も連続体濃度以下である

ベール函数でない函数の存在

濃度の論法による存在証明

1. ベール函数の各クラス α は高々連続体の濃度をもつ
2. 可算順序数 α の個数も連続体濃度以下である
3. ゆえにベール函数の全体の濃度も連続体濃度以下である

ベール函数でない函数の存在

濃度の論法による存在証明

1. ベール函数の各クラス α は高々連続体の濃度をもつ
2. 可算順序数 α の個数も連続体濃度以下である
3. ゆえにベール函数の全体の濃度も連続体濃度以下である
4. いっぽう函数全体の濃度は連続体濃度を真に超える

ベール函数でない函数の存在

濃度の論法による存在証明

1. ベール函数の各クラス α は高々連続体の濃度をもつ
2. 可算順序数 α の個数も連続体濃度以下である
3. ゆえにベール函数の全体の濃度も連続体濃度以下である
4. いっぽう函数全体の濃度は連続体濃度を真に超える
5. ゆえにベール函数でない函数は存在する

ベール函数でない函数の存在

濃度の論法による存在証明

1. ベール函数の各クラス α は高々連続体の濃度をもつ
2. 可算順序数 α の個数も連続体濃度以下である
3. ゆえにベール函数の全体の濃度も連続体濃度以下である
4. いっぽう函数全体の濃度は連続体濃度を真に超える
5. ゆえにベール函数でない函数は存在する

ルベーグはこの証明の意義に疑念を表明
(ステップ 2 で濃度 $\aleph_1$ の実数の集合を指名できない)

ベール函数でない函数の存在

「クラスのシンボル (=可算順序数) から実数への写像を，指名せずに，その存在が示されたものと仮構しているので，さきほどの証明の意義には疑問の余地がありうる．同様に，私見によれば，無限に多くの操作や選択を，それらがどのような法則に従ってなされるのかを決定せずに語るということが，意味をなすか，また正当であるか，そうしたことも問われねばならない．」(p.213)

ベール函数でない函数の存在

「クラスのシンボル (=可算順序数) から実数への写像を，指名せずに，その存在が示されたものと仮構しているので，さきほどの証明の意義には疑問の余地がありうる．同様に，私見によれば，無限に多くの操作や選択を，それらがどのような法則に従ってなされるのかを決定せずに語るということが，意味をなすか，また正当であるか，そうしたことも問われねばならない.」(p.213)

(ツェルメロの整列定理証明をめぐる論争との関連: 後述)

ベール函数でない函数の存在

「クラスのシンボル (=可算順序数) から実数への写像を，指名せずに，その存在が示されたものと仮構しているので，さきほどの証明の意義には疑問の余地がありうる．同様に，私見によれば，無限に多くの操作や選択を，それらがどのような法則に従ってなされるのかを決定せずに語るということが，意味をなすか，また正当であるか，そうしたことも問われねばならない.」(p.213)

(ツェルメロの整列定理証明をめぐる論争との関連: 後述)

改良版の存在証明. . .

ベール函数でない函数の存在

改良版の存在証明

なんらかの可算順序数 α の可算集合によるコード化と，それをもとにしたクラス α のベール函数のコード化を結びつけて，すべてのベール函数を横断的にコード化する 2 変数函数を構成．このとき得られた 2 変数函数はベール函数でない．

- 解析的に表示されない函数が指名できた
- ボレル集合でないルベーグ可測集合を指名できる
- 残った問題: ルベーグ可測でない集合の指名

ツェルメロの整列定理証明について

整列定理

任意の集合に対して順序を定めて整列集合にできる

ツェルメロの証明: 1904 年 9 月 24 日, ヒルベルト宛の手紙
→同年 12 月 Mathematische Annalen vol.59 に掲載
→ 1905 年: 名高い「5 通の手紙」論争

