等質量3体8の字解から分岐する非平面解

福田 宏 [1], 藤原 俊朗 [2], 尾崎 浩司 [1,2]
[1] 北里大学一般教育部，[2] 東海大学理学部
e-mail : fukuda@kitasato-u.ac.jp

1 概要

斉次ポテンシャル $-1/r^a$ で相互作用する平面上の等質量3体問題の8の字解について，冪 a をパラメタとして解を追跡し，非平面解への分岐を探索した。非平面解への直接の分岐はなく，$a = 0.9966$ で分岐する解を a が小さくなる方向へ追跡すると，$a = 0.8460$ で非平面解に分岐することを見出した。

2 分岐の必要条件

周期解の分岐の必要条件は，8の字解の作用のモース指数が変化することである [1]。作用

$$S(q) = \int_0^T L(q, \dot{q})dt$$

のモース指数とは，S の第2変分 $S^{(2)}$ を負にする独立な変分関数の個数である。T は周期，q は一般化座標，$L(q, \dot{q})$ はラグランジアン，ドットは時間微分である。作用の第 k 変分 $S^{(k)}$ は，h を実数，δ を変分関数として，

$$S(q + h\delta) = S^{(0)} + hS^{(1)} + \frac{h^2}{2}S^{(2)} + \cdots$$

で定義される。なお，この必要条件は，1つの例外を除いて十分条件になっている [1]。

8の字解は平面運動なので，粒子 $j = 1, 2, 3$ の座標を2次元 (x_j, y_j) にとれば，一般化座標 q はそれを並べた6次元 $q = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$，分岐後の運動として非平面解も含めるには，粒子 j の座標を3次元 (x_j, y_j, z_j) にとり，それを並べた9次元 $q = (x_1, y_1, z_1, \ldots, z_3)$ である。

3 分岐解

粒子の座標を3次元とした場合も，モース指数は，既に報告した粒子の座標を2次元とした場合と同じ $a = 0.9966, 1.3424$ で，それぞれ，2変化する。これは，8の字解は非平面解には分岐しないことを意味し，一方，$a = 0.9966$ と $a = 1.3424$ では実際に平面解へ分岐する [2]。

$a = 0.9966$ で分岐する平面解は，$a = 1$ で図1に示す Simó の発見した H 解 [3] となる。そこで，この分岐解も H 解と呼ぶことにする。

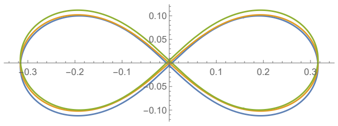

図 1. Simó H

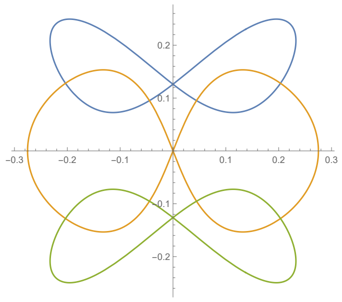

図 2. 分岐点 $a = 0.8460$ での H 解

粒子の座標を3次元にした計算を行うと，H 解は $a = 0.8460$ でモース指数が1変化して非平面解へ分岐する。分岐は a が小さい側の片側分岐である。図2は分岐点 $a = 0.8460$ での H 解，図3は分岐後の $a = 0.75$ における非平面解である。この非平面解は，a をさらに小さくしても存在し，$a = -1$ では，図3の3つの8の字が潰れて，ほぼ x 軸上の直線運動になる。$a < -1$ での数値計算は困難だが，この解は $a > -2$ まで存在すると予想される。

4 解の対称性と分岐解の対称性

8の字解は次の対称操作に対して不変である：

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}q(t) &= \sigma q(t - T/3), \\
\mathcal{S}q(t) &= -\tau q(-t), \\
\mathcal{M}q(t) &= \mu_x q(t - T/2).
\end{aligned}$$

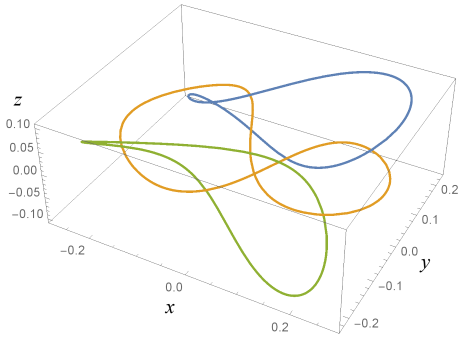

図 3. H 解から分岐した非平面解 $a = 0.75$

σ は粒子 (1,2,3) の巡回置換 (2,3,1)，τ は粒子 1 と 2 の入れ替え，μ_x は x 座標の反転である。この $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{M}$ から生成される群 D_6 が 8 の字解が平面上でもつ対称性である。

8 の字解を 3 次元空間での運動と見ると，もう一つの不変性，z 座標の反転 μ_z が加わる。すなわち，3 次元空間での 8 の字解の対称性は，$\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{M}$, μ_z から生成される群 $D_6 \times Z_2$ である。

