北里大学一般教育紀要　29（2024）　27-40

原著論文

Mathematicaによる３体８の字解の分岐解析に必要な点群の既約直交表現

福　田　　　宏

北里大学一般教育部

要旨

古典力学３体問題８の字解の分岐解析に必要な点群の既約直交表現を，Mathematicaを使って，直接，1)生成元の関係式と直交条件を行列の方程式として解くことで直交表現を得て，2)同値な表現の定義を行列の方程式として解くことで同値な表現を取り除き，3)可換な対称行列かを調べることで既約判定して導出する。

１．はじめに

古典力学３体問題の８の字解の分岐解析[1-3]では，８の字解の対称性の成す群 D_{6h}[4]の既約直交表現によって，８の字解から分岐する周期解の対称性が決まる。D_{6h} およびその部分群の既約直交表現は，32点群の既約表現として広く知られている。[5]

本稿では，これらの群について，数式処理システムMathematica[6]によって直接，既約直交表現を導出する。第２節では，既約直交表現の定義とMathematicaを念頭に置いたその求め方を述べる。第３節は，D_{6h} と関連する部分群の既約直交表現をMathematicaで求めた結果，第４節は，まとめと考察である。

２．既約表現の求め方

位数 $|G|$ の有限群 $G=\{g_1, g_2, \ldots, g_{|G|}\}$ の n 次元表現とは，G の演算表

$$g_{f(i,j)}=g_i g_j, \tag{1}$$

を満たす n 次正方行列 $D(g_i)$

$$D(g_{f(i,j)})=D(g_i)D(g_j) \tag{2}$$

である。既約表現とは，直和に分解できない表現である。また，直交表現とは $D(g_i)$ が直交行列である表現である。

群 G の n 次既約表現は，n 次正方行列 $D(g_i)$ を未知行列として，連立方程式(2)を解いて求めることができる。この未知行列が $|G|$ 個の方程式(2)は，多くの場合，次のようにして，より少ない未知数の連立方程式として解くことができる。

G の $h<|G|$ 個の元

$$r_j \in G,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ h \leq |G| \tag{3}$$

の（負も許す）冪の積 $\pi_i(r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_h)$ によって，$g_i \in G$ が

$$g_i=\pi_i(r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_h) \tag{4}$$

と書けるとする。そして，$|G|^2$ 個の演算表

$$\pi_{f(i,j)}(r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_h)=\pi_i(r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_h)\pi_j(r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_h) \tag{5}$$

は，より少ない $h'<|G|^2$ 個の関係式

$$p_j(r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_h)=1,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ h' \tag{6}$$

に整理できるとする。ここで，$p_j(r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_h)$ は $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_h$ の（負も許す）冪の積である。このような元 $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_h$ を群 G の生成元と呼ぶ[7]。

すると，群 G の n 次既約表現 $D(g_i)$ は，生成元 r_j を n 次正方行列 R_j に置き換えた演算の関係式

$$p_j(R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_h)=1,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ h' \tag{7}$$

を満たす n 次正方行列 R_j から

$$D(g_i)=\pi_i(R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_h) \tag{8}$$

によって求めることができる。ここで，$\pi_i(R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_h)$ は R_j の冪の積なので，直交表現とは R_j が直交行列であること，

$$^tR_jR_j=1 \tag{9}$$

と同値である。ここで，^{t} は転置行列を表す。

なお，$D(g_i)$ が直交表現で，T が直交行列ならば，$^tTD(g_i)T$ も直交表現であり，$^tTT=1$ となる T に対し，直交表現 $D(g_i)$ と

$$T^{-1}D(g_i)T \tag{10}$$

を同値な直交表現という。

８の字解の分岐解析では，群 G の要素 g_i と交換する実対称演算子の固有関数の対称性を問題にするので，G の既約直交表現を求める必要がある。

2.1．１次元既約直交表現

R_j を１次正方行列として，(7)と(9)の連立方程式は Mathematica の関数 Solve を使って解くことができる。この解は既約直交表現である。

2.2．２次元既約直交表現

R_j を２次正方行列とした場合の(7)と(9)の連立方程式も，Mathematica の Solve で解くことができる。n_a 個の解を

$$R_j^{(i)},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n_a$$

とする。この解は直交表現であり，後述のように D_{6h} の場合，解の個数 n_a は300を超えるが，その多くは同値である。

2.2.1．同値判定

既に判定を終えた k 個の解を $A_j^{(i)},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ k$ とする。T についての方程式

$$T^{-1}R_j^{(i)}T=A_j^{(l)},\ {}^tTT=1,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ h \tag{11}$$

