圏論的一階述語論理（1）

荒武 永史

京都大学数理解析研究所

2023 年 2 月 20 日@Logic Winter School 2023

What is Categorical Logic?

- 数理論理学の対象を圏論的な視点から調べる
  - 計算機科学との関連が深い
- 圏や函手を数理論理学の道具を用いて調べる

まずは前半 2 日間で圏論的論理学の 3 つの重要なアイディア

函手的意味論・圏の対象を台とするモデル・圏の内部論理

を命題論理・等式論理・整合論理の 3 つの論理体系で理解する。

Disclaimer

- Tarski 意味論的な現象のみを扱い、構文論・証明論的な構造は扱わない（cf. 型付き λ 計算の圏論的意味論・Lambek の圏論的証明論）
- 計算機科学への応用も重要だが、数学とのつながりに重点をおく。
- 圏論的な詳細にはあまり立ち入らない。証明は与えないことが多い。

主な参考文献

- S. Mac Lane and I. Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory.* Universitext. Springer-Verlag, 1992. （トポス理論の入門書・圏論的論理学もちょいちょい出てくる）
- P. T. Johnstone. *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium.* 2 vols. Oxford Logic Guides 43,44. Clarendon Press, 2002. （特に Part A が論理的圏やトポスの基礎、Part D が圏論的論理学。SGL 程度の知識があれば A1 章→ Part D と進められる）
- O. Caramello. “Topos-theoretic Background.” Sept. 22, 2014. `http://www.oliviacaramello.com/Papers/Papers.htm` （*Theories, Sites, Toposes* の最初の 2 章のドラフト、Elephant から必要な部分を抜粋したもの+α という感じ）
- 荒武 永史. 圏論的論理学への道案内：論理学と数学をつなぐトポス. 『現代思想』2020 年 7 月号
- 荒武 永史, 片岡 俊基, 丸山 善宏. 数学のユニバースとしてのトポス理論とその拡張. 『数学セミナー』2022 年 3 月号

Contents

Contents

Lindenbaum 代数

古典命題理論 T の **Lindenbaum 代数**

$$L_T := \{\, \varphi\, ;\, \text{命題論理式}\,\}/\!\sim$$

$$\varphi \sim \psi \overset{\text{def.}}{\iff} T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$

$$[\varphi] \leq [\psi] \overset{\text{def.}}{\iff} T \vdash \varphi \to \psi \qquad \text{(well-defined)}$$

L_T は論理結合子から誘導される自然な演算によって Boole 代数になる。

$$[\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi \wedge \psi] \qquad [\varphi] \vee [\psi] = [\varphi \vee \psi]$$

$$[\varphi] \to [\psi] = [\varphi \to \psi] \qquad \neg[\varphi] = [\neg\varphi]$$

なお本講義では束は全て有界束とし、最大元・最小元を $1, 0$ で表す。

Models as Lattice Homomorphisms

命題変数の集合 PV からの付値 $v\colon \mathrm{PV} \to 2$ は自然に空理論 $\varnothing$ の Lindenbaum 代数からの写像 $v\colon L_\varnothing \to 2$ に拡張される。

さらに v が T-モデルのとき、この写像は $L_\varnothing \to L_T$ を通して分解する：

$$\begin{tikzcd} L_\varnothing \arrow[r] \arrow[dr, "v"'] & L_T \arrow[d, dashed, "\exists!\tilde{v}"] \\ & 2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {[\varphi]_\varnothing} \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & {[\varphi]_T} \arrow[d, mapsto] \\ & v(\varphi) \end{tikzcd}$$

ここに現れる写像はすべて **Boole 代数の間の束準同型**（=Boole 準同型）。

この対応は次の集合の間の全単射を与える：

- T-Mod：T-モデルになる付値の集合
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Lat}}(L_T, 2)$：$L_T$ から 2 への束準同型の集合

Boole 値モデル

B を Boole 代数とする。各命題変数 p の解釈を $v(p) \in B$ として定めても、$v\colon \mathrm{PV} \to B$ を準同型 $v\colon L_\varnothing \to B$ に拡張できる。

$$v \text{ が } T\text{-モデル} \overset{\text{def.}}{\iff} \text{For any } \varphi \in T,\ v(\varphi) = 1_B$$

