

等質量 3 体 8 の字解のモースインデックス

福田 宏¹, 藤原 俊朗¹, 尾崎 浩司²

¹ 北里大学一般教育部, ² 東海大学理学部

e-mail : fukuda@kitasato-u.ac.jp

1 概要

斉次ポテンシャル $-1/r^a$ および Lennard-Jones ポテンシャル $1/r^{12} - 1/r^6$ で相互作用する平面上的等質量 3 体問題の 8 の字解のモースインデックスを数値計算した。

モースインデックスとは作用

$$S(q) = \int_0^T L(q, \dot{q}) dt$$

の第 2 変分 $S^{(2)}$ を負にする独立な変分関数の個数である。作用の第 k 変分 $S^{(k)}$ は, h を実数, δ を変分関数として,

$$S(q + h\delta) = S^{(0)} + hS^{(1)} + \frac{h^2}{2}S^{(2)} + \dots$$

で定義される。

$$q = (q_0, q_1, \dots, q_5)^*$$

は平面上の 3 体の座標 (* は転置), $L(q, \dot{q})$ はラグランジアンである。

変分関数 δ の空間は, 周期関数, コレオグラフィ, 8 の字対称性をもつコレオグラフィの 3 通りで計算を行った。これらのモースインデックスを順に N, N_c, N_e とする。

2 モースインデックスの数値計算

第 2 変分は

$$S^{(2)} = \int_0^T dt \delta^* \hat{S}^{(2)} \delta,$$

$$(\hat{S}^{(2)})_{ij} = -\delta_{ij} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_j}$$

と書けるので, 演算子 $\hat{S}^{(2)}$ の固有値問題

$$\hat{S}^{(2)}\psi = \lambda\psi \quad (1)$$

を解けば, $\delta = \psi$ の時 $S^{(2)} = \lambda$ であり, 負の固有値の個数がモースインデックスである。固有値問題は, 文献 [1] を参考に, ψ をフーリエ級数

$$\psi = \frac{b_0}{\sqrt{T}} + \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{k=1}^m (a_k \sin(k\omega t) + b_k \cos(k\omega t)),$$

$$\omega = 2\pi/T$$

で展開して, 展開係数行列の固有値問題として解いた。

固有値問題 (1) は, エネルギー保存に対応する 0 固有値を 1 つ, 角運動量保存に対応する 0 固有値を 1 つ, 運動量保存に対応する 0 固有値を 2 つ, 合計 4 つの 0 固有値をもつ。我々の経験では, エネルギー保存に対応する 0 固有値は, 計算精度に敏感であり, その絶対値 $|\lambda_0|$ は, 数値計算をチェックする良い指標となる。

3 斉次ポテンシャル

斉次ポテンシャルについては, $m = 80$ で $|\lambda_0| < 10^{-6}$ の十分精度の高い計算を行うことができ, ポテンシャルの指数に応じて,

$$N(a) = \begin{cases} 4 & (0 \leq a \leq 0.9965) \\ 2 & (0.9974 \leq a \leq 1.3423) \\ 0 & (1.3425 \leq a) \end{cases}$$

そして,

$$N_c(a) = N_e(a) = 0 \quad (0 \leq a)$$

であった。

$a = 1$ の時, 2 重に縮重した正固有値 $\lambda = 0.0017428$ に着目する。この固有値は, $N(a)$ が $a = 0.9965$ 付近で 4 から 2 に減ることに対応する, 2 重に縮重した負固有値が正に転じたものである。図 1 は, 軌道 q にその固有関数 ψ の

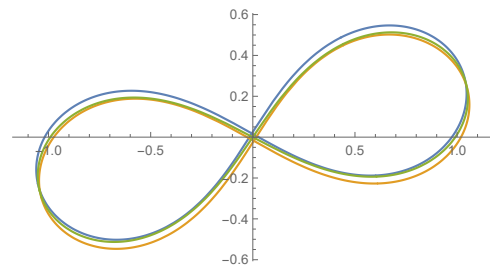


図 1. Simó H3 に対応する軌道 $q + h\psi$

変分を加えた軌道 $q + h\psi$ である。これは Simó の発見した, 8 の字解に非常に近いがコレオグラフィではない周期解 H3 [2] とほぼ一致し

