ランダム測度の従属操作と一般化Fleming-Viot過程

半田賢司（佐賀大学）

背景

正規化

ベータ分布 $=\mathcal{L}\left(\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}\right)$ $\longleftarrow$ Z_1, Z_2 : 独立ガンマr.v.

(同じscale parameter)

$\uparrow$ 定常分布 $\uparrow$ 定常分布

正規化

Wight-Fisher拡散モデル $\longleftarrow$ CIRモデル

$\downarrow$ 飛躍を許す $\downarrow$ 飛躍を許す

$\boxed{\text{ここで議論する問題}}$ $\longleftarrow$ CBI過程

(さらに無限次元化を考えたい) 正規化 (移入を伴う連続相空間上の分枝過程)

ベータ分布とWright-Fisher拡散モデル

<u>事実</u> ($c_1, c_2 > 0$：所与)

ベータ分布 $$B_{c_1,c_2}(dx) := \frac{\Gamma(c_1+c_2)}{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)} x^{c_1-1}(1-x)^{c_2-1}dx$$

は次の生成作用素Aを持つ拡散過程(A-過程) の(可逆)定常分布：

$$A = \frac{1}{2}x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\{c_1(1-x) - c_2 x\}\frac{d}{dx}, \qquad x \in [0,1]$$

問題 少なくとも次の意味で自然なジャンプ過程版とは？

(I) 定常分布が同定できること．

(II)（定常分布もこめて）無限次元化を許すこと．

解答 各$0 < \alpha < 1$ に対して生成作用素$A_\alpha G(x) :=$

$$\int_0^1 \frac{B_{1-\alpha,1+\alpha}(du)}{u^2}[xG(x+u(1-x))+(1-x)G(x-ux)-G(x)]$$
$$+\int_0^1 \frac{B_{1-\alpha,\alpha}(du)}{(\alpha+1)u}[c_1G(x+u(1-x))+c_2G(x-ux)-(c_1+c_2)G(x)]$$

を考えると，$A_\alpha G(x) \to AG(x)(\alpha \uparrow 1)$であり，

A_α-過程は次の分布$P_{\alpha,(c_1,c_2)}$を一意な定常分布として持つ．

$$\Gamma(\alpha+1)\int_0^1 B_{c_1,c_2}(dy)E_{\alpha,y}\left[(Z_1+Z_2)^{-\alpha}; \frac{Z_1}{Z_1+Z_2} \in \bullet\right]$$

ただし，$E_{\alpha,y}[e^{-\lambda_1 Z_1}e^{-\lambda_2 Z_2}] = e^{-y\lambda_1^\alpha}e^{-(1-y)\lambda_2^\alpha}$ $(\lambda_1, \lambda_2 \geq 0)$.

注意 $E_{\alpha,y}\left[(Z_1+Z_2)^{-\alpha}\right] = \Gamma(\alpha+1)^{-1}$.

定常分布 $P_{\alpha,(c_1,c_2)}$ について

$P_{\alpha,(c_1,c_2)}(\bullet)$

$$= \Gamma(\alpha+1)\int_0^1 B_{c_1,c_2}(dy)E_{\alpha,y}\left[(Z_1+Z_2)^{-\alpha};\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}\in\bullet\right]$$

(1) $E_{\alpha,y}$ **の下で** $\frac{Z_1}{Z_1+Z_2} \sim$ **Lamperti**(α,y) **：skewパラメータ** y **の** $(2-2\alpha)$ **次元skew Bessel過程の正側滞在時間の分布**

(2) 混合されている分布 $\Gamma(\alpha+1)E_{\alpha,y}\left[(Z_1+Z_2)^{-\alpha};\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}\in\bullet\right]$ **はskewパラメータ** y **の** $(2-2\alpha)$ **次元skew Bessel bridgeの正側滞在時間の分布(cf. [Y.Yano,2006])**

Wright-Fisher拡散モデル（およびその一般化である Fleming-Viot過程）のジャンプ版についての結果

一般的なジャンプ測度を許した設定でのプロセスの構成・特徴づけ：

- [Donnelly & Kurtz, 1999]
- [Hiraba, 2000], [Bertoin & Le Gall, 2003] 等 ($c_1 = c_2 = 0$)
- (非自明な) 定常分布の具体形についての結果はない（？）.