とすれば再び、$v \models T$ を $\tilde{v}\colon L_T \to B$ への拡張可能性で捉えられる：

$$\begin{tikzcd}
L_\varnothing \arrow[r] \arrow[dr, "v"'] & L_T \arrow[d, dashed, "\exists!\tilde{v}"] \\
& B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{[\varphi]_\varnothing} \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & {[\varphi]_T} \arrow[d, mapsto] \\
& v(\varphi)
\end{tikzcd}$$

2 値ではなく一般の Boole 値の真理値を考えるアイディアは、直観主義命題論理の位相意味論や集合論の Boole 値モデルにもつながる。

函手的意味論の基本アイディア

論理式を用いて理論 T から何らかの代数的対象 L_T を構成して、

$$T\text{-Mod}(B) \cong \mathrm{Hom}(L_T, B)$$

が L_T と同じ種類の任意の代数 B に対して成り立つようにする。

古典命題論理に限らず、直観主義命題論理（= Heyting 代数の論理）や整合命題論理（= 分配束の論理）などについても同様の対応がある。

ただしこの場合は、T-モデル全体をただの集合ではなく

$$v \leq v' \overset{\text{def.}}{\iff} \text{For any } \varphi,\ v(\varphi) \leq v'(\varphi)$$

によって半順序集合と見なすのが自然（古典論理の場合は離散順序）。
準同型の集合 $\mathrm{Hom}(L_T, B)$ に各点の大小で順序を入れることに対応。
あるいは素フィルターの集合に包含で順序を入れたものと見なせる。

命題論理から述語論理へ

古典命題論理	束
理論 T	Lindenbaum 代数 L_T
論理式	L_T の元
T-モデル	束準同型 $L_T \to 2$
T-モデルの集合	$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Lat}}(L_T, 2)$

古典述語論理	圏
理論 T	構文圏 $\mathcal{C}_T$
論理式	$\mathcal{C}_T$ の対象
T-モデル	整合函手 $\mathcal{C}_T \to \mathbf{Set}$
T-モデルの圏	函手圏 $\mathbf{Coh}(\mathcal{C}_T, \mathbf{Set})$

Contents

圏

圏とは、対象とその間の射の集まりで、射の合成が定まっていて恒等射の存在と結合律を満たすもの。圏 $\mathcal{C}$ の対象 C, D について、

$$f : C \to D \quad : \quad f \text{ は } C \text{ から } D \text{ への射}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D) \text{ または } \mathcal{C}(C, D) \quad : \quad C \text{ から } D \text{ への射全体の集まり}$$

$\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & C' \arrow[d, "g"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
 & C''
\end{tikzcd}$$

例：**Set**, **Top**, **Grp**, **Ring**, モノイド, 半順序集合, etc.

函手

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏とする。$\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への**函手** $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ とは、$\mathcal{C}$ の対象/射から $\mathcal{D}$ の対象/射への割り当てであって、射の合成と恒等射を保つもの。

$$\mathcal{C}: \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & C' \arrow[d, "g"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & C'' \end{tikzcd} \quad \xrightarrow{F} \quad \mathcal{D}: \begin{tikzcd} FC \arrow[r, "Ff"] \arrow[dr, "F(g \circ f)"'] & FC' \arrow[d, "Fg"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & FC'' \end{tikzcd}$$

例：モノイド準同型、半順序集合の間の単調写像

CAT：圏と函手の圏

普遍性

数学的構成の多くは、対象と射についての**普遍性**で特徴づけられる。

直積・終対象の普遍性

C, C' の**直積**とは $C \xleftarrow{\mathrm{proj}_1} C \times C' \xrightarrow{\mathrm{proj}_2} C'$ で次の性質を持つもの

$$\begin{tikzcd} & \forall X \arrow[dl, "\forall f"'] \arrow[d, dashed, "\exists! \, \langle f, g \rangle"] \arrow[dr, "\forall g"] & \\ C & C \times C' \arrow[l, "\mathrm{proj}_1"] \arrow[r, "\mathrm{proj}_2"'] & C' \end{tikzcd}$$