が解ければ $R_j^{(i)}$ は，すでに判定を終えた解 $A_j^{(l)}$ と同値である。

はじめ $k=0,\ i=1$ として，

1．$R_j^{(i)}$ が全ての $A_j^{(l)},\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ k$ と同値でなければ，$A_j^{(k+1)}$ を $R_j^{(i)}$ として k を１増やす。

2．i を１増やす。

3．$i\leq n_a$ なら１に戻る。

$A_j^{(i)},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ k$ が同値でない解である。

なお，Mathematica の Solve で得られる解は，最後の方が簡単な形をしているようなので，第３節では，最後の解から逆順に判定している。

2.2.2．既約判定

２次正方行列の場合，直和に分解できるとは対角行列と同値ということなので，直交表現 $A_j^{(i)}$ が可約であるとは，共通の直交行列 T によって，${}^tTA_j^{(i)}T,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ h$ が全て対角行列になるということである。対称行列は直交行列で対角化できるので，

$$\text{直交行列 } T \text{ に対して，} {}^tTAT \text{ が対角行列} \Leftrightarrow A \text{ が対称行列} \tag{12}$$

であり，複数の正方行列が同時対角化できる必要十分条件は，それらが可換であることなので，

$A_j^{(i)}$ が対称

$$ {}^tA_j^{(i)}=A_j^{(i)},\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ h \tag{13}$$

で，可換

$$A_j^{(i)}A_l^{(i)}=A_l^{(i)}A_j^{(i)},\ j,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ h \tag{14}$$

かどうか調べる。そうであれば，$A_j^{(i)}$ は可約な直交表現であり，そうでなければ，$A_j^{(i)}$ は既約直交表現である。

３．８の字解分岐解析に必要な点群の既約直交表現

８の字解の分岐解析に必要な，８の字解の対称性 $G=D_{6h}$ と，その既約直交表現 $D(g)$ で不変なベクトルをもつ，分岐解の対称性の候補となる部分群

$$G(v)=\{g\,|\,g\in G,\ D(g)v=v,\ v\neq 0\} \tag{15}$$

を求め，さらに，分岐解からの分岐を解析するために，部分群 $G(v)$ に対して，既約直交表現と部分群を求めることを，部分群が $\{1\}$ になるまで繰り返す。あわせて，部分群 $G(v)$ の射影演算子

$$P(v)\equiv\frac{1}{|G(v)|}\sum_{g\in G(v)}D(g) \tag{16}$$

も計算する。

以下では，関係式(6)を満たす生成元 r_j の積(4)が，D_{6h} のような記号 G で表される群と同型であることを，

$$G\{r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_h\,|\,p_i(r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_h)=1,\ i=1,\ \ldots,\ h'\} \tag{17}$$

と表記する。その際，生成元 $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_h$ は，添え字のない小文字 $r,\ s,\ m,\ \ldots$ を使って書き，積の交換則など，関係式の右辺を単位元１にそろえると意味がわかりにくくなる場合は，右辺を単位元１に揃えない。

この記法で，８の字解の対称性は，n を自然数として，

$$\begin{aligned}&D_n\{r,\ s\,|\,r^n=s^2=1,\ rsr=s\},\\&D_{nh}\{r,\ s,\ m\,|\,r^n=s^2=m^2=1,\ rsr=s,\ mr=rm,\ ms=sm\}\end{aligned} \tag{18}$$

および，

$$\begin{aligned}&C_n\{r\,|\,r^n=1\},\\&C_{nh}\{r,\ m\,|\,r^n=m^2=1,\ mr=rm\}\end{aligned} \tag{19}$$

と書かれる。記号 D_n, D_{nh}, C_n, C_{nh} は，結晶点群を表すシェーンフリース記号[4]で，D_n は二面体

群（Dihedral group），C_n は巡回群（Cyclic group）と呼ばれる。n が奇数の時は，D_{nh} と D_{2n} は同型，C_{nh} と C_{2n} も同型，さらに，n が 2 なら，D_2 と C_{2h} も同型である。

