超限順序数と連続体問題

藤田 博司

愛媛大学大学院理工学研究科

2021 年 3 月 15 日

講演の概要

- 集合論以前の関数概念
- 集合論と連続体問題
- 測度問題
- 現代の集合論へ

独立変数の式としての関数

オイラーやベルヌーイ家の活躍した時代の解析学においては，
式と関数の区別はハッキリしない．関数とは，

- $+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt{\ \ }$ などの代数演算．
- sin, cos, log, exp などいくつかの超越関数．
- 無限和と無限積．

などの合成で得られる「独立変数の式」であった．

オイラーは，独立変数に関する単一の式で書ける関数を「連続な関数」と呼び，定義域の途中でルールが変更される関数のことを「不連続な関数」と呼んでいた．

フーリエ級数

フーリエ (Joseph B.Fourier) **は熱伝導現象の数学的解析を通じてフーリエ級数のアイデアを得た．区間** $[-\pi, \pi]$ **で定義された** "**任意**" **の関数** $f(x)$ **について，**

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

とすることで，三角級数展開

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

が可能 (**であるはず**) **だと，フーリエは論じた．**

フーリエ級数

フーリエの論文を審査したラグランジュらは, 彼の議論の正当性に疑問を呈した．フーリエの主張を確立するには，無限級数の項別積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\, dx$$

ができねばならない．その保証がないばかりか，そもそも "任意の関数の積分" が何を意味するのかも，当時は明らかでなかった.

ディリクレ

現代的な「対応」としての関数概念は，まずコーシーの解析学教程において提案されたが，これが全面的に採用されるのはディリクレ (J.P.G.Lejeune Dirichlet) **以後のこと**.

ディリクレの関数概念

変数 y **が変数** x **に関連づけられていて**, x **の数値が与えられるたびに**, **それに対する** y **の値がただひととおりに決まる仕組みがあるなら**, y **は独立変数** x **の関数である**, **と言われる**.

この関数概念にもとづいて, **ディリクレは初めて**, "**任意の関数**" **がどんな条件を満たせばフーリエ級数であらわされるか**, **という問題についての** (**部分的な**) **解答を得た**. (**『任意の関数を表示する三角級数の収束について』**1829 **年**)

ディリクレ

ディリクレの定理

区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(x)$ が区分的に連続で左右の極限値をもち，区分的に単調 (極大値・極小値を有限回しかとらない) なら，$f(x)$ のフーリエ級数は各点で

$$\frac{1}{2}\left(f(x-0)+f(x+0)\right)$$

に収束する．

ディリクレの不連続関数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

は，この論文において「積分可能性にはなんらかの条件がつくはずだ」という主張を支持するエビデンスとして提案されたもの．

一般の関数の積分という課題

ディリクレのフーリエ級数の研究を引き継いだリーマンは，一般の関数の積分とは何か，という問題へのひとつの回答として，彼の積分の理論を考案した．（1854 年のハビリタチオン論文）

区間 $[a, b]$ 上の関数 $f(x)$ がリーマン積分可能であるための必要十分条件を，リーマンは次のように与えている．

リーマンの条件

正の数 δ をいかに小さくとっても，区間 $[a, b]$ を適当に細かく有限分割することで，関数 $f(x)$ の変動量が σ を超えるような小区間の長さの総和を好きなだけ小さくできるならば，$f(x)$ は $[a, b]$ において積分可能である．

のちにルベーグによって「不連続点の集合がルベーグ測度ゼロをもつこと」と言いかえられたとおり，この条件は本来測度論的な性質のものである．しかしリーマンの時代にはそもそも測度の理論が存在しなかった．