「集合・群・環の直積」「束における meet」はこの形の普遍性を持つ。

1 が $\mathcal{C}$ の**終対象** $\overset{\text{def.}}{\iff} \forall X \in \mathcal{C}, \ \exists! f \colon X \to 1$

圏論の数学への応用においては、数学的構成が函手的か、函手 $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が普遍的対象を保つかなどに興味がある。

普遍性 (continued)

pullbackの普遍性

図式 $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ の pullback とは、

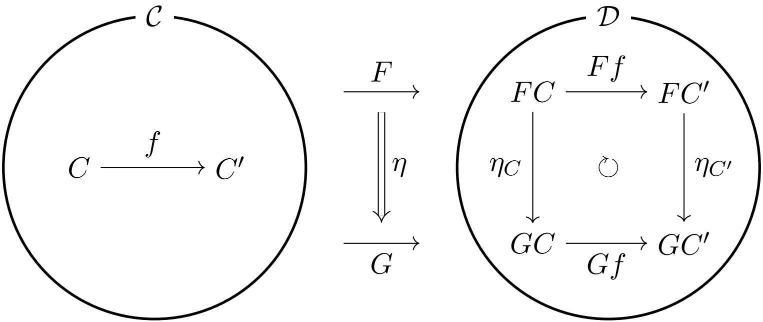
$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

を可換にする p, q であって次の普遍性を満たすもの：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rrd, bend left, "\forall k"] \arrow[rdd, bend right, "\forall h"'] \arrow[rd, phantom, "\circlearrowright"] & & \\ & & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} X \arrow[rrd, bend left, "k"] \arrow[rdd, bend right, "h"'] \arrow[rd, dashed, "\exists!"] & & \\ & P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

自然変換

函手 $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ の間の**自然変換** $\eta\colon F \Rightarrow G$ とは、$\mathcal{D}$ の射の族 $\{\eta_C\colon FC \to GC\}_{C\in\mathcal{C}}$ で次の可換性を満たすもの。



例：線型空間 V から二重双対 V^{**} への自然な線型写像 $\eta_V\colon V \to V^{**}$ は、$\mathbf{Vect}_K$ 上の id と $(-)^{**}$ の間の自然変換を与える。

函手圏

自然変換は函手の間の射

$\rightsquigarrow$ $[\mathcal{C},\mathcal{D}]$：$\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への**函手圏**（$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ などとも書く）

$$(\sigma \circ \eta)_C := \sigma_C \circ \eta_C$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F", ""{name=U, below}] \arrow[r, "G" description, ""{name=M}] \arrow[r, bend right=50, "H"', ""{name=L, above}] & \mathcal{D}
\arrow[Rightarrow, from=U, to=M, "\eta"]
\arrow[Rightarrow, from=M, to=L, "\sigma"]
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right=50, "H"', ""{name=L, above}] & \mathcal{D}
\arrow[Rightarrow, from=U, to=L, "\sigma \circ \eta"]
\end{tikzcd}$$

圏と函手の圏 $\mathbf{CAT}$ は各 Hom も圏になっている（$\rightsquigarrow$ 2-圏）

圏同型と圏同値

$f\colon C\to C'$ が同型射 $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $\exists g\colon C'\to C,\ gf=\mathrm{id}_C,\ fg=\mathrm{id}_{C'}$

CAT において $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ が同型：**圏同型** $\mathcal{C}\cong\mathcal{D}$

圏同型の概念は圏の相等としては強すぎるので、**圏同値**を用いる。

$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ が圏同値 $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D},\ G\colon\mathcal{D}\to\mathcal{C},$ $\eta\colon GF\overset{\sim}{\Longrightarrow}\mathrm{id}_{\mathcal{C}},\ \sigma\colon FG\overset{\sim}{\Longrightarrow}\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ が存在

ここで $\eta\colon GF\Rightarrow\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ が**自然同型** $\overset{\text{def.}}{\iff}$ 函手圏 $[\mathcal{C},\mathcal{C}]$ での同型射

e.g. 有限順序数の圏 **FinOrd** と有限集合の圏 **FinSet** は圏同値

cf. 位相空間の同型（同相）とホモトピー同値

X と Y がホモトピー同値 $\overset{\text{def.}}{\iff}$ 連続写像 $f\colon X\to Y,\ g\colon Y\to X$ および ホモトピー $gf\sim\mathrm{id}_X,\ fg\sim\mathrm{id}_Y$ が存在