作用に基づく群論的分岐理論 [1] によると，分岐解の対称性は，解のもつ対称性のなす群の既約表現によって決まる。既約表現の次元は分岐点でのモース指数の変化と一致し，分岐解の対称性は基底の対称性から構成される。

$a = 0.9966$ での H 解への分岐は，$\mathcal{M}\phi_\pm = \phi_\pm$，$\mathcal{S}\phi_\pm = \pm\phi_\pm$ である基底 $\phi_\pm$ を持つ 2 次元の既約表現に対応し，H 解の対称性は，$\mathcal{M}$ と $\mathcal{S}$ から生成される D_2 である。したがって，H 解を 3 次元の運動と見た対称性は，$\mathcal{M}$，$\mathcal{S}$，μ_z から生成される群 $D_2 \times Z_2$ となる。$D_2 \times Z_2$ の既約表現は 1 次元表現 8 つであり，その基底 ϕ は，$\mathcal{M}\phi = \pm\phi$，$\mathcal{S}\phi = \pm\phi$，$\mu_z\phi = \pm\phi$ である。$\mu_z\phi = \phi$ である 4 つの 1 次元表現は平面解への分岐，$\mu_z\phi = -\phi$ である 4 つが非平面解への分岐である。

$a = 0.8460$ における，非平面解への分岐は，$\mathcal{M}\phi = -1$，$\mathcal{S}\phi = -\phi$，$\mu_z\phi = -\phi$ である。これから，$\mu_z\mathcal{M}\phi = \phi$，$\mu_z\mathcal{S}\phi = \phi$，$\mathcal{M}\mathcal{S}\phi = \phi$，すなわち，この非平面解は $\mu_z\mathcal{M}$，$\mu_z\mathcal{S}$，$\mathcal{M}\mathcal{S}$ で不変である。なお，時間や粒子の入れ替えを無視した，$\mu_z\mu_x$, $\mu_x\mu_y$, $\mu_y\mu_z$ は軌道の対称性であり，順に，軌道が y 軸，z 軸，x 軸回りに 180 度回転対称であることを表す。図 3 の軌道は 3 つの座標軸回りに 180 度回転対称である。

5　非平面解の初期条件

H 解から分岐する非平面解の，$\mu_z\mathcal{S}$ 不変性，$\mu_z\mathcal{S}q(t) = q(t)$ で $t = 0$ とおくと，$t = 0$ の粒子の配置が，xy 面では図 4 白丸のような直線配置，yz 面では図 5 白丸のような二等辺三角形配置であることと，角運動量 l の z 成分 $l_z = 0$ が導かれる。同じように，$\mathcal{M}\mathcal{S}$ に関する不変性，$\mathcal{M}\mathcal{S}q(t) = q(t)$ で，$t = -T/4$ と置くと，$t = -T/4$ での粒子の配置が，xy 面では図 4 黒丸のような二等辺三角形配置，yz 面では図 5 黒丸のような直線配置，及び，l の x 成分 $l_x = 0$ が導かれる。したがって，H 解から分岐する非平面解は，$l_x = l_z = 0$ で，xy 面で二等辺三角形かつ yz 面で直線である配置から，xy 面で直線かつ yz 面で二等辺三角形である配置へ至る運動として探索できる。

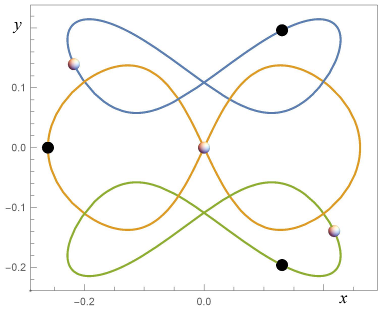

図 4. 図 3 の xy 面への射影. 黒丸 $t = -T/4$, 白丸 $t = 0$.

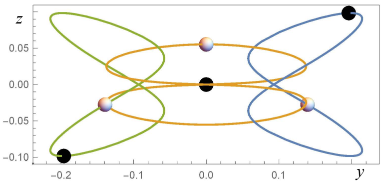

図 5. 図 3 の yz 面への射影. 黒丸 $t = -T/4$, 白丸 $t = 0$.

なお，Doedel らは，8 の字解の 1 粒子の質量を小さくすると，本稿と同じ対称性をもつ非平面解へ分岐し，質量 0 の極限で，円運動する 2 粒子を縫う制限 3 体問題の 8 の字型の軌道になることを報告している [4]。

参考文献

[1] Fujiwara T, Fukuda H, Ozaki H, *Variational principle of action and group theory for bifurcation of figure-eight solutions*, arXiv:2002.03496 (2020).

[2] Fukuda H, Fujiwara T, Ozaki H, *Morse index and bifurcation for figure-eight choreographies of the equal mass three-body problem*, J. Phys. A **52**(18), 185201 (2019)

[3] Simó C, *Dynamical properties of the figure eight solution of the three body problem*, Contemporary Mathematics **292**, 209–228, (2000).

[4] Doedel E J. *et al*, *Computation of periodic solutions of conservative systems with application to the 3-body problem*, Int. J. Bifurcation and Chaos **13**, No. 6 1353–1381 (2003)