積分可能性をめぐる混乱

リーマンと同時代の人々には，リーマンの条件は理解が難しかったらしい．たとえばヘルマン・ハンケルは

> 不連続点の集合が至るところ非稠密な関数は積分可能である（←間違い）

という趣旨のことを論じている．ハンケルは積分可能性を位相的な性質から導こうとしていることに注意．

> 至るところ非稠密な集合が正の（ジョルダン）外容量をもちうることが発見されるまでは，測度論的な零集合の重要性は認識されなかった．（トマス・ホーキンス）

フーリエ級数などを通じて解析学の研究対象が広がったことにより，19 世紀後半には，実数の区間上の点の集まりぐあいについて，従来よりも詳細な分析が求められるようになっていたことがうかがえる．

カントールが集合論を創始した 1870 年代は，そうした時代のただ中であった．

集合論の誕生

カントールは 1870 年に三角級数の一意性定理を証明した：

三角級数の一意性定理

三角級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

がすべての実数 x において 0 に収束するのは，係数 a_n と b_n がすべて 0 である場合に限る．

この一意性定理を拡張する試みの中から，実数の点集合の導集合 (集積点全体の集合) をとる演算の超限反復

$$P, P', P'', \ldots, P^{(n)}, \ldots, P^{(\infty)}, P^{(\infty+1)}, \ldots, P^{(\infty+\infty)}, \ldots$$

のアイデアや，基本列にもとづく実数論などが生み出された．

集合論の誕生

◆ 1874 年の論文「代数的実数の全体の一性質について」

代数的実数の全体が可算にすぎないのに対して実数全体が可算でないことを証明し，多くの超越数が存在することを間接的に証明した．

無限集合の間にも要素の個数の違いに相当するものがあることが，このとき初めて認識された．

◆ 1878 年の論文「集合論への一寄与」

一対一対応によって定められる集合の濃度の概念を導入．実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の濃度の問題すなわち連続体問題が提示された．この時点で，カントールは次のように予想した：

カントールの連続体仮説

実数の無限集合はいずれも $\mathbb{N}$ か $\mathbb{R}$ のいずれかと同じ濃度をもつであろう

それ以来，連続体問題はカントールの最大の関心事となる．

連続体問題

連続体仮説へのカントールのアプローチ

(1) **実数の点集合の性質の研究を深化させる**

(2) **可算順序数全体と同型な実数全体の整列順序づけを構成する**

カントール-ベンディクソンの定理「実数の閉集合は可算集合と完全集合の和に一意的に分解される」は，(1) のアプローチの成果．空でない完全集合は連続体の濃度をもつから，連続体仮説は閉集合については正しい．より一般の実数の集合にこの定理を拡張することが考えられた．

カントール-ベンディクソンの定理の証明には導集合をとる操作の超限反復が応用されており，超限順序数の理論への発展の萌芽が含まれている．

連続体問題

1920 年代，連続体仮説の成りたつ集合の範囲が拡大された

- ボレル集合 (ハウスドルフとアレクサンドロフ)
- Σ^1_1 集合 (いわゆる解析集合, ルジンとススリン)

しかし Π^1_1 集合（いわゆる補解析集合）に対してこのアプローチは行き詰まった．

ベルンシュタイン：完全集合を含まない実数の不可算集合の存在証明

カントール-ベンディクソンの定理の拡張するアプローチで連続体仮説の証明に至ることは不可能

記述集合論（実数の定義可能な部分集合の研究）はカントールのこの研究を源流とする．

連続体問題

(2) **整列順序づけを構成するアプローチ**

高い濃度の整列集合の研究を促し，超限順序数の理論の研究へ発展．超限基数のアレフ系列

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\alpha, \ldots$$

の概念が誕生した．

カントールは順序数・基数を自然数の拡張とみて，それらの算術の性質を研究し，実数の集合 $\mathbb{R}$ の濃度が $2^{\aleph_0}$ と書けることを発見した．

連続体仮説は

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

という等式で表現できる．

しかしながらカントールは $\mathbb{R}$ の整列順序づけを構成できなかった．カントールの研究は，超限順序数論，超限基数論，記述集合論といった分野を開拓したが，連続体問題は，未解決問題として残された．