なお，群(18)-(19)に対しては，定義(18)-(19)を参照してもらうことにして，縦棒の右側の関係式はいちいち書かずに省略する。また，群の生成元 $r_1, r_2, \ldots, r_h$ の部分集合から成る部分群は，元の群（拡大群）との関係がわかるように，元の群の生成元で，例えば，$D_{6h}\{r, s, m\}$ の部分群 $D_2\{r^3, ms\}$ のように表記する。

結晶点群では，既約表現を A_{1g} のような英大文字に添え字をつけたマリケン記号[8]で表す。そこで，本節のMathematicaによる計算結果にも，結晶点群の文献[5]と比較ができるように同じマリケン記号を付す。

以下，

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad Q(n)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}a(n)&b(n)\\b(n)&4-a(n)\end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$a(n)=\begin{cases}4, & n \bmod 6=0\\3, & n \bmod 6=1,5\\1, & n \bmod 6=2,4\\0, & n \bmod 6=3\end{cases},\quad b(n)=\begin{cases}0, & n \bmod 6=0,3\\\sqrt{3}, & n \bmod 6=1,2\\-\sqrt{3}, & n \bmod 6=4,5\end{cases} \tag{21}$$

$$R(n)=\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{n}&-\sin\frac{2\pi}{n}\\\sin\frac{2\pi}{n}&\cos\frac{2\pi}{n}\end{pmatrix},\quad G(\theta)=G(\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}),\quad P(\theta)=P(\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}) \tag{22}$$

と書く。

3.1. D_{6h} の既約直交表現

$G=D_{6h}\{r, s, m\}$ に対する関係式(7)

$$R^6=S^2=1,\ RSR=S,\ MS=SM,\ MR=RM. \tag{23}$$

直交条件(9)

$${}^tRR={}^tSS={}^tMM=1. \tag{24}$$

3.1.1. 1次元既約直交表現

R, S, M を1次正方行列として(23)と(24)の連立方程式を解く。解すなわち1次元の既約直交表現は8通り：

$$(R, S, M)=(\pm 1, \pm 1, \pm 1). \tag{25}$$

これらのマリケン記号と部分群 $G(v)$ は,

1. A_{1g}：$(R, S, M)=(+1, +1, +1)$；$G(v)=D_{6h}\{r, s, m\}$
2. A_{2g}：$(R, S, M)=(+1, -1, +1)$；$G(v)=C_{6h}\{r, m\}$
3. B_{1u}：$(R, S, M)=(-1, +1, +1)$；$G(v)=D_{3h}\{r^2, s, m\}$
4. B_{2u}：$(R, S, M)=(-1, -1, +1)$；$G(v)=D_{3h}\{r^2, sr^3, m\}$
5. A_{1u}：$(R, S, M)=(+1, +1, -1)$；$G(v)=D_6\{r, s\}$
6. A_{2u}：$(R, S, M)=(+1, -1, -1)$；$G(v)=D_6\{r, ms\}$
7. B_{1g}：$(R, S, M)=(-1, +1, -1)$；$G(v)=D_{3h}\{r^2, s, mr^3\}$
8. B_{2g}：$(R, S, M)=(-1, -1, -1)$；$G(v)=D_{3h}\{r^2, sr^3, mr^3\}$

3.1.2. 2次元既約直交表現

R, S, Mを2次正方行列として,(23)と(24)の連立方程式を解くと320個の解が得られ,同値判定2.2.1で40個になり,既約判定2.2.2で解すなわち既約直交表現は4個になる。これらのマリケン記号,部分群 $G(v)$ と射影演算子は,

1. E_{2g}：$(R, S, M)=(R(3), J, I)$；

$$G(\theta), P(\theta)=\begin{cases} D_{2h}\{m, r^3, sr^{2n+1}\}, Q(2n+1), & \theta=\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{6} \\ D_2\{m, r^3\}, I, & \text{その他} \end{cases}$$

2. E_{2u}：$(R, S, M)=(R(3), J, -I)$；

$$G(\theta), P(\theta)=\begin{cases} D_2\{r^3, msr^{2n}\}, Q(2n), & \theta=\frac{\pi}{3}n \\ D_2\{r^3, sr^{2n+1}\}, Q(2n+1), & \theta=\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{6} \\ C_2\{r^3\}, I, & \text{その他} \end{cases}$$

