α-CIRモデルのスペクトル・ギャップ

半田賢司（佐賀大学）

背景

正規化

ベータ分布 $= \mathcal{L}\left(\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}\right)$ $\longleftarrow$ Z_1, Z_2 : 独立ガンマr.v.

(同じscale parameter)

$\uparrow$ 定常分布 　　　　$\uparrow$ 定常分布

正規化＋(T)

Wight-Fisher拡散モデル $\longleftarrow$ CIRモデル

$\downarrow$ 飛躍過程版 　　　　$\downarrow$ 飛躍過程版

$\boxed{\text{昨年度議論}}$ $\longleftarrow$ α-CIRモデル

正規化＋(T)

$(0 < \alpha < 1)$

$\downarrow$ 定常分布 　　　　$\downarrow$ 定常分布

$\boxed{\text{昨年度議論}}$ $\longleftarrow$ 非対称Linnik分布

正規化＋(B)

(とその畳み込み)

[(T): 時間変更, (B): バイアス変換]

ガンマ分布とCIRモデル

事実　[$b, c > 0$：所与]

ガンマ分布　$$\gamma_{c,b}(dz) := \frac{b^c}{\Gamma(c)} z^{c-1} e^{-bz} dz$$

は生成作用素Lを持つ拡散過程（CIRモデル）の定常分布：

$$Lf(z) = zf''(z) + (-bz + c)f'(z).$$

- Lの固有関数系$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$（ラゲール多項式のスケール変換）
- 各f_nの固有値は$-nb$
- $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$は$L^2(\gamma_{b,c})$の完全正規直交系を成す．

CIRモデルのスペクトル・ギャップ

<u>帰結</u> (固有関数展開により) $\forall\ f \in D(L)$,

$$b\ \|f - \int f d\gamma_{c,b}\|^2 \leq \int (-Lf) \cdot f d\gamma_{c,b}.$$

- b: 固有値0と他の固有値$b, 2b, 3b, \ldots$とのギャップ
- $\|f - \int f d\gamma_{c,b}\|^2 = \mathrm{var}_{\gamma_{c,b}}(f)$ 分散
- Dirichlet形式$\int (-Lf) \cdot f d\gamma_{c,b} = \int z(f'(z))^2 \gamma_{c,b}(dz)$
- さらなる帰結 $\forall\ f \in L^2(\gamma_{c,b}),\ \ t \geq 0$,

$$\|e^{tL} f - \int f d\gamma_{c,b}\| \leq e^{-bt} \sqrt{\mathrm{var}_{\gamma_{c,b}}(f)}$$ 指数的エルゴード性

α-CIRモデルと非対称Linnik分布

生成作用素 $[0 < \alpha < 1, b, c > 0$ **：所与**$]$

$$
\begin{aligned}
L_\alpha f(z) \;=\; & z \int \left[f(z+y) - f(z) - y f'(z) \right] n_B(dy) \\
& - \frac{b}{\alpha} z f'(z) + c \int \left[f(z+y) - f(z) \right] n_I(dy)
\end{aligned}
$$

with $n_B(dy) = \frac{\alpha+1}{\Gamma(1-\alpha) y^{\alpha+2}} dy$, $n_I(dy) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha) y^{\alpha+1}} dy$.

$\uparrow$ **分枝** $\uparrow$ **移入**

- $L_\alpha f(z) \to Lf(z) \ (\alpha \uparrow 1)$
- **定常分布**P_α**：** $\int e^{-\lambda z} P_\alpha(dz) = \left(1 + \frac{\lambda^\alpha}{b}\right)^{-c}, \quad \lambda > 0.$

  $b = 1 = c$**のとき「非対称Linnik分布」**

問題と解答

$\boxed{\text{問題}}$ 次を満たす定数Cは存在するか？

$$\mathrm{var}_{P_\alpha}(f) \le C \int (-L_\alpha f)\cdot f dP_\alpha, \qquad f \in D(L_\alpha)$$

(動機：α-CIRモデルのエルゴード性の解析)

$\boxed{\text{解答}}$ $C = 2b^{-1}$を最良定数として成立.

注意 CIRモデル($\alpha = 1$に相当)では$C = b^{-1}$が最良.