集合論の公理化

ツェルメロの 1908 年の論文が，集合論の公理化の最初の試み．
公理化へのツェルメロの動機は

- 自身の「整列可能定理」(1904 年) における選択公理の位置づけの明確化
- 曖昧な「集合の定義」を除去すること (ヒルベルトの幾何学基礎論が範例)
- 集合論の逆理 (e.g. ラッセルの逆理) に対処すること

の 3 点にあった．

1922 年ごろ，フレンケルとスコーレムが独立に，ツェルメロの公理系の不備を修正
→ツェルメロ-フレンケル集合論 (ZF 集合論) の体系が確立
選択公理を含める場合は ZFC 集合論と呼ぶ

連続体問題その他の集合論の問題を考える舞台として，ZFC 集合論が設定された．

ゲーデルの L

ZFC 集合論が連続体仮説 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ と矛盾しないことは，1938 年ごろゲーデルによって証明された．

$L_0 = \emptyset$ とし，L_α において 1 階述語論理の論理式で定義可能な L_α の部分集合全体を $L_{\alpha+1}$ とするという操作を超限的に反復して，集合の階層 $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_\alpha, \ldots$ を定義し，すべての順序数 α に対する L_α の和 $\mathbf{L} = \bigcup\{L_\alpha \mid \alpha \text{は順序数}\}$ を構成可能的宇宙と呼ぶ．

ゲーデルは L が ZF 集合論のすべての公理をみたすことと，L が構成可能性公理 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ をみたすことを証明し，さらに ZF 集合論と $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ から選択公理と連続体仮説を導いた．

したがって，ZF 集合論それ自体が矛盾しない限り，ZFC 集合論も矛盾しないし，ZFC 集合論と連続体仮説も矛盾しない．

また公理 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ のもとでは，実数全体 $\mathbb{R}$ の整列順序づけを明示的に構成できる．

内部モデルの概念

一般に，すべての順序数を含む推移的クラス M について，ZF 集合論のすべての公理 φ を M で解釈した φ^{M} が証明できるならば，M は ZF 集合論の**内部モデル**と呼ばれる．

ゲーデルの L は ZF 集合論の内部モデルの最初の例であり，とくに最小の内部モデルとして特徴づけられる．

このことにより，L はたとえば代数学の体の理論における素体のような役割を，集合論の中で演じることになる．

コーエンの強制法

内部モデルの方法では連続体仮説の独立性（証明不可能性）を確立できない．

モデルを外部へ拡大せねばならない．

集合全体のなす宇宙 $\mathbf{V}$ に仮想的なジェネリック集合 G を添加したジェネリック拡大モデル $\mathbf{V}[G]$ を構築する方法がコーエンの強制法（1963 年）

ジェネリック集合に関する部分的なデータの集合で $\mathbf{V}$ に属するもの全体のなす集合を $\mathbb{P}$ とすると，$\mathbb{P} \in \mathbf{V}$ で，各データ集合のもつ情報の包含関係のもとで，$\mathbb{P}$ は半順序集合となる．

半順序集合 $\mathbb{P}$ の性質を吟味することで，拡大モデル $\mathbf{V}[G]$ における命題の成立・不成立を，$\mathbf{V}$ にいながらにして（かなりの程度）予言できる，というのがコーエンの発見である．

コーエンの強制法

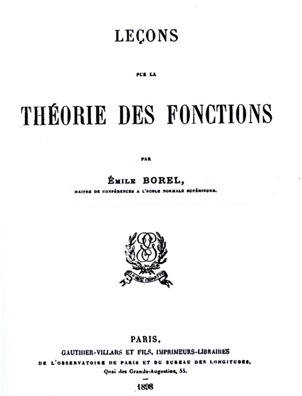
たとえば，V において V = L が成立しているものとして，$\aleph_2$ **の有限部分集合から** $\{0,1\}$ **への関数全体のなす半順序集合を** $\mathbb{P}$ **とすると，ジェネリック集合** G **は** $\aleph_2$ **個の相異なる実数の並びを定めることになり，V**$[G]$ **においては** ZFC **集合論と** $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ **が成立する．コーエンはこうして連続体仮説の否定の無矛盾性を確立した．**