3. E_{1u}：$(R, S, M)=(R(6), J, I)$；

$$G(\theta), P(\theta)=\begin{cases} D_2\{m, sr^{3-n}\}, Q(n), & \theta=\frac{\pi}{6}n \\ C_2\{mr^3\}, I, & \text{その他} \end{cases}$$

4. E_{1g}：$(R, S, M)=(R(6), J, -I)$；

$$G(\theta), P(\theta)=\begin{cases} D_2\{mr^3, sr^{3-n}\}, Q(n), & \theta=\frac{\pi}{6}n \\ C_2\{mr^3\}, I, & \text{その他} \end{cases}$$

3.2. D_6 の既約直交表現

$G=D_6\{r, s\}$ に対する関係式(7)

$$R^6=S^2=1, RSR=S. \tag{26}$$

直交条件(9)

$$ {}^tRR={}^tSS=1. \tag{27} $$

3.2.1．1次元既約直交表現

R, S を1次正方行列として(26)と(27)の連立方程式を解く。解すなわち1次元の既約直交表現は4通り：

$$ (R, S)=(\pm1,\ \pm1). \tag{28} $$

これらのマリケン記号と部分群 $G(v)$ は，

1．A_1：$(R, S)=(+1,\ +1)$；$G(v)=D_6\{r, s\}$
2．A_2：$(R, S)=(+1,\ -1)$；$G(v)=C_6\{r\}=C_{3h}\{r^2,\ r^3\}$
3．B_1：$(R, S)=(-1,\ +1)$；$G(v)=D_3\{r^2,\ s\}$
4．B_2：$(R, S)=(-1,\ -1)$；$G(v)=D_3\{r^2,\ sr^3\}$

3.2.2．2次元既約直交表現

R, S を2次正方行列として，(26)と(27)の連立方程式を解くと52個の解が得られ，同値判定2.2.1で12個になり，既約判定2.2.2で解すなわち既約直交表現は2個になる。これらのマリケン記号，部分群 $G(v)$ と射影演算子は，

1．E_2：$(R, S)=(R(3),\ J)$；

$$ G(\theta),\ P(\theta)=\begin{cases} D_2\{r^3,\ sr^{2n+1}\},\ Q(2n+1), & \theta=\dfrac{\pi}{3}n+\dfrac{\pi}{6} \\ C_2\{r^3\},\ I, & \text{その他} \end{cases} $$

2．E_1：$(R, S)=(R(6),\ J)$；

$$ G(\theta),\ P(\theta)=\begin{cases} C_2\{sr^{3-n}\},\ Q(n), & \theta=\dfrac{\pi}{6}n \\ \{1\},\ I, & \text{その他} \end{cases} $$

3.3．C_{6h} の既約直交表現

$G=C_{6h}\{r, m\}$ に対する関係式(7)

$$ R^6=M^2=1,\ MR=RM. \tag{29} $$

直交条件(9)

$$ {}^tRR={}^tMM=1. \tag{30} $$

3.3.1. 1次元既約直交表現

R, Mを1次正方行列として(29)と(30)の連立方程式を解く。解すなわち1次元の既約直交表現は4通り：

$$(R, M)=(\pm 1, \pm 1). \tag{31}$$

これらのマリケン記号と部分群$G(v)$は,

1. A_g : $(R, M)=(+1, +1)$; $G(v)=C_{6h}\{r, m\}$
2. B_u : $(R, M)=(-1, +1)$; $G(v)=C_{3h}\{r^2, m\}$
3. A_u : $(R, M)=(+1, -1)$; $G(v)=C_6\{r\}=C_{3h}\{r^2, r^3\}$
4. B_g : $(R, M)=(-1, -1)$; $G(v)=C_{3h}\{r^2, mr^3\}$

3.3.2. 2次元既約直交表現

R, Mを2次正方行列として，(29)と(30)の連立方程式を解くと36個の解が得られ，同値判定2.2.1で14個になり，既約判定2.2.2で解すなわち既約直交表現は4個になる。これらのマリケン記号，部分群$G(v)$と射影演算子は,

