結晶点群に基づく8の字解からの分岐解の対称性

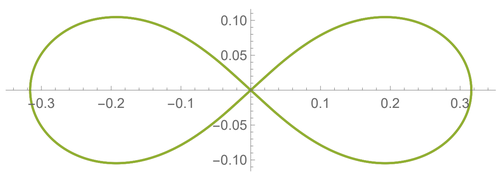
福田 宏[1], 藤原 俊朗[1], 尾崎 浩司[2]

[1]北里大学一般教育部, [2]東海大学理系教育センター

3体8の字解の対称性 結晶点群D_{6h}

8の字解$q(t)$は$\mathcal{C},\mathcal{S},\mathcal{M},\mu_z$で不変. これらは$\mathcal{C}$と$\mathcal{S}$が非可換$\mathcal{CSC}=\mathcal{S}$で点群$D_{6h}$を成す.

$\mathcal{C}q\equiv\sigma q(t-T/3)$, σ : 粒子の巡回置換, $\mathcal{C}^3=1$,
$\mathcal{S}q\equiv-\tau q(-t)$, τ : 粒子1, 2の入替, $\mathcal{S}^2=1$,
$\mathcal{M}q\equiv\mu_x q(t-T/2)$, μ_x : x座標反転, $\mu_x^2=1$,
μ_z : z座標反転, $\mu_z^2=1$.



3体8の字解(周期T)

分岐と直交表現

Lagrangian

$$L=\dot{q}^2/2-U(q),$$

の周期解qがパラメタ$\xi=\xi_b$で周期解q_bに分岐する時, Hessian

$$H(q;\xi)=-d^2/dt^2+\partial^2L/\partial q^2$$

の固有値を$\lambda(\xi)$, 固有空間の正規直交基底を$\phi(\xi)$, 列ベクトルをrとすると, $\xi\to\xi_b$で$\lambda(\xi)\to0$, $q_b\to q+\phi(\xi)r$. qを不変にする対称操作gと$H(q;\xi)$は実で可換なので, gのなす群Gの直交表現$D(g)$によってgは$g\phi=\phi D(g)$と表される. 作用と内積もgで不変ならば,

定理 1 (分岐解の対称性[1])

分岐解$q_b\to q+\phi r$は, 固有関数ϕrの対称性

$$G(r)=\{g|g\in G, D(g)r=r, r\neq0\}$$

をもつ.

定理 2 (作用の対称性[1])

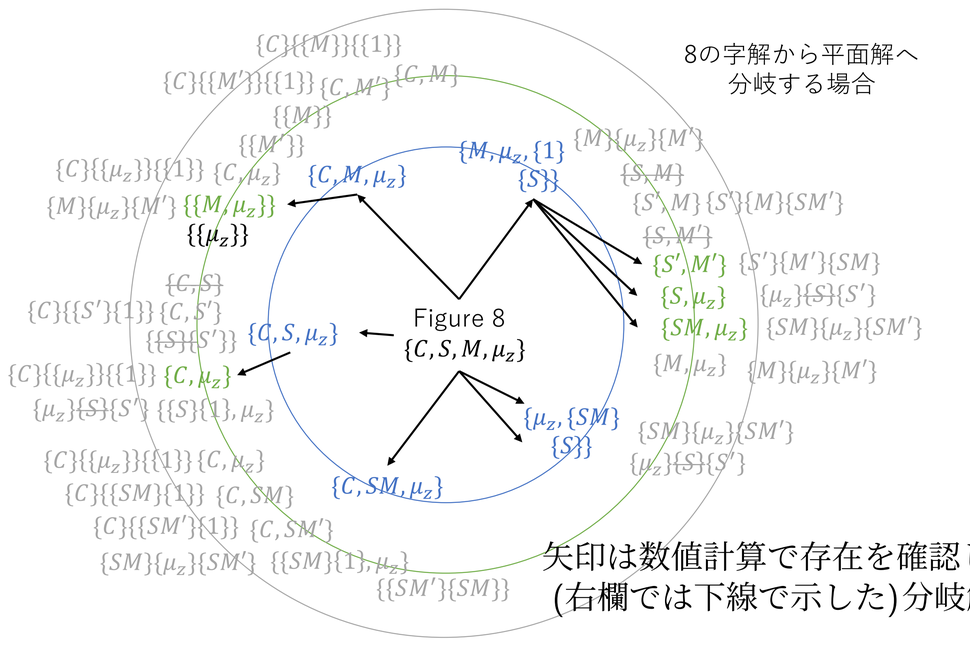
分岐解$q_b\to q+\phi r$に対して, ϕ以外の次元を停留にして, 固有空間に縮小した作用$S_{LS}(r)$は, その主要項$S(q+\phi r)$と同じ対称性$S_{LS}(D(g)r)=S_{LS}(r)$をもつ.