強制法は，宇宙 V に仮想的に付け加えたいジェネリック集合の特徴を見越して半順序 $\mathbb{P}$ **を構成することで，さまざまな集合論の命題の無矛盾性証明に用いうる柔軟性をもつ．**

後述するソロヴェイらによって強制法のそうした可能性が 1960 **年代後半から** 1970 **年代において盛んに探求され，集合論の爆発的な発展のきっかけとなった．**

連続体仮説は ZFC **集合論で決定できないことがわかったが，それで集合論や連続体問題が終わったわけではない．**

集合論による解析学の刷新


LEÇONS

SUR LA

THÉORIE DES FONCTIONS

PAR

ÉMILE BOREL,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1898

ボレルは 1898 **年の『関数論講義』において，カントールの集合論を紹介し，解析学に応用する方針を示した．**

測度の論法

任意に与えられた無理数 α に対して，不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

をみたす有理数 p/q が無数に存在する．(ディリクレ)

任意の正整数 n について不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$$

をみたす有理数 p/q が無数に存在するような無理数 α は超越数である．(リウーヴィル)

測度の論法

このふたつの事実を踏まえて，ボレルは『関数論講義』において，すべての有理数 p/q について不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^3} \qquad (\star)$$

が成立するような超越数 α の存在を証明してみせた．そのさいにボレルが用いたのが測度の論法である．

ボレルは，単位閉区間 $[0,1]$ 上の有理数 p/q (既約分数) を中点とする区間 $\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^3}\right)$ の長さの総和を評価することで，すべての分数に対して不等式 $(\star)$ をみたす実数の集合が正の測度をもつボレル集合であり，したがってその要素が不可算無限個存在することを示した．

この講義録での証明が，ボレル集合とその測度の概念の初出．

測度の論法

ボレルによる「可測集合」とその「測度」の説明：

(i) $[0,1]$ **の部分区間はいずれも可測な集合であり，その測度は区間の幅に等しい．**

(ii) $[0,1]$ **の部分集合** A **が可測な集合でその測度が** α **ならば，補集合** $[0,1] \setminus A$ **も可測な集合であり，その測度は** $1-\alpha$ **である．**

(iii) **集合** A_n $(n=0,1,2,\ldots)$ **が互いに交わりのない可測な集合で，それぞれの測度が** α_n $(n=0,1,2,\ldots)$ **であるとき，和集合** $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ **も可測な集合であり，その測度は** $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ **である．**

区間から出発して補集合演算と和集合演算を繰り返すことで可測な集合の範囲を広げてゆき，それと同時にそれぞれの集合の測度も定義されていくものと考える，超限再帰的な定義の提案と解釈できる．

現在の用語ではこれは「ボレル集合」と「そのルベーグ測度」に相当する．

測度の論法

『講義』において，ボレルは「可測集合」とその「測度」の概念を提案し，ある種の無理数の存在証明に応用してみせた．測度の論法はカントールの超越数の存在証明の論法を精密化することを意図したもので，確率論や積分論への応用はこの時点では意図されていない．

測度の問題

ルベーグは 1902 年の学位論文において，ボレルの提案した測度の概念を応用して積分の理論を構築した．

ルベーグは測度の定義に先立って，実数直線 $\mathbb{R}$ のすべての有界な部分集合にその測度と呼ばれる非負実数を割り当てる問題を提示した．

ルベーグが要請したのは，

(i) 区間がその長さに等しい測度をもつこと，

(ii) 平行移動で移りあう集合が等しい測度をもつこと，

(iii) 測度が可算加法性をもつこと，

という条件だった．

測度の問題

ルベーグの測度の問題に解が存在すると仮定するとき，いわゆるルベーグ可測集合に対する測度の値は，測度問題の解の選び方にかかわらず一意的に定まる．また，ルベーグ可測集合の測度の値は，区間の長さだけをもとにして定義でき，測度の問題の解の存在・不存在に影響を受けない．