1. E_{2g} : $(R, M)=(R(3), +I)$; $G(v)=D_2\{m, r^3\}$, $P(v)=I$
2. E_{2u} : $(R, M)=(R(3), -I)$; $G(v)=C_2\{r^3\}$, $P(v)=I$
3. E_{1u} : $(R, M)=(R(6), +I)$; $G(v)=C_2\{m\}$, $P(v)=I$
4. E_{1g} : $(R, M)=(R(6), -I)$; $G(v)=C_2\{mr^3\}$, $P(v)=I$

3.4. $C_{3h}=C_6$の既約直交表現

$G=C_{3h}\{r, m\}$に対する関係式(7)

$$R^3=M^2=1, MR=RM. \tag{32}$$

3.4.1. 1次元既約直交表現

R, Mを1次正方行列として(32)と(30)の連立方程式を解く。解すなわち1次元の既約直交表現は2通り：

$$(R, M)=(+1, \pm 1). \tag{33}$$

これらのマリケン記号と部分群$G(v)$は,

1. A' : $(R, M)=(+1, +1)$; $G(v)=C_{3h}\{r, m\}$
2. A'' : $(R, M)=(+1, -1)$; $G(v)=C_3\{r\}$

3.4.2. 2次元既約直交表現

R, Mを2次正方行列として，(32)と(30)の連立方程式を解くと10個の解が得られ，同値判定2.2.1で5個になり，既約判定2.2.2で解すなわち既約直交表現は2個になる。これらのマリケン記号，部分群 $G(v)$ と射影演算子は，

1．E'：$(R, M)=(R(3), +I)$；$G(v)=C_2\{m\}$, $P(v)=I$
2．E''：$(R, M)=(R(3), -I)$；$G(v)=\{1\}$, $P(v)=I$

3.5. $\boldsymbol{D_3}$の既約直交表現

$G=D_3\{r, s\}$ に対する関係式(7)

$$R^3=S^2=1,\ RSR=S. \tag{34}$$

3.5.1. 1次元既約直交表現

R, Sを1次正方行列として(27)と(34)の連立方程式を解く。解すなわち1次元の既約直交表現は2通り：

$$(R, S)=(+1, \pm 1). \tag{35}$$

これらのマリケン記号と部分群 $G(v)$ は，

1．A_1：$(R, S)=(+1, +1)$；$G(v)=C_3\{r, s\}$
2．A_2：$(R, S)=(+1, -1)$；$G(v)=C_3\{r\}$

3.5.2. 2次元既約直交表現

R，Sを2次正方行列として，(27)と(34)の連立方程式を解くと14個の解が得られ，同値判定2.2.1で4個になり，既約判定2.2.2で解すなわち既約直交表現は1個になる。このマリケン記号，部分群 $G(v)$ と射影演算子は，

1．E：$(R, S)=(R(3), J)$；

$$G(\theta),\ P(\theta)=\begin{cases} C_2\{sr^{2n+1}\},\ Q(2n+1), & \theta=\dfrac{\pi}{3}n+\dfrac{\pi}{6} \\ \{1\},\ I, & \text{その他} \end{cases}$$

3.6. $\boldsymbol{C_3}$の既約直交表現

$G=C_3\{r\}$ に対する関係式(7)

$$R^3=1. \tag{36}$$

直交条件(9)

$$ {}^{t}RR=1. \tag{37} $$

3.6.1．１次元既約直交表現

Rを１次正方行列として(36)と(37)の連立方程式を解く。解すなわち１次元の既約直交表現は１通り：

$$ R=+1. \tag{38} $$

このマリケン記号と部分群 $G(v)$ は，

1．A：$(R)=(+1)$；$G(v)=C_3\{r\}$

3.6.2．２次元既約直交表現

Rを２次正方行列として，(36)と(37)の連立方程式を解くと３個の解が得られ，同値判定2.2.1で２個になり，既約判定2.2.2で解すなわち既約直交表現は１個になる。これらのマリケン記号，部分群 $G(v)$ と射影演算子は，