＜解答の方針＞

ステップ１： ‘Lévy測度版’へ帰着(Stannatの方法の類似)

ステップ２： 帰着された不等式の証明(非負定値関数の理論)

ステップ３： 最良性のチェック

Stannat(2005)の方法とは

$$\int_0^\infty e^{-\lambda z} P(dz) = \exp\left(-\int_0^\infty (1-e^{-\lambda z})\Lambda(dz)\right), \quad \lambda > 0$$

なる**無限分解可能分布** P に対する<u>'Poincaré不等式'</u>

$$\mathrm{var}_P(f) \le C \int z(f'(z))^2 P(dz)$$

$\downarrow$ **Lévy測度** Λ に関する次式に帰着可能

$$\int (F(z)-F(0))^2 \Lambda(dz) \le C \int z(F'(z))^2 \Lambda(dz), \quad F \in D.$$

ただし，$D = \mathrm{L.S.}\{c\ e^{-\lambda z} : c \in \mathrm{R}, \lambda > 0\}$.

<u>ガンマ分布の場合</u>, Lévy測度版は具体形 $\Lambda(dz) = ce^{-bz} z^{-1} dz$

を用いて $C = b^{-1}$ で成り立つことが容易に示せる.

なぜ「帰着可能」なのか　ー例えば分散の場合ー

$f = \sum c_i e^{-\lambda_i z}$ とする．

$d_i = c_i \exp\left(-\int_0^\infty (1-e^{-\lambda_i z})\Lambda(dz)\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}_P(f) &= \sum_{i,j} d_i d_j \left[\exp\left(\int \Lambda(dz)(1-e^{-\lambda_i z})(1-e^{-\lambda_j z})\right) - 1\right] \\
&= \sum_{i,j} d_i d_j \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(\int \Lambda(dz)(1-e^{-\lambda_i z})(1-e^{-\lambda_j z})\right)^N . \\
&= \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{i,j} d_i d_j \int_{\mathbf{R}_+^N} \Lambda^{\otimes N}(d\boldsymbol{z}_N) \prod_{k=1}^{N} (1-e^{-\lambda_i z_k}) \prod_{l=1}^{N} (1-e^{-\lambda_j z_l}) \\
&= \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \int_{\mathbf{R}_+^{N-1}} \Lambda^{\otimes N-1}(d\boldsymbol{z}_{N-1}) \int \Lambda(dz_N) \left[\sum_i d_i \prod_{k=1}^{N} (1-e^{-\lambda_i z_k})\right]^2
\end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{z}_{N-1} := (z_1, \ldots, z_{N-1})$ は所与だと思って，$\Lambda(dz_N)$ および

$F(z_N) = \sum_i d_i \prod_{k=1}^{N-1} (1-e^{-\lambda_i z_k}) e^{-\lambda_i z_N} \in D$ に対して「帰着された不等式」を適用

α-CIRモデルの場合の「Lévy測度版」

Λ_α : $b = 1 = c$ に対するLévy測度, i.e.,

$$\psi_\alpha(\lambda) := \int (1 - e^{-\lambda z}) \Lambda_\alpha(dz) = \log(1 + \lambda^\alpha).$$

$\boxed{\text{定理 1}}$ 示すべき不等式

$$\mathrm{var}_{P_\alpha}(f) \le C b^{-1} \int (-L_\alpha f) \cdot f \, dP_\alpha, \qquad f \in D(L_\alpha)$$

は次式に帰着できる：

$$\begin{aligned} &\int (F(z) - F(0))^2 \Lambda_\alpha(dz) \\ &\quad \le \frac{C}{2} \int \Lambda_\alpha(dz) z \int n_B(dy) (F(z+y) - F(z))^2 \\ &\qquad + \frac{C}{2} \int n_I(dy) (F(y) - F(0))^2, \qquad F \in D. \end{aligned}$$

<u>証明</u> Stannatの方法の類似による.