Contents

等式論理

論理結合子や量化子の圏論的な取り扱いは少し大変なので、まずは等式論理からはじめる。簡単のため one-sorted で考えるが、内部論理では many-sorted が本質的に必要。

- 言語 $\mathcal{L}$ は有限引数の函数記号（0-ary = 定数記号）たちから成る
- 項はいつも通り帰納的に定義
- 等式理論 T は、$s(\boldsymbol{x}) = t(\boldsymbol{x})$ の形の等式たちの集合

以後、tuple は太字 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}$ などで表す。

$\mathcal{L}$-構造 $(M, \{f^M\}_{f \in \mathrm{Func}_{\mathcal{L}}})$ と n-引数の項 $t(\boldsymbol{x})$

$\rightsquigarrow t$ の M における解釈 $t^M : M^n \to M$

$$M \models s(\boldsymbol{x}) = t(\boldsymbol{x}) \overset{\text{def.}}{\iff} \forall \boldsymbol{a} \in M^n,\ s^M(\boldsymbol{a}) = t^M(\boldsymbol{a})$$

$$M \models T\ (M \text{ は } T\text{-代数}) \overset{\text{def.}}{\iff} \text{For any } (s = t) \in T,\ M \models s = t$$

以下、M は空集合（始対象）も許すとして証明体系に適切な修正を施す。

等式理論の構文圏

等式理論 T に対し、次のような**構文圏** $\mathcal{C}_T$ を考える：

対象 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_T) := \{\, [n] \,;\, n \in \omega \,\}$（$[n]$ は形式的表現）

射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_T}([m],[n]) := \{\, (t_1,\dots,t_n) \,;\, m$-引数の項の組 $\}/\!\sim$

ここで、$\boldsymbol{t} \sim \boldsymbol{s} \overset{\text{def.}}{\iff}$ For each i, $T \vdash t_i = s_i$

合成 $\boldsymbol{t}\colon [m] \to [n]$, $\boldsymbol{s}\colon [n] \to [l]$ の合成は

$$(s_1(t_1(\boldsymbol{x}),\dots,t_n(\boldsymbol{x})),\dots,s_l(t_1(\boldsymbol{x}),\dots,t_n(\boldsymbol{x})))$$

$\mathcal{C}_T$ は有限直積を持つ圏（$[n] = [1] \times \cdots \times [1]$: n-times product）

$\boldsymbol{t}\colon [m] \to [n_1]$, $\boldsymbol{s}\colon [m] \to [n_2]$ が与えられたとき、$(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s})\colon [m] \to [n_1+n_2]$ が下図を可換にする（T-同値を除いて）唯一の項

$$\begin{tikzcd} & {[m]} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{t}"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{s}"] \arrow[d, dashed, "(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})"] & \\ {[n_1]} & {[n_1+n_2]} \arrow[l, "\mathrm{proj}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{proj}_2"] & {[n_2]} \end{tikzcd}$$

Lawvere の函手的意味論

T-代数 M から

$$\boldsymbol{t}\colon [m] \to [n] \qquad \mapsto \qquad \boldsymbol{t}^M\colon M^m \to M^n$$

によって、有限直積を保つ函手 $F_M\colon \mathcal{C}_T \to \mathbf{Set}$ が得られる。
ここで T-代数であることが well-definedness を保証する。

さらに、T-代数の準同型 $h\colon M \to N$ からは $\tilde{h}\colon F_M \Rightarrow F_N$ が得られる。

$$\tilde{h}_{[n]} := h^n\colon M^n \to N^n$$

$$\begin{CD}
M^m @>{F_M(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}^M}>> M^n \\
@V{\tilde{h}_{[m]} = h^m}VV @VV{\tilde{h}_{[n]} = h^n}V \\
N^m @>>{F_N(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}^N}> N^n
\end{CD}$$

Lawvere の函手的意味論 (continued)