以下の内容

§1. 分枝過程の‘正規化’による A_α-過程の導出

§2. A_α-過程の定常分布と従属操作

§3. 無限次元化としてのランダム測度版

§1. 分枝過程の‘正規化’によるA_α-過程の導出

<u>**事実**</u> **($\alpha = 1$の場合の際立った性質; skew product表示)**
$[0,\infty)$上の独立なプロセス$\{Z_1(t)\}$と$\{Z_2(t)\}$ は生成作用素

$$L_{c_i} f(z) := z f''(z) + (-z + c_i) f'(z)$$ **CIRモデル**, $i \in \{1,2\}$

をそれぞれ持つとすると，

$\{Z_1(t) + Z_2(t)\}$と独立なA-過程$\{X(t)\}$が存在して

$$\frac{Z_1(t)}{Z_1(t) + Z_2(t)} = X\left(2\int_0^t \frac{ds}{Z_1(s) + Z_2(s)}\right)$$

for $0 < t < \inf\{s : Z_1(s) + Z_2(s) = 0\}$.

<u>証明のエッセンス</u> $F(z_1, z_2) := G\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\right) H(z_1+z_2)$ **に対し**

$$
\begin{aligned}
&(L_{c_1}F(\cdot, z_2))(z_1) + (L_{c_2}F(z_1, \cdot))(z_2) \\
&= \frac{2}{z_1+z_2} AG\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\right) H(z_1+z_2) \\
&\quad + G\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\right) L_{c_1+c_2} H(z_1+z_2).
\end{aligned}
$$

(この式の見方)

<u>左辺</u>：'直積' プロセス $\{(Z_1(t), Z_2(t))\}$ **の生成作用素を施した形**

<u>右辺</u>：もし $\frac{2}{z_1+z_2}$ **がなければ**

独立な A**-過程** $\{X(t)\}$ **と和** $\{Z_1(t) + Z_2(t)\}$ **を成分とする２次元**

プロセス $\{(X(t), Z_1(t) + Z_2(t))\}$ **の生成作用素を施した形**

CIRモデルの拡張としてのCBI過程

(自然な疑問) CIRモデルのジャンプ版の正規化により

$[0,1]$-値Markov過程が導かれるか？

移入を伴う連続相空間上の分枝過程(CBI-過程)：

生成作用素 [Kawazu-Watanabe, 1971]

$$
\begin{aligned}
Lf(z) &= azf''(z) - bzf'(z) \\
&\quad + z\int_0^\infty \left[f(z+y) - f(z) - yf'(z)\right] n_1(dy) \\
&\quad + \delta f'(z) + \int_0^\infty [f(z+y) - f(z)]\, n_2(dy)
\end{aligned}
$$

注意 最後の２項は移入の効果から来る.

CBI過程の正規化から得られるMarkov過程

事実（移入のない場合）[Birkner et al, 2005]

「ジャンプを伴う分枝過程の正規化からMarkov過程（の時間変更）が得られるのは，ジャンプ測度 n_1 がベキ型の密度を持つ場合に限る.」

（ただし，skew product までは言えない.）

これを踏まえると,我々の目的に合うCBI-過程は次である：

$$
\begin{aligned}
L_{\alpha,c_i}f(z) \;=\; & \frac{\alpha+1}{\Gamma(1-\alpha)} z \int_0^\infty (f(z+y)-f(z)-yf'(z))\frac{dy}{y^{\alpha+2}} \\
& -\frac{z}{\alpha}f'(z) + \frac{c_i\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty (f(z+y)-f(z))\frac{dy}{y^{\alpha+1}}
\end{aligned}
$$

cf. [Kawazu-Watanabe, 1971] (Example 1.1)