ツェルメロの整列定理証明について

「5 通の手紙」論争

ツェルメロ「選択公理を仮定すれば整列定理が証明できる」

ツェルメロの整列定理証明について

「5 通の手紙」論争

ツェルメロ「選択公理を仮定すれば整列定理が証明できる」

ボレルの批評「そんなのは (整列定理の) 証明とはいえない」

ツェルメロの整列定理証明について

「5 通の手紙」論争

ツェルメロ「選択公理を仮定すれば整列定理が証明できる」

ボレルの批評「そんなのは (整列定理の) 証明とはいえない」

アダマールのボレル宛の手紙「単なる存在証明で満足すべき領域もある」

ツェルメロの整列定理証明について

「5 通の手紙」論争

ツェルメロ「選択公理を仮定すれば整列定理が証明できる」

ボレルの批評「そんなのは (整列定理の) 証明とはいえない」

アダマールのボレル宛の手紙「単なる存在証明で満足すべき領域もある」

ボレル・ベール・ルベーグ「しかるべき手続きを踏んできちんと内容が確定する対象だけを認めたい」

ツェルメロの整列定理証明について

原論文は. . .

ツェルメロの整列定理証明について

原論文は. . .

- 執筆時期は 1904 年 5 月ごろとされる (p.216 脚注)

ツェルメロの整列定理証明について

原論文は. . .

- 執筆時期は 1904 年 5 月ごろとされる (p.216 脚注)
- ツェルメロの名も整列定理も引用されていない

ツェルメロの整列定理証明について

原論文は. . .

- 執筆時期は 1904 年 5 月ごろとされる (p.216 脚注)
- ツェルメロの名も整列定理も引用されていない
- 「5 通の手紙」のうちボレルのアダマール宛の手紙で, 原論文に言及している.

ツェルメロの整列定理証明について

原論文は. . .

- 執筆時期は 1904 年 5 月ごろとされる (p.216 脚注)
- ツェルメロの名も整列定理も引用されていない
- 「5 通の手紙」のうちボレルのアダマール宛の手紙で, 原論文に言及している.
- ツェルメロの結果以前に, それを知ることなく書かれた

ツェルメロの整列定理証明について

原論文は. . .

- 執筆時期は 1904 年 5 月ごろとされる (p.216 脚注)
- ツェルメロの名も整列定理も引用されていない
- 「5 通の手紙」のうちボレルのアダマール宛の手紙で, 原論文に言及している.
- ツェルメロの結果以前に, それを知ることなく書かれた
- 論争におけるルベーグの見解を十分予期させる内容

ルベーグの陰函数定理

定理 XVIII

解析的な表示によって陰伏的に定義できる函数は, 陽に解析的に表示できる.

$F(x, y)$: ベール函数

$$\forall x \exists ! y [\, F(x, y) = 0\,]$$

$\Rightarrow$ x の函数とみた y はベール函数

ルベーグの証明は間違っていた

ルベーグの間違い

ボレル集合全体の族は区間全体の族から,

I 可算個の集合の和集合をとること

II' 可算個の入れ子になった集合列

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$$

の共通部分をとること

という二つの操作の反復で生成されるが, 操作 I も II' も射影によって保たれるので, ボレル集合の射影はまたボレル集合である (p.191〜192)

ルベーグの間違い

実際には操作 II' は射影によって保たれない．各 A_n が コンパクトならよいが，一般には，

$$A_n = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq 1/n\}$$

のような場合に反例がある．

1916 年モスクワ

ルジンの学生ススリンが原論文を読み, ルベーグの間違いを発見. (偶然にもシェルピンスキが立ちあった)

Sierpiski, W.. *Les ensembles projectifs et analytiques.* 1950.

http://eudml.org/doc/192631

ススリンとルジンは, ボレル集合の射影に関するルベーグの結果が正しくないことを証明.

$A \subseteq \mathbb{R}$ について次は同値

$A \subseteq \mathbb{R}$ について次は同値

1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ のボレル集合 ($\mathbf{\Pi}^0_2$ 集合でよい) の射影である.

$A \subseteq \mathbb{R}$ について次は同値

1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ のボレル集合 ($\mathbf{\Pi}^0_2$ 集合でよい) の射影である.
2. $\mathbb{R}$ 上の連続函数によるボレル集合 ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ でよい) の像である.

$A \subseteq \mathbb{R}$ について次は同値

1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ のボレル集合 ($\mathbf{\Pi}^0_2$ 集合でよい) の射影である.
2. $\mathbb{R}$ 上の連続函数によるボレル集合 ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ でよい) の像である.
3. 自然数の有限列全体の集合 $\mathbb{N}^*$ に添字づけされた有界閉集合の族 $\{ K_{n_1, n_2, \ldots, n_r} : (n_1, n_2, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}^* \}$ について

$$A = \bigcup_{a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}} \bigcap_{r=1}^{\infty} K_{a(1), a(2), \ldots, a(r)}$$

となる.