- T-$\mathbf{Alg}$：T-代数と準同型の圏
- $\mathbf{FPFunc}(\mathcal{C}_T, \mathbf{Set})$：直積を保つ函手と自然変換の圏

この対応 $M \mapsto F_M$, $h \mapsto \tilde{h}$ は次の函手を誘導：

$$T\text{-}\mathbf{Alg} \to \mathbf{FPFunc}(\mathcal{C}_T, \mathbf{Set})$$

他方、有限直積を保つ任意の函手 $F \colon \mathcal{C}_T \to \mathbf{Set}$ に対し、$M := F([1])$ 上に自然に T-代数の構造が定まる。

$$f \in \mathrm{Func}_{\mathcal{L}} \qquad \rightsquigarrow \qquad f^M := F(f) \colon F([n]) \to F([1])$$

すると、任意の項 t に対し $t^M = F(t)$ が成り立つ。

Theorem

上の函手は圏同値を誘導する。

$$T\text{-}\mathbf{Alg} \simeq \mathbf{FPFunc}(\mathcal{C}_T, \mathbf{Set})$$

有限直積を持つ圏における代数

一般の数学において、**圏における代数的対象**を考える場面は多い：

Definition (群対象)

$\mathcal{D}$ を有限直積を持つ圏とする。$\mathcal{D}$ における**群対象**とは、対象 G, 射 $m\colon G \times G \to G$, $e\colon 1 \to G$, $i\colon G \to G$ の組 $\langle G, m, e, i \rangle$ であって、次の図式を可換にするようなもの：

$\boxed{\text{結合法則}}$

$$\begin{tikzcd}
(G \times G) \times G \arrow[rr, "\sim"] \arrow[d, "m \times \mathrm{id}"'] & & G \times (G \times G) \arrow[d, "\mathrm{id} \times m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"'] & G & G \times G \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{逆元}}$

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "\langle i, \mathrm{id} \rangle"'] \arrow[d, "!_G"] \arrow[dr, "\langle \mathrm{id}, i \rangle"] & \\
 & 1 \arrow[d, "e"] & \\
G \times G \arrow[r, "m"'] & G & G \times G \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{単位元}}$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\langle e \circ !_G, \mathrm{id} \rangle"] \arrow[d, "\langle \mathrm{id}, e \circ !_G \rangle"'] \arrow[dr, equal] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"'] & G
\end{tikzcd}$$

有限直積を持つ圏における代数 (continued)

$\mathcal{D}$ における $\mathcal{L}$-構造 M = “台対象” $M \in \mathcal{D}$ と射 $f^M \colon M^n \to M$

n 引数の項 $t(\boldsymbol{x})$ $\rightsquigarrow$ t の M における解釈 $t^M \colon M^n \to M$

$$M \models s(\boldsymbol{x}) = t(\boldsymbol{x}) \overset{\text{def.}}{\iff} \mathcal{D} \text{ の射として } s^M = t^M$$

$$M \models T \ (M \text{ は } T\text{-代数}) \overset{\text{def.}}{\iff} \text{For any } (s = t) \in T,\ M \models s = t$$

準同型 $h \colon M \to N$（左図の可換性）は任意の項を保つ（右図の可換性）

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "f^M"] \arrow[d, "h^n"'] & M \arrow[d, "h"] \\ N^n \arrow[r, "f^N"'] & N \end{tikzcd} \implies \begin{tikzcd} M^m \arrow[r, "\boldsymbol{t}^M"] \arrow[d, "h^m"'] & M^n \arrow[d, "h^n"] \\ N^m \arrow[r, "\boldsymbol{t}^N"'] & N^n \end{tikzcd}$$

一般の代数に対する函手的意味論

T-$\mathbf{Alg}(\mathcal{D})$：$\mathcal{D}$ における T-代数と準同型の圏

Theorem

$$T\text{-}\mathbf{Alg}(\mathcal{D}) \simeq \mathbf{FPFunc}(\mathcal{C}_T, \mathcal{D})$$

広い意味でのモデル概念については**完全性定理が自明に成り立つ**。

Observation

直観主義命題理論 T の Lindenbaum 代数 L_T における付値 $v(p) = [p]_T$ が T-モデルなので、任意の Heyting 値 T-モデルで成り立つ φ について $[\varphi]_T = 1_{L_T}$ となり、これは $T \vdash \varphi$ に他ならない。