Key identity

$\boxed{\text{補題}}$ $F(z_1, z_2) := G\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\right)$ に対し

$$\begin{aligned}&(L_{\alpha,c_1}F(\cdot, z_2))(z_1) + (L_{\alpha,c_2}F(z_1, \cdot))(z_2)\\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(z_1+z_2)^\alpha} A_\alpha G\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\right).\end{aligned}$$

<u>帰結１</u> 独立な L_{α,c_1}-過程と L_{α,c_2}-過程の正規化から A_α-過程（の時間変更）が得られる．

<u>帰結２</u> key identity を用いて，L_{α,c_i}-過程の定常分布から A_α の定常分布を導くことができる．[次ページ]

A_α-過程の定常分布の計算

ステップ１ L_{α,c_i}-過程$\{Z_i(t)\}$の推移半群の公式により，

$$\lim_{t\to\infty} E\left[e^{-\lambda Z_i(t)}\right] = e^{-c_i \log(1+\lambda^\alpha)}$$
$$=: \int e^{-\lambda z} Q_{\alpha,c_i}(dz). \quad (Q_{\alpha,c_i}\text{: 非対称Linnik分布})$$

ステップ２ Key identityの両辺を直積$Q_{\alpha,c_1}(dz_1)Q_{\alpha,c_2}(dz_2)$で積分する．$\int_{\mathbf{R}_+} L_{\alpha,c_i} f(z) Q_{\alpha,c_i}(dz) = 0$ より左辺は消えるので

$$0 = \int_{\mathbf{R}_+}\int_{\mathbf{R}_+} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(z_1+z_2)^\alpha} A_\alpha G\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\right) Q_{\alpha,c_1}(dz_1)Q_{\alpha,c_2}(dz_2)$$

これらを基にすると ···

A_α-過程の定常分布（1）ある制限の下で

命題 独立確率変数Y_1, Y_2はそれぞれ$Q_{\alpha,c_1}, Q_{\alpha,c_2}$に従うする．

(i)
$$E[(Y_1+Y_2)^{-\alpha}] < \infty \overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} c_1 + c_2 > 1.$$

そして，$c_1 + c_2 > 1$のとき

$$E[(Y_1+Y_2)^{-\alpha}] = (\Gamma(\alpha+1)(c_1+c_2-1))^{-1}.$$

(ii) $c_1 + c_2 > 1$のとき，次で定義される$[0,1]$上の分布はA_α-プロセスの定常分布である：

$$\tilde{P}_{\alpha,(c_1,c_2)}(\bullet) := \Gamma(\alpha+1)(c_1+c_2-1)E\left[(Y_1+Y_2)^{-\alpha}; \frac{Y_1}{Y_1+Y_2} \in \bullet\right].$$

§2. A_α-過程の定常分布と従属操作

非対称Linnik分布$Q_{\alpha,c}$の一つの表現:

$\{Z(t)\}$: **片側α-安定過程** s.t. $E[e^{-\lambda Z(t)}] = e^{-t\lambda^\alpha}$

$\{T(t)\}$: **ガンマ過程** s.t. $E[e^{-\lambda T(t)}] = e^{-t \log(1+\lambda)}$

が独立とすると

$$E[e^{-\lambda Z(T(c))}] = E[e^{-T(c)\lambda^\alpha}] = e^{-c \log(1+\lambda^\alpha)} = \int Q_{\alpha,c}(dz)e^{-\lambda z}.$$

特に，$Q_{\alpha,c}$は片側α-安定分布をガンマ分布で混合したもの：

$$\int_0^\infty \frac{y^{c-1}}{\Gamma(c)} e^{-y} dy E_{\alpha,y}[e^{-\lambda Z_1}] = \int Q_{\alpha,c}(dz)e^{-\lambda z}.$$

ただし，$E_{\alpha,y}[e^{-\lambda Z_1}] = e^{-y\lambda^\alpha}$.