この意味でルベーグは，測度の問題をルベーグ可測集合に制限した特別な場合に解いたといえる．

そのことを確認したのち，ルベーグは測度問題の解の探求を棚上げし，以降は可測集合だけを考察の対象とすることを宣言する．

不可測集合

ルベーグは，自分の測度の理論の適用範囲がルベーグ可測集合のクラスに限定されることを，正しく認識していたが，“私は可測でないいかなる函数も知らないし，それが存在するかどうかも知らない” とも明言している．

ルベーグ可測でない集合の最初の例は 1905 年にヴィタリによって示された．

ヴィタリは実数の加法の群の有理数全体のなす部分群による剰余類の完全代表系を作れば，それにはルベーグの意味での測度が定義されないことを，ルベーグ測度の平行移動に関する不変性と可算加法性を用いて証明した．

測度の問題の再定義

ヴィタリの証明によってルベーグの測度問題は解をもたないことがわかった．そこで問題は次のように再定義される．

(A) 平行移動に関する不変性をあきらめれば，可算加法性をもつ測度は存在するだろうか．
(B) 可算加法性を有限加法性に置き換えれば，平行移動で不変な測度は存在するだろうか．
(C) 不可測集合の存在証明に選択公理の使用は必須だろうか．
(D) もっと具体的に不可測集合を定義できないだろうか．

これらのうち (A) と (B) については 20 世紀前半にバナッハ，ウラム，タルスキらによって研究が進んだ．

測度の問題と巨大基数

(A) 平行移動に関する不変性をあきらめれば，可算加法性をもつ測度は存在するだろうか．

この問題は 1920 年代にバナッハとウラムによって研究された．この研究の結果，実数直線上の可算加法的な測度の存在は，「連続体濃度以下の弱到達不能基数が存在する」ということを生むことがわかった．連続体濃度 $2^{\aleph_0}$ はこのとき，$\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3, \ldots$ などよりも，はるかに大きい．

したがって，測度の存在は，連続体仮説 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ とは鋭く対立する．

また，バナッハとウラムによる測度の問題の研究は，派生物として**可測基数**の概念を生んだ．可測基数は典型的な巨大基数であり，現代集合論の巨大基数研究において重要な役割をはたす．

バナッハ-タルスキの定理

(B) **可算加法性を有限加法性に置き換えれば，平行移動で不変な測度は存在するだろうか．**

これも 1920 **年代にポーランドで研究された．**

バナッハにより， $\mathbb{R}$ **と** $\mathbb{R}^2$ **においては，合同変換のもとで不変な有限加法的測度をすべての集合に定義できることが示された．**

ところが 3 **次元以上のユークリッド空間においては，合同変換で不変な測度は，可算加法性を有限加法性に緩めても存在しない．このことを印象的な形で示すのが，いわゆるバナッハ-タルスキの定理「** $\mathbb{R}^3$ **の単位球を** 5 **個の部分集合に分割し組み立て直すことで，**2 **個の単位球を作ることができる」である．**

有限加法的な不変測度の存在は変換群の構造の探求の一環として現在も研究が続けられている．

ソロヴェイの定理

残った 2 つの問題

(C) **不可測集合の存在証明に選択公理の使用は必須だろうか．**
(D) **もっと具体的に不可測集合を定義できないだろうか．**

に答えたのがソロヴェイの 1970 年の論文だった．

ソロヴェイの定理

ソロヴェイはコーエンの強制法を応用して次の定理を示した．

ソロヴェイの定理 1

ZFC **集合論**+“ **到達不能基数の存在**” **のモデルが存在すれば，次の** 4 **つの命題が成立するような** ZF **集合論のモデルが存在する．**

(a) **従属選択の公理**
(b) **実数のあらゆる集合がルベーグ可測である**
(c) **実数のあらゆる集合がベールの性質をもつ**
(d) **実数のあらゆる不可算集合が完全集合を含む**