ている。Simó の周期解は H3 の他に H1 と H2 もあるが、それらもこの固有空間内で構成することができる。

4 Lennard-Jones ポテンシャル

Lennard-Jones ポテンシャルについては、 $T \rightarrow \infty$ で $a = 6$ の斉次ポテンシャルの元での 8 の字解に漸近する解、文献 [3] で α 解と名付けられた解について計算をおこなった。この解は、 $T \rightarrow \infty$ では通常の 8 の字型で、 T を連続的に変化させると、 T が最小の点 $T = T_m = 14.4793$ を通過して、図 2 のようなひょうたん型に至る。

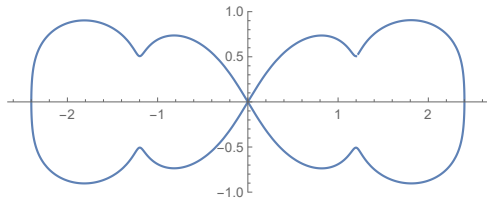


図 2. ひょうたん型 8 の字解. $T = 98.03$

$T \rightarrow \infty$ からこのように T を変化させていくと、 N は 0 から 12, N_c は 0 から 4, N_e は 0 から 1 に単調に増加することがわかった。途中、 $T = T_m$ で N は 5 から 6 へ、 N_c は 1 から 2 へ、 N_e は 0 から 1 へジャンプする。図 3 は N と N_c

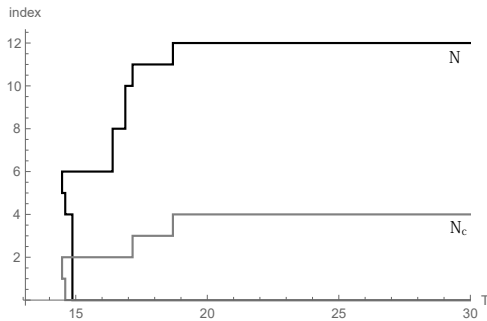


図 3. N と N_c

の変化の様子である。なお、固有値の数値計算は、 T の大きなひょうたん型ほど困難で、図 2 のひょうたん型で、 $m = 5120$, $|\lambda_0| < 10^{-4}$ 程度の精度である。

8 の字コレオグラフィーに対する作用の多様体を考え、オイラー標数 χ の関係式

$$\sum_{\gamma} (-1)^{\gamma} C^{\gamma} = \chi \quad (2)$$

を調べてみる。 γ はモースインデックス、 C^{γ} はモースインデックスが γ である臨界点の数である。

Sbano の定理 [4] により、ある T_0 に対して、 $T < T_0$ では 8 の字コレオグラフィーは存在しない、つまり多様体に臨界点はない。よって

$$\chi = 0. \quad (3)$$

一方、 $T = T_m$ 付近では α 解の外には解はないとすると、左辺は

$$(-1)^0 \times 1 + (-1)^1 \times 1 = 0. \quad (4)$$

したがって、作用の多様体は T によって変化するが、そのオイラー標数 χ は変化しないとすると、 χ は変化せずに 0 のままであり、(2) が成り立つ。

謝辞 本発表の内容について、示唆に富むコメントを下された京都大学、矢ヶ崎一幸、柴山允瑠両氏に感謝いたします。本研究は JSPS 科研費 17K05146 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] 柴山允瑠, 『舞踏解に関する第二変分の数値計算』, in: Computations and Calculations in Celestial Mechanics Proceedings of Symposium on Celestial Mechanics and N -body Dynamics, Eds. M. Saito et al, pp. 1–9, 2010.
- [2] Simó C, *Dynamical properties of the figure eight solution of the three body problem*, in: Proceedings of the Celestial Mechanics Conference dedicated to D. Saari for his 60th birthday, Evanston, ed. A. Chenciner et al, Contemporary Mathematics 292, pp. 209–228, 2000.
- [3] Fukuda H, Fujiwara T, Ozaki H, *Figure-eight choreographies of the equal mass three-body problem with Lennard-Jones-type potentials*, J. Phys. A: Math. Theor. 50, (2017), 105202–16 pages
- [4] Sbano L and Southall J, *Periodic solutions of the N -body problem with Lennard-Jones-type potential*, Dynamical Systems 25 (2010) 53–73.