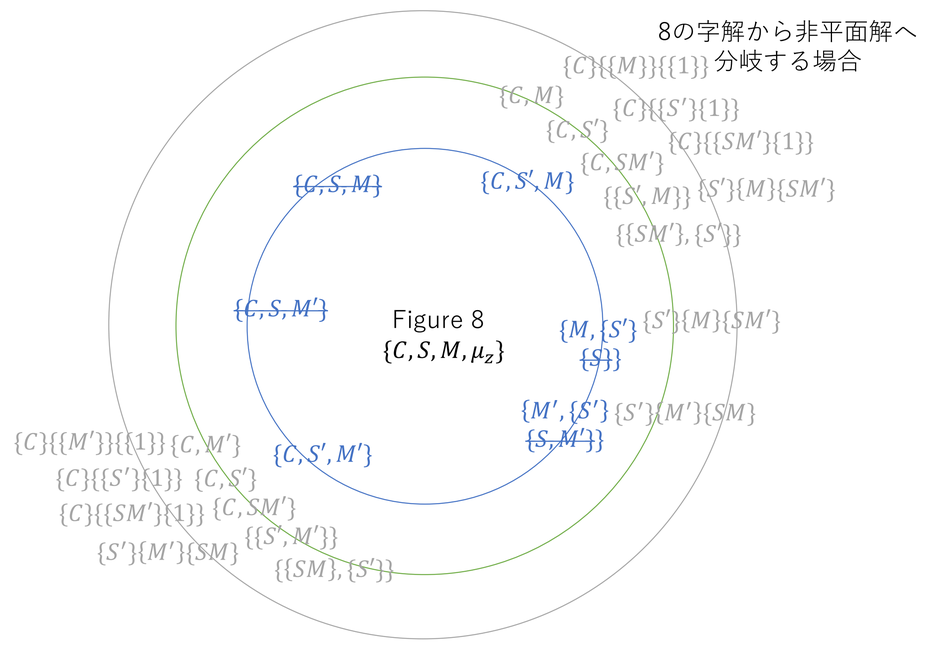
可能な分岐解の対称性

右欄に, 8の字解(青)と分岐解(緑)の対称性Gの生成元の既約直交表現(小括弧内)[2]と, 定理1による分岐解の対称性$G(r)$の記号と生成元(中括弧内)を示す. 2次元表現の図は, r平面に生成元と, 定理2による$S_{LS}(r)$の対称性(同じ種類の丸印が同値な点)を表す. $\mathcal{S}'=\mu_z\mathcal{S}$, $\mathcal{M}'=\mu_z\mathcal{M}$,

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\ R(n)=\begin{pmatrix}\cos2\pi/n&-\sin2\pi/n\\\sin2\pi/n&\cos2\pi/n\end{pmatrix},\ G(\theta)=G(\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}),$$

とする. 下図は, $G(r)$の生成元を中括弧内に記し, 同心円状に配置した分岐の全体図である. 2次元表現は, 2重の中括弧で$\mathcal{C}^x=1$の場合の生成元を記した. なお, xy面内の平面運動はμ_z対称で, μ_z対称でない解は非平面運動(^{NP}). また, SC^x対称な解は平面解で, μ_zを伴わない$\mathcal{SC}^x=C^{-x}S$対称は不可能(**又は打消線).