従属選択の公理：極大要素をもたない半順序集合は無限昇鎖を含む．
完全集合：空でなく孤立点をもたない閉集合

ソロヴェイの定理 1 **によって，選択公理なしではルベーグ不可測集合を構成できない．これが問題** (C) **への回答である．**

ソロヴェイの定理

では，選択公理を認めた状況で，ルベーグ不可測集合を具体的に定義できるだろうか．次の定理はこれに答える．

ソロヴェイの定理 2

ZFC **集合論**+ “**到達不能基数の存在**” **のモデルが存在すれば，次の** 4 **つの命題が成立するような** ZFC **集合論のモデルが存在する．**

(a’) **連続体仮説**

(b’) **定理** 1 **の条項** (b) **の次のような変形版:実数の集合** A **が順序数の可算列を唯一のパラメータとして定義できるならば,** A **はルベーグ可測である**

(c’) **定理** 1 **の条項** (c) **の同様の変形版**

(d’) **定理** 1 **の条項** (d) **の同様の変形版**

ソロヴェイの定理

ソロヴェイの定理 2 によれば，集合論の論理式 $\phi(x)$ によって定義される実数の集合 $\{x \in \mathbb{R} : \phi(x)\}$ がルベーグ不可測集合であることが ZFC 集合論で証明できることは，ZFC 集合論自体が矛盾するか ZFC 集合論から「到達不能基数が存在しない」という命題が証明できるという (およそ考えにくい) 状況が成立しないかぎり，ありえない．この意味で問題 (D) は否定的に解かれる．

注意：このことは $\{x \in \mathbb{R} : \phi(x)\}$ がルベーグ可測であることが ZFC 集合論で証明されることを意味しない．

現代の集合論への展開

次のウッディンの定理は，しかるべき巨大基数が存在すれば，強制法でモデルを作るまでもなく，ソロヴェイの定理の状況が成立していることを意味している．

ウッディンの定理

κ を超コンパクト基数とするとき，レヴィの半順序 $\mathbb{P}_\kappa$ に対するジェネリック集合 G について，初等的埋め込み

$$j\colon (\mathbf{L}(\mathbb{R}))^{\mathbf{V}} \to (\mathbf{L}(\mathbb{R}))^{\mathbf{V}[G]}$$

が存在する．

このとき $(\mathbf{L}(\mathbb{R}))^{\mathbf{V}[G]}$ はまさにソロヴェイが定理 1 で言及したモデルそのものであり，初等的埋め込みは命題の真偽を保つので，$(\mathbf{L}(\mathbb{R}))^{\mathbf{V}}$ においてもソロヴェイの定理 1 の命題 (a)–(d) が成立することになる．いいかえれば，超コンパクト基数が存在するとき，しかるべく定義可能な実数の集合 (射影集合など) はすべてルベーグ可測である．

現代の集合論への展開

1980 年代以降，

- ウッディンの結果の超コンパクト基数の仮定をどれだけ弱められるか．
- ゲーデルの内部モデルの結果をどれだけ強い巨大基数公理と両立させられるか．

この両方向から研究が進められ，二つのアプローチの出会う境界面近くに「ウッディン基数」の概念が抽出されるに至った．

現在は，さまざまな巨大基数仮説，典型的には「非有界に多くのウッディン基数が存在する」という仮説のもとで「定義可能な実数の集合の性質が強制法でどう変わるか／どう変らないか」に注目することで，連続体の問題（をはじめとする集合論の宇宙の様相）を探る研究が進められている．

まとめ

- 集合論は解析学の舞台である「実数連続体」の定式化をめぐって始まった．
- 連続体問題は ZFC 集合論から独立であるが，そのことは問題の終わりを意味しない．
- 現代の集合論はゲーデルの内部モデルの方法とコーエンの強制法を方法論的支柱とする．
- 現代の集合論の主な研究対象としては巨大基数と（定義可能な）実数の集合がある．