1．E：$R=R(3)$；$G(v)=\{1\}$，$P(v)=I$

3.7．$\boldsymbol{D_{2h}}$ の既約直交表現

$G=D_{2h}\{r, s, m\}$ に対する関係式(7)

$$ R^2=S^2=M^2=1,\ RS=SR,\ MS=SM,\ MR=RM. \tag{39} $$

3.7.1．１次元既約直交表現

R，S，Mを１次正方行列として(39)と(24)の連立方程式を解く。解すなわち１次元の既約直交表現は８通り：

$$ (R, S, M)=(\pm1,\ \pm1,\ \pm1). \tag{40} $$

これらのマリケン記号と部分群 $G(v)$ は，

1．A_g：$(R, S, M)=(+1, +1, +1)$；$G(v)=D_{2h}\{r, s, m\}$
2．B_{1u}：$(R, S, M)=(+1, -1, +1)$；$G(v)=D_2\{r, m\}$
3．B_{3u}：$(R, S, M)=(-1, +1, +1)$；$G(v)=D_2\{s, m\}$
4．B_{2g}：$(R, S, M)=(-1, -1, +1)$；$G(v)=D_2\{rs, m\}$
5．B_{1g}：$(R, S, M)=(+1, +1, -1)$；$G(v)=D_2\{r, s\}$
6．A_u：$(R, S, M)=(+1, -1, -1)$；$G(v)=D_2\{r, ms\}$

7．B_{2u}：$(R, S, M)=(-1, +1, -1)$；$G(v)=D_2\{s, mr\}$
8．B_{3g}：$(R, S, M)=(-1, -1, -1)$；$G(v)=D_2\{sr, mr\}$

3.7.2．2次元既約直交表現

R, S, Mを2次正方行列として，(39)と(24)の連立方程式を解くと264個の解が得られ，同値判定2.2.1で36個になり，既約判定2.2.2で0個になる。すなわち2次元既約直交表現はない。

3.8．$D_2=C_{2h}$の既約直交表現

$G=D_2\{r, s\}$に対する関係式(7)

$$R^2=S^2=1, RS=SR. \tag{41}$$

3.8.1．1次元既約直交表現

R, Sを1次正方行列として(41)と(27)の連立方程式を解く。解すなわち1次元の既約直交表現は4通り：

$$(R, S)=(\pm 1, \pm 1). \tag{42}$$

これらのマリケン記号と部分群$G(v)$は，
1．A_g：$(R, S)=(+1, +1)$；$G(v)=D_2\{r, s\}$
2．B_1：$(R, S)=(+1, -1)$；$G(v)=C_2\{r\}$
3．B_2：$(R, S)=(-1, +1)$；$G(v)=C_2\{s\}$
4．B_3：$(R, S)=(-1, -1)$；$G(v)=C_2\{sr\}$

3.8.2．2次元既約直交表現

R, Sを2次正方行列として，(41)と(27)の連立方程式を解くと44個の解が得られ，同値判定2.2.1で10個になり，既約判定2.2.2で0個になる。すなわち2次元既約直交表現はない。

3.9．C_2の既約直交表現

$G=C_2\{r\}$に対する関係式(7)

$$R^2=1. \tag{43}$$

3.9.1．1次元既約直交表現

Rを1次正方行列として(43)と(37)の連立方程式を解く。解すなわち1次元の既約直交表現は2通り：

$$R=\pm 1. \tag{44}$$

このマリケン記号と部分群 $G(v)$ は，

1．A：$(R)=(+1)$；$G(v)=C_2\{r\}$

2．B：$(R)=(-1)$；$G(v)=\{1\}$

3.9.2．２次元既約直交表現

Rを２次正方行列として，(43)と(37)の連立方程式を解くと６個の解が得られ，同値判定2.2.1で３個になり，既約判定2.2.2で０個になる。すなわち2次元既約直交表現はない。

４．おわりに

本稿では，８の字解の分岐解析に必要な D_{6h} とその部分群の系列の既約直交表現を，数式処理システムMathematicaによって，直接，１）生成元の関係式と直交条件を行列の方程式として関数Solveで解くことで直交表現を得て，２）同値な表現の定義を行列の方程式としてSolveで解くことで同値な表現を取り除き，３）表現が交換可能な対称行列か調べることで既約判定することで求めた。この方法の長所は，幾何学的な考察を行わずに，定義から直接既約表現を求められることである。短所は，数式処理システムを利用することで，その部分がブラックボックスとなり，検証不可能になってしまうことである。

表現がユニタリ行列である表現をユニタリ表現という。ユニタリ表現については，

有限群の表現はユニタリ表現に同値であり，既約表現の次数の２乗和は群の位数に等しい。[9] (45)