A_α-過程の定常分布（2）制限の除去

$\boxed{\text{定理}}$ （1）$c_1 + c_2 > 1$のとき

$$\tilde{P}_{\alpha,(c_1,c_2)}(\bullet) = P_{\alpha,(c_1,c_2)}(\bullet)$$
$$:= \Gamma(\alpha+1)\int_0^1 B_{c_1,c_2}(dy)E_{\alpha,y}\left[(Z_1+Z_2)^{-\alpha}; \frac{Z_1}{Z_1+Z_2} \in \bullet\right].$$

（2）A_α-過程は$P_{\alpha,(c_1,c_2)}$を一意な定常分布として持つ．

<u>証明のエッセンス</u>（1）α次のStieltjes変換の一致を示す．

（2）「定常性」の条件をモーメントの漸化式で置き換え，それが$c_1 + c_2 > 0$の範囲で特異性を持たないことを見る．

（いずれの計算も無限次元化した方が計算の見通しが良い．）

§3. 無限次元化としてのランダム測度版

<u>現況</u>

	正規化	
Wight-Fisher拡散モデル	$\longleftarrow$	CIRモデル
$\downarrow$ ジャンプ版		$\downarrow$ ジャンプ版
A_α-過程	$\longleftarrow$	CBI過程のあるクラス
	正規化	
$\downarrow$ 無限次元化		$\downarrow$ 無限次元化
ここで議論する対象	$\longleftarrow$	移入を伴う測度値分枝過程
	正規化	
$\downarrow$ 定常分布		$\downarrow$ 定常分布
ここで議論する問題	$\longleftarrow$	ランダム測度
	正規化	

（注意）Wright-Fisher拡散過程の無限次元版＝Fleming-Viot過程

Fleming-Viot過程のジャンプ版

E: **コンパクト距離空間,** $\mathcal{M}_1(E)$: E **上の確率測度全体**

$\mathcal{M}(E)$: E **上の有界測度全体** **(記号:** $\langle \mu, f\rangle := \int_E f(r)\mu(dr)$**)**

$0 < \alpha < 1$, $m \in \mathcal{M}(E)$ **:所与**

生成作用素 $\mathcal{A}_\alpha \Phi(\mu)$

$$= \int_0^1 \frac{B_{1-\alpha,1+\alpha}(du)}{u^2} \int_E \mu(dr)\,[\Phi((1-u)\mu + u\delta_r) - \Phi(\mu)] + \int_0^1 \frac{B_{1-\alpha,\alpha}(du)}{(\alpha+1)u} \int_E m(dr)\,[\Phi((1-u)\mu + u\delta_r) - \Phi(\mu)]$$

注意　この設定は１次元の場合を含む:

$E = \{r_1, r_2\}$ **とすると,対応** $\mathcal{M}_1(E) \ni \mu \mapsto \mu(\{r_1\}) =: x \in [0,1]$ **により**

$\mathcal{A}_\alpha$**-過程** $\{\mu(t)\} \mapsto A_\alpha$**-過程** $\{X(t)\}$ **with** $c_1 = m(\{r_1\}), c_2 = m(\{r_2\})$**.**

必要となるランダム測度

$B_+(E)$: E 上の非負 Borel 関数全体,　　$m(E) > 0$ とする.

(i) パラメータ測度 m の α-安定乱測度の確率法則 $\mathcal{S}_{\alpha,m}$:

$$\int_{\mathcal{M}(E)} \mathcal{S}_{\alpha,m}(d\eta)e^{-\langle \eta,f\rangle} = e^{-\langle m,f^\alpha\rangle}, \qquad f \in B_+(E)$$

(ii) 平均測度 m のガンマ乱測度の確率法則 $\mathcal{G}_m$:

$$\int_{\mathcal{M}(E)} \mathcal{G}_m(d\eta)e^{-\langle \eta,f\rangle} = e^{-\langle m,\log(1+f)\rangle}, \qquad f \in B_+(E)$$

(iii) パラメータ測度 m の Dirichlet 乱測度とは,

E の任意の有限 Borel 分割 $E_1,\dots,E_n$ に対して $(\mu(E_1),\dots,\mu(E_n))$ が
パラメータ $(m(E_1),\dots,m(E_n))$ の Dirichlet 分布* に従うような
$\mathcal{M}_1(E)$-値確率変数 μ である. その法則を $\mathcal{D}_m$ と書く.