$A \subseteq \mathbb{R}$ について次は同値

1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ のボレル集合 ($\mathbf{\Pi}^0_2$ 集合でよい) の射影である.
2. $\mathbb{R}$ 上の連続函数によるボレル集合 ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ でよい) の像である.
3. 自然数の有限列全体の集合 $\mathbb{N}^*$ に添字づけされた有界閉集合の族 $\{ K_{n_1,n_2,\ldots,n_r} : (n_1, n_2, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}^* \}$ について
$$A = \bigcup_{a\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}} \bigcap_{r=1}^{\infty} K_{a(1),a(2),\ldots,a(r)}$$
となる.
4. $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ の閉集合 C について,
$$x \in A \iff \{ q : (x, q) \in C \} \text{ は整列集合でない}$$
となる.

定義 (ススリン, ルジン)

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ のボレル集合の射影になるような $\mathbb{R}$ の部分集合のことを, 解析集合 または **A** 集合 という.

ススリンとルジンは当初 “A 集合” という名称を使用
ボレル集合を意味する “B 可測集合” から派生??

解析集合の基本性質

解析集合の基本性質

- ボレル集合は解析集合である.

解析集合の基本性質

- ボレル集合は解析集合である．
- 解析集合の可算和，可算共通部分はまた解析集合である．

解析集合の基本性質

- ボレル集合は解析集合である.
- 解析集合の可算和，可算共通部分はまた解析集合である.
- 解析集合の連続像はまた解析集合である.

解析集合の基本性質

- ボレル集合は解析集合である.
- 解析集合の可算和，可算共通部分はまた解析集合である.
- 解析集合の連続像はまた解析集合である.
- 解析集合の補集合 (CA 集合) は解析集合とは限らない.

解析集合の基本性質

- ボレル集合は解析集合である.
- 解析集合の可算和，可算共通部分はまた解析集合である.
- 解析集合の連続像はまた解析集合である.
- 解析集合の補集合 (CA 集合) は解析集合とは限らない.
- ボレル集合でない解析集合がある.

解析集合の基本性質

- ボレル集合は解析集合である.
- 解析集合の可算和，可算共通部分はまた解析集合である.
- 解析集合の連続像はまた解析集合である.
- 解析集合の補集合 (CA 集合) は解析集合とは限らない.
- ボレル集合でない解析集合がある.
- (ススリンの定理)
  $A \subseteq \mathbb{R}$ がボレル集合 $\iff$ A と $\mathbb{R} \setminus A$ が解析集合.

解析集合の基本性質

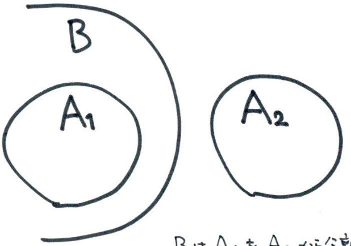
- ボレル集合は解析集合である.
- 解析集合の可算和，可算共通部分はまた解析集合である.
- 解析集合の連続像はまた解析集合である.
- 解析集合の補集合 (CA 集合) は解析集合とは限らない.
- ボレル集合でない解析集合がある.
- (ススリンの定理)
  $A \subseteq \mathbb{R}$ がボレル集合 $\iff$ A と $\mathbb{R} \setminus A$ が解析集合.
- (ルジンの定理) 解析集合はルベーグ可測である.

ススリン・ルジンの分離定理

$A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}$ が解析集合で $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ならば, あるボレル集合 $B \subseteq \mathbb{R}$ について

$$A_1 \subseteq B, \quad B \cap A_2 = \emptyset$$

となる. (交わりのない解析集合はボレル集合で分離できる.)



B は A_1 を A_2 から分離.

系 (ルジンの単射定理)

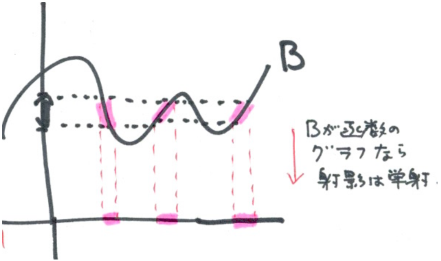
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続函数, $B \subseteq \mathbb{R}$ がボレル集合で, $f \upharpoonright B$ が 1 対 1 ならば, 像 $f(B)$ はボレル集合.