この性質を第３節の既約直交表現について検討してみる。まず，１次元のユニタリ表現は，直交条件(9)をユニタリ条件に置き換えればMathematicaで同じように求めることができ，第３節の１次元の実数解の他に，C_{6h}, C_6, C_3 に非実数の解が，それぞれ，8, 4, 2 個現れる。

次に，２次元の表現について，既約直交表現は，3.1-3.6より，C_{6h}, C_6, C_3 は可換，他は非可換な，すべて実行列である。実直交行列はユニタリ行列で，可換なユニタリ行列は同時対角化できるので，２次の場合可約，非可換ならば同時対角化できないので既約である。したがって，C_{6h}, C_6, C_3 はユニタリ表現としては可約，その他はユニタリ表現としても既約である。

ここで，相似な実直交行列は同値の定義(10)を満たす[10]ので3.1-3.6の２次元表現はユニタリ表現としても同値ではない。以上より，第３節の既約直交表現は，C_{6h}, C_6, C_3 以外はすべて同値でない既約ユニタリ表現であり，それらについて次元の２乗和を計算すると，それぞれ群の位数に一致する。一方，C_{6h}, C_6, C_3 について，１次元のユニタリ表現は，それぞれ第３節の実数解4, 2, 1 個と上述の非実数解を加えて，２次元の既約直交表現はユニタリ表現としては既約でないので除いて，次元の２乗和を計算すると，やはり，群の位数に一致する。したがって，(45)より，

第３節の群の既約表現はこれで全てである事がわかる。

本稿は，８の字解の分岐解析に留まらず，定義に立ち返って既約表現を利用したい場合に役立つだろう。それゆえ，既約表現の学習の際の副教材としても面白いかもしれない。

本稿のMathematicaによる方法は，表現の構築と同値判定までは次元に依存しない方法となっているが，既約判定は２次元まで限定の方法なので，３次元以上の既約表現を得るには，３次元以上の既約判定の方法を構築する必要がある。

参考文献

［1］Hiroshi Fukuda, Toshiaki Fujiwara, Hiroshi Ozaki, *Morse index and bifurcation for figure-eight choreographies of the equal mass three-body problem* Journal of Physics A： Mathematical and Theoretical 52(18) 185201-185201（2019）.

［2］福田宏，藤原俊朗，尾崎浩司『等質量３体８の字解から分岐する非平面解』日本応用数理学会2020年年会講演予稿集(2020.9.8-10).

［3］Toshiaki Fujiwara, Hiroshi Fukuda and Hiroshi Ozaki, *Variational Principle of Action and Group Theory for Bifurcation of Figure-eight solutions*, arXiv：2002.03496v3［math-ph］(15 Feb 2020).

［4］Harris, D., Bertolucci, M., Symmetry and Spectroscopy. New York, Dover Publications, (1989).

［5］大森啓一『32点群の可約表現とこれらの既約表現の指標』鉱物学雑誌第10巻第３号215-250(1971).

［6］Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 13.3, Champaign, IL（2023）.

［7］H. S. M. Coxeter and W. O. J. Moser, Generators and Relations for Discrete Groups (Springer-Verlag, 1965).

［8］R. S. Mulliken, J. Chem. Phys., 23 1997（1955）.

［9］ジョージァイ『物理学におけるリー代数－アイソスピンから統一理論へ』－原著第２版 九後汰一郎 訳，吉岡書店（2010）.

［10］https://kilin-blog.blogspot.com/2024/02/blog-post.html

Abstract

Irreducible Orthogonal Representations of Point Groups for bifurcation analysis of figure eight choreography in the three-body problem using Mathematica

Hiroshi FUKUDA

To obtain irreducible orthogonal representations of point groups for bifurcation analysis of figure-eight choreography in the classical mechanical three-body problem, we directly used Mathematica as follows: 1) obtained the orthogonal representations by solving the relations of the generators with the definition of orthogonality as matrix equation, 2) excluded equivalent representations by solving the definition of equivalence as matrix equations, 3) determined if the representations are irreducible and orthogonal when matrices are neither commutable nor symmetric.

Keywords : point group, irreducible representation, orthogonal representation, Mathematica, three-body problem, figure eight