*B_{c_1,c_2} はパラメータ (c_1,c_2) の Dirichlet 分布である.

Dirichlet乱測度について

- $\mathcal{D}_m$は（$\lim_{\alpha\uparrow 1}\mathcal{A}_\alpha$に付随する）Fleming-Viot過程の（可逆）定常分布である． [Shiga,1990]
- Dirichlet乱測度はガンマ乱測度の正規化として得られる：

$\eta \sim \mathcal{G}_m$ ならば

(i) $\eta(E)^{-1}\eta \sim \mathcal{D}_m$

(ii) $\eta(E)^{-1}\eta \perp\!\!\!\perp \eta(E)$

- $\mathcal{D}_m$は次式で特徴づけられる．[Cifarelli-Regazzini,1990]

$$\int_{\mathcal{M}_1(E)} \frac{\mathcal{D}_m(d\mu)}{\langle \mu, 1+f\rangle^{m(E)}} = e^{-\langle m, \log(1+f)\rangle}, \qquad f \in B_+(E)$$

$\mathcal{A}_\alpha$-過程の定常分布 ─「解答」の無限次元化 ─

$\boxed{\text{定理}}$ $\mathcal{A}_\alpha$-過程の定常分布は一意であり，それは次で与えられる：

$$\mathcal{P}_{\alpha,m}(\bullet)$$
$$:= \Gamma(\alpha+1)\int_{\mathcal{M}_1(E)} \mathcal{D}_m(d\mu) E^{\mathcal{S}_{\alpha,\mu}}\left[\eta(E)^{-\alpha}; \eta(E)^{-1}\eta \in \bullet\right].$$

<u>**注意**</u> $m(E) > 1$ のとき，$\mathcal{P}_{\alpha,m}$ は次と一致する．

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{\alpha,m}(\bullet) := \Gamma(\alpha+1)(m(E)-1)E^{\mathcal{Q}_{\alpha,m}}\left[\eta(E)^{-\alpha}; \eta(E)^{-1}\eta \in \bullet\right]$$

ただし，$E^{\mathcal{Q}_{\alpha,m}}\left[e^{-\langle \eta, f\rangle}\right] = e^{-\langle m, \log(1+f^\alpha)\rangle}$ Linnik乱測度

or 混合表現 $\mathcal{Q}_{\alpha,m}(\bullet) = \int_{\mathcal{M}(E)} \mathcal{G}_m(d\eta)\mathcal{S}_{\alpha,\eta}(\bullet)$

証明のアイデア － 1次元の場合の自然な拡張 －

ステップ1　移入を伴う測度値分枝過程で，その生成作用素$\mathcal{L}_\alpha$が
$\Psi(\eta) := \Phi\left(\eta(E)^{-1}\eta\right)$ に対し

$$\mathcal{L}_\alpha\Psi(\eta) = c\ \eta(E)^{-\alpha}\mathcal{A}_\alpha\Phi\left(\eta(E)^{-1}\eta\right) \quad \text{Key identity}$$

を満たし，かつ定常分布が$\mathcal{Q}_{\alpha,m}$ であるものを導入する．

ステップ2　key identityを利用して，$\nu \in \mathcal{M}_1(E), \theta > 1$に対し$\widetilde{\mathcal{P}}_{\alpha,\theta\nu}$が定常分布であることを示す．

ステップ3 $\mathcal{P}_{\alpha,\theta\nu}$の定常性の$\theta > 0$への解析的拡張