系 (ルジンの単射定理)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が連続函数, $B\subseteq\mathbb{R}$ がボレル集合で, $f\restriction B$ が 1 対 1 ならば, 像 $f(B)$ はボレル集合.

系

“ルベーグの陰函数定理” は正しかった!!



解析集合の理論によって,

解析集合の理論によって,

- 点集合論の新しい対象が生まれた.

解析集合の理論によって,

- 点集合論の新しい対象が生まれた.
- ボレル集合の新しい特徴づけが発見された.

解析集合の理論によって,

- 点集合論の新しい対象が生まれた.
- ボレル集合の新しい特徴づけが発見された.
- ルベーグの理論が「救済」された.

解析集合の理論によって,

- 点集合論の新しい対象が生まれた.
- ボレル集合の新しい特徴づけが発見された.
- ルベーグの理論が「救済」された.

固有の研究領域としての
記述集合論の誕生

射影集合への拡張 (補集合 (↓) と連続像 (↗) のくり返し)

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{A} & & \mathrm{PCA} & & \mathrm{PCPCA} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\
\mathrm{CA} & & \mathrm{CPCA} & & \mathrm{CPCPCA} & & \cdots
\end{array}
$$

射影集合への拡張 (補集合 (↓) と連続像 (↗) のくり返し)

$$
\begin{array}{ccccccc}
A & & PCA & & PCPCA & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\
CA & & CPCA & & CPCPCA & & \cdots
\end{array}
$$

現代の記号では

射影集合への拡張 (補集合 (↓) と連続像 (↗) のくり返し)

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{A} & & \mathrm{PCA} & & \mathrm{PCPCA} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\
\mathrm{CA} & & \mathrm{CPCA} & & \mathrm{CPCPCA} & & \cdots
\end{array}
$$

現代の記号では

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{\Sigma}^1_1 & & \mathbf{\Sigma}^1_2 & & \mathbf{\Sigma}^1_3 & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\
\mathbf{\Pi}^1_1 & & \mathbf{\Pi}^1_2 & & \mathbf{\Pi}^1_3 & & \cdots
\end{array}
$$

どうしても解けなかった難問…

$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合のルベーグ可測性?
$\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の完全集合の性質?

どうしても解けなかった難問…

$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合のルベーグ可測性?
$\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の完全集合の性質?

射影集合の理論は「独立命題」の宝庫だった.

どうしても解けなかった難問…

$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合のルベーグ可測性?
$\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の完全集合の性質?

射影集合の理論は「独立命題」の宝庫だった.

記述集合論は誕生してすぐに暗礁??

どうしても解けなかった難問…

$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合のルベーグ可測性?
$\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の完全集合の性質?

射影集合の理論は「独立命題」の宝庫だった.

記述集合論は誕生してすぐに暗礁??

→ジェネラル・トポロジーの成立を促す

どうしても解けなかった難問…

$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合のルベーグ可測性?
$\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の完全集合の性質?

射影集合の理論は「独立命題」の宝庫だった.

記述集合論は誕生してすぐに暗礁??

→ジェネラル・トポロジーの成立を促す
→再帰理論 (計算論) との融合

どうしても解けなかった難問…

$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合のルベーグ可測性?
$\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の完全集合の性質?

射影集合の理論は「独立命題」の宝庫だった.

記述集合論は誕生してすぐに暗礁??

→ジェネラル・トポロジーの成立を促す
→再帰理論 (計算論) との融合
→現代集合論の試金石

原論文 p.165 脚注

これから示されることから，結果として，B 可測集合とは解析的な等式や不等式で定められる集合のことである．この理由により，それらは「解析集合」の名に値する．

参考文献:

ローレン・グレアム&ジャン=ミシェル・カンター『無限とはなにか？』(一灯舎 2011 年)

志賀浩二『無限からの光芒』(日本評論社 1988 年)

田中尚夫『選択公理と数学』【増訂版】(遊星社　1999 年)

Yiannis N.Moschovakis “Descriptive Set Theory” (2nd Ed., AMS, 2009 年)