「Lévy測度版」の証明について（1/3）

目標（再記） $\mathrm{U}_\alpha(F) \le C\mathrm{V}_\alpha(F), \qquad F \in D.$

ただし， $\mathrm{U}_\alpha(F) = \int (F(z) - F(0))^2 \Lambda_\alpha(dz)$**，**

$$\mathrm{V}_\alpha(F) = \frac{1}{2}\int \Lambda_\alpha(dz) z \int n_B(dy)(F(z+y) - F(z))^2 + \frac{1}{2}\int n_I(dy)(F(y) - F(0))^2.$$

- Λ_α**の具体形**$\Lambda_\alpha(dz) = E_\alpha(-z^\alpha)\frac{dz}{z}$ **は使えない．**

  $[E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1+\alpha k)}$**： Mittag-Leffler関数]**

- $\psi_\alpha(\lambda) = \int (1 - e^{-\lambda z})\Lambda_\alpha(dz) = \log(1 + \lambda^\alpha)$ **のみを使う．**

CIRモデル($\alpha = 1$)再訪 (1/3)

Lévy測度版 $\quad \mathrm{U}(F) \le \mathrm{V}(F), \qquad F \in D.$

ただし，$\mathrm{U}(F) = \int (F(z) - F(0))^2 \Lambda(dz)$，
$\mathrm{V}(F) = \int z(F'(z))^2 \Lambda(dz)$. $\qquad F(z) = \sum c_i e^{-\lambda_i z}$として
$\psi(\lambda) := \int (1 - e^{-\lambda z}) \Lambda(dz) = \log(1+\lambda)$を用いて示す.

$$\text{まず } \mathrm{U}(F) = \sum_{i,j} c_i c_j \left(-\psi(\lambda_i + \lambda_j) + \psi(\lambda_i) + \psi(\lambda_j) \right)$$
$$= \sum_{i,j} c_i c_j \int_0^{\lambda_i} ds \int_0^{\lambda_j} dt \partial_s \partial_t (-\psi(s+t))$$
$$= \int \int \overline{F}(s) \overline{F}(t) (-\psi''(s+t)) ds dt.$$

ここで，$\overline{F}(s) = \sum_i c_i 1_{[0,\lambda_i]}(s)$.

CIRモデル($\alpha = 1$)再訪 (2/3)

$\mathrm{V}(F) = \int z(F'(z))^2 \Lambda(dz)$ についても

$F(z) = \sum c_i e^{-\lambda_i z}$ に対し

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(F) &= \sum_{i,j} c_i c_j \lambda_i \lambda_j \psi'(\lambda_i + \lambda_j) \\ &= \sum_{i,j} c_i c_j \int_0^{\lambda_i} ds \int_0^{\lambda_j} dt \partial_s \partial_t (st\psi'(s+t)) \\ &= \int\int \overline{F}(s)\overline{F}(t)\partial_s\partial_t(st\psi'(s+t))dsdt.\end{aligned}$$

<u>アイデア</u>　差 $\mathrm{V}(F) - \mathrm{U}(F)$ は表示

$$\int\int \overline{F}(s)\overline{F}(t)(\partial_s\partial_t(st\psi'(s+t)) + \psi''(s+t))dsdt$$

を持つので，$\partial_s\partial_t(st\psi'(s+t)) + \psi''(s+t)$ が**非負定値**であればよい．

CIRモデル($\alpha = 1$)再訪 (3/3)

定義 $K : \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}$が**非負定値**であるとは

$$\int\int h(s)h(t)K(s,t)dsdt \geq 0, \qquad \forall\ h : \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}.$$

$\mathrm{V}(F) - \mathrm{U}(F)$に内在する$K(s,t)$の場合：

$\psi(\lambda) = \log(1+\lambda)$より

$$\begin{aligned} K(s,t) &= \partial_s \partial_t (st\psi'(s+t)) + \psi''(s+t) \\ &= \left[\frac{1}{(1+s+t)^2} + \frac{2st}{(1+s+t)^3}\right] - \frac{1}{(1+s+t)^2} \\ &= \frac{2st}{(1+s+t)^3} = \int (se^{-sz})(te^{-tz})z^2 e^{-z} dz. \end{aligned}$$

これは**非負定値**ゆえ，$\mathrm{V}(F) \geq \mathrm{U}(F)$.