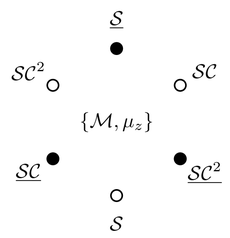




8の字解$D_{6h}\{\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{S},\mu_z\}$からの分岐解の対称性

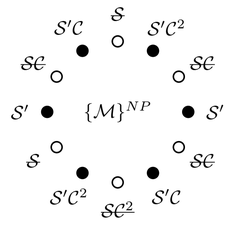
1. $(D(\mathcal{CM}),D(\mathcal{S}),D(\mu_z))=(1,1,1)$; $G(r)=D_{6h}\underline{\{\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{S},\mu_z\}}$.
2. $(1,-1,1)$; $C_{6h}\underline{\{\mathcal{C},\mathcal{M},\mu_z\}}$,
3. $(-1,1,1)$; $D_6\underline{\{\mathcal{C},\mathcal{S},\mu_z\}}$,
4. $(-1,-1,1)$; $G(h)=D_6\underline{\{\mathcal{C},\mathcal{SM},\mu_z\}}$,
5. $(1,1,-1)$; $D_6\{\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{S}\}^{**}$,
6. $(1,-1,-1)$; $D_6\{\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{S}'\}^{NP}$,
7. $(-1,1,-1)$; $D_6\{\mathcal{C},\mathcal{S},\mathcal{M}'\}^{**}$,
8. $(-1,-1,-1)$: $D_6\{\mathcal{C},\mathcal{S}',\mathcal{M}'\}^{NP}$.
9. $(R(3),J,I)$:

$$G(\theta)=\begin{cases}D_{2h}\underline{\{\mathcal{SC}^{2n+1},\mathcal{M},\mu_z\}}, & \theta=\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\\ D_2\{\mathcal{M},\mu_z\}, & \text{その他}\end{cases}$$



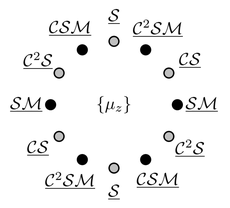
10. $(R(3),J,-I)$:

$$G(\theta)=\begin{cases}D_2\{\mathcal{M},\mathcal{S}'\mathcal{C}^{2n}\}^{NP}, & \theta=\frac{\pi}{3}n\\ D_2\{\mathcal{M},\mathcal{SC}^{2n+1}\}^{**}, & \theta=\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\\ C_2\{\mathcal{M}\}^{NP}, & \text{その他}\end{cases}$$



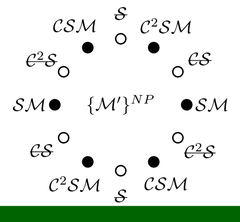
11. $(R(6),J,I)$:

$$G(\theta)=\begin{cases}\begin{cases}D_2\underline{\{\mathcal{C}^n\mathcal{SM},\mu_z\}}, & \text{even } n,\\ D_2\underline{\{\mathcal{C}^n\mathcal{S},\mu_z\}}, & \text{odd } n,\end{cases}, & \theta=\frac{\pi}{6}n,\\ C_2\{\mu_z\}, & \text{その他}\end{cases}$$



12. $(R(6),J,-I)$:

$$G(\theta)=\begin{cases}\begin{cases}D_2\{\mathcal{C}^n\mathcal{SM},\mathcal{M}'\}^{NP}, & \text{even } n,\\ D_2\{\mathcal{C}^n\mathcal{S},\mathcal{M}'\}^{**}, & \text{odd } n,\end{cases}, & \theta=\frac{\pi}{6}n\\ C_2\{\mathcal{M}'\}^{NP}, & \text{その他}\end{cases}$$



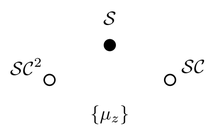
分岐解$D_6\{\mathcal{C},\mathcal{S},\mu_z\}$からの分岐解の対称性

1. $(D(\mu_z\mathcal{C}),D(\mathcal{S}))=(1,1)$; $G(r)=D_6\{\mathcal{C},\mu_z,\mathcal{S}\}$
2. $(1,-1)$; $C_6\underline{\{\mathcal{C},\mu_z\}}$
3. $(-1,1)$; $D_3\underline{\{\mathcal{C},\mathcal{S}\}}^{**}$
4. $(-1,-1)$; $D_3\{\mathcal{C},\mathcal{S}'\}$
5. $(R(3),J)$:

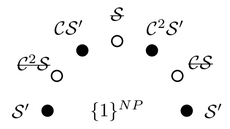
$$G(\theta)=\begin{cases}D_2\{\mu_z,\mathcal{SC}^{2n+1}\}, & \theta=\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\\ C_2\{\mu_z\}, & \text{その他}\end{cases}$$

6. $(R(6),J)$:

$$G(\theta)=\begin{cases}\begin{cases}C_2\{\mathcal{C}^n\mathcal{S}'\}^{NP}, & \text{even } n,\\ C_2\{\mathcal{C}^n\mathcal{S}\}^{**}, & \text{odd } n,\end{cases}, & \theta=\frac{\pi}{6}n,\\ \{1\}^{NP}, & \text{その他}\end{cases}$$



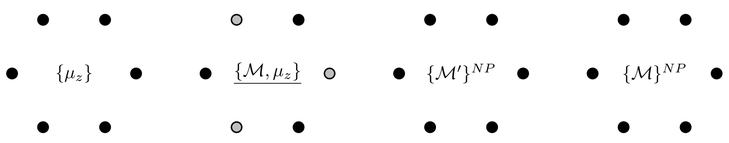
5. $(R(3),J)$



6. $(R(6),J)$

分岐解$C_{6h}\{\mathcal{C},\mathcal{M},\mu_z\}$からの分岐解の対称性

1. $(D(\mathcal{CM}),D(\mu_z))=(1,1)$; $G(r)=C_{6h}\{\mathcal{C},\mathcal{M},\mu_z\}$
2. $(1,-1)$; $C_6\{\mathcal{C},\mathcal{M}\}^{NP}$
3. $(-1,1)$; $C_6\{\mathcal{C},\mu_z\}$
4. $(-1,-1)$; $C_6\{\mathcal{C},\mathcal{M}'\}^{NP}$
5. $(R(6),I)$; $C_2\{\mu_z\}$
6. $(R(3),I)$; $D_2\underline{\{\mathcal{M},\mu_z\}}$
7. $(R(6),-I)$; $C_2\{\mathcal{M}'\}^{NP}$
8. $(R(3),-I)$; $C_2\{\mathcal{M}\}^{NP}$



5. $(R(6),I)$ 6. $(R(3),I)$ 7. $(R(6),-I)$ 8. $(R(3),-I)$

分岐解$D_{2h}\{\mathcal{S},\mathcal{M},\mu_z\}$からの分岐解の対称性

1. $(D(\mathcal{S}),D(\mathcal{M}),D(\mu_z))=(1,1,1)$; $G(r)=D_{2h}\underline{\{\mathcal{S},\mathcal{M},\mu_z\}}$
2. $(1,-1,-1)$; $D_2\{\mathcal{S},\mathcal{M}'\}^{**}$
3. $(1,1,-1)$; $D_2\{\mathcal{S},\mathcal{M}\}^{**}$
4. $(1,-1,1)$; $D_2\underline{\{\mathcal{S},\mu_z\}}$
5. $(-1,-1,1)$; $D_2\underline{\{\mathcal{SM},\mu_z\}}$
6. $(-1,1,-1)$; $D_2\{\mathcal{M},\mathcal{S}'\}^{NP}$
7. $(-1,-1,-1)$; $D_2\underline{\{\mathcal{S}',\mathcal{M}'\}}^{NP}$
8. $(-1,1,1)$; $D_2\{\mathcal{M},\mu_z\}$

参考文献

[1] Toshiaki Fujiwara, Hiroshi Fukuda and Hiroshi Ozaki, *Variational Principle of Action and Group Theory for Bifurcation of Figure-eight solutions*, arXiv:2002.03496v3 [math-ph] (15 Feb 2020)

[2] 福田宏『Mathematicaによる3体8の字解の分岐解析に必要な点群の既約直交表現』, 北里大学一般教育紀要(2024出版予定)