「Lévy測度版」の証明について（2/3）

$\boxed{\textbf{命題}}$ $\mathrm{U}_\alpha(F) = \int (F(z) - F(0))^2 \Lambda_\alpha(dz)$ および

$$\mathrm{V}_\alpha(F) = \frac{1}{2}\int \Lambda_\alpha(dz) z \int n_B(dy)(F(z+y) - F(z))^2 + \frac{1}{2}\int n_I(dy)(F(y) - F(0))^2$$

に内在する関数はそれぞれ $J_\alpha(s,t)$，$\partial_s \partial_t K_\alpha(s,t)$ である．

ただし，$J_\alpha(s,t) = -\psi''_\alpha(s+t)$，

$$2K_\alpha(s,t) = \psi'_\alpha(s+t)\alpha^{-1}\left[(s+t)^{\alpha+1} - s^{\alpha+1} - t^{\alpha+1}\right] + [s^\alpha + t^\alpha - (s+t)^\alpha].$$

[Recall：$\psi_\alpha(\lambda) = \log(1+\lambda^\alpha)$]

「Lévy測度版」の証明について（3/3）

定理２ $\qquad \mathrm{U}_\alpha(F) \le 2\mathrm{V}_\alpha(F), \qquad F \in D.$

証明 $2\mathrm{V}_\alpha(F) - \mathrm{U}_\alpha(F)$ に内在する関数は

$$
\begin{aligned}
&2\partial_s\partial_t K_\alpha(s,t) - J_\alpha(s,t) \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+1}\int \Lambda_\alpha(dz)z^3 \int n_B(dy)e^{-sz}(1-e^{-sy})e^{-tz}(1-e^{-ty}) \\
&\quad + \int \Lambda_\alpha(dz)z^2 \int n_I(dy)e^{-sz}(1-e^{-sy})e^{-tz}(1-e^{-ty}) \\
&\quad + \frac{1}{\alpha+1}\int \Lambda_\alpha(dz)z \int n_B(dy)\partial_s\left[e^{-sz}(1-e^{-sy})\right]\partial_t\left[e^{-tz}(1-e^{-ty})\right]
\end{aligned}
$$

と書けるので非負定値である．ゆえに，$2\mathrm{V}_\alpha(F) \ge \mathrm{U}_\alpha(F)$.

注意 この表示を基に‘剰余形式’ $2\mathrm{V}_\alpha(F) - \mathrm{U}_\alpha(F)$ を F の言葉で平方完成した形で書き下すことができる．

$C = 2b^{-1}$ の最良性（1/2）

これまでに示されたこと　(定理１と定理２からの帰結)

$$\mathrm{var}_{P_\alpha}(f) \leq 2b^{-1} \int (-L_\alpha f) \cdot f dP_\alpha, \qquad f \in D(L_\alpha)$$

最後に，この評価の最良性を示す．

定理３　次を満たす $\{g_n\} \subset D(L_\alpha)$ が取れる：

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\int (-L_\alpha g_n) \cdot g_n dP_\alpha}{\mathrm{var}_{P_\alpha}(g_n)} = \frac{b}{2}.$$

証明　スケーリング性から $b = 1$ として示せば十分．

また，簡単のため $c = 1$ の場合を考える．

$C = 2b^{-1}$の最良性（2/2）

証明（続き） $f_\lambda(z) = e^{-\lambda z}$とおくと，$\lambda \downarrow 0$のとき

$$\frac{\int (-L_\alpha f_\lambda) \cdot f_\lambda dP_\alpha}{\mathrm{var}_{P_\alpha}(f_\lambda)} = \frac{1 + (2\lambda)^\alpha}{2} \cdot \frac{(2 - 2^\alpha)\lambda^\alpha + 2^\alpha(2^\alpha - 1)\lambda^{2\alpha}}{(2 - 2^\alpha)\lambda^\alpha + \lambda^{2\alpha}} \to \frac{1}{2}.$$

注意　**ガンマ分布**$\gamma_{1,1}$の場合，形式的に$\alpha = 1$とおいて

$$\frac{\int (-Lf_\lambda) \cdot f_\lambda d\gamma_{1,1}}{\mathrm{var}_{\gamma_{1,1}}(f_\lambda)} = \frac{1 + (2\lambda)}{2} \cdot \frac{(2 - 2)\lambda + 2(2 - 1)\lambda^2}{(2 - 2)\lambda + \lambda^2} \to 1.$$