一方、構文圏 $\mathcal{C}_T$ にも canonical な T-代数 M_T が取れる。すなわち、

$$M_T := [1] \in \mathcal{C}_T, \qquad f^{M_T} := f\colon [n] \to [1]$$

これは上の圏同値で $\mathrm{id}\colon \mathcal{C}_T \to \mathcal{C}_T$ に対応する T-代数。

なお、**Set** 値モデルについての完全性定理も圏論的に表現できる。

函手的意味論・圏におけるモデルの恩恵

等式論理の場合だけでもいろいろ応用がある

- 代数概念と直積を持つ圏があったら internal algebra を考えることで数学的対象が拡がる（位相代数、順序代数など）
- 層の圏における internal algebra = 代数の層（$\rightsquigarrow$ 3 日目）

$$T\text{-}\mathbf{Alg}([\mathcal{C}, \mathbf{Set}]) \simeq [\mathcal{C}, T\text{-}\mathbf{Alg}]$$

- 構文圏の間の直積を保つ函手を理論の翻訳と見なせる（$\rightsquigarrow$ 4 日目）
- 自由代数・群のアーベル化・普遍包絡環の存在を統一的に示せる
- さらに内部論理と合わせることでロジックを圏や函手を調べる道具として使えるようになる（どんな直積圏も構文圏と思えるし Set への直積函手は代数だと思える）

構文圏/宇宙としての直積を持つ圏という多面的な見方ができる！

Contents

整合論理

古典一階理論 T に対して T-**Mod** は一般にはうまく振る舞わないので、以下の論理断片（**整合論理；coherent logic**）を考える。

- 言語 $\mathcal{L}$ は通常通り函数記号と関係記号（0-ary を許す）から成る
- **整合論理式**：原子論理式（$\top, \bot$ を含む）から $\wedge, \vee, \exists$ で生成される
- **整合理論**とは、整合論理式 $\varphi(\boldsymbol{x}), \psi(\boldsymbol{x})$ を用いて

$$\forall \boldsymbol{x}[\varphi(\boldsymbol{x}) \to \psi(\boldsymbol{x})]$$

  の形で表される公理の集合（厳密には $\to, \forall$ は論理記号に含めない）。

整合論理の妥当性

- 数学に現れる理論の具体例の多くは整合論理で記述できる
- 古典一階理論 T に対し、モデルと初等埋込の圏 T-**Elem** と T'-**Mod** が圏同値となるような整合理論 T' が存在する
- 整合理論 T に対し、T-**Mod** は**到達可能圏**

整合論理の証明体系・整合理論のモデル

整合論理の公理には

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \to (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \qquad \text{(distributive law)}$$
$$\varphi \wedge \exists y \psi \to \exists y(\varphi \wedge \psi) \qquad \text{(Frobenius law)}$$

が含まれる（$\to$ についての規則が自由に使えないため）。

整合論理式 φ に対し、互いに異なる変数の組 $\boldsymbol{x}$ が φ に現れる自由変数を全て含むとする。このとき $\varphi(\boldsymbol{x})$ を **formula-in-context** と呼ぶ。閉論理式は empty context $[\,]$ を持つ。

$\mathcal{L}$-構造 M に対し $[\![\boldsymbol{x}.\varphi]\!]_M \subseteq M^n$（$n = \mathrm{length}(\boldsymbol{x})$）が帰納的に定義される。context が異なると解釈も異なる。

$$M \models \forall \boldsymbol{x}[\varphi(\boldsymbol{x}) \to \psi(\boldsymbol{x})] \overset{\text{def.}}{\iff} [\![\boldsymbol{x}.\varphi]\!]_M \leq [\![\boldsymbol{x}.\psi]\!]_M \ \text{as subsets of } M^n$$
$$M \models T \ (M \text{ は } T\text{-モデル}) \overset{\text{def.}}{\iff} \text{For any } (\varphi \to \psi) \in T,\ M \models \varphi \to \psi$$

また、$M \models \forall \boldsymbol{x} \varphi(\boldsymbol{x}) \overset{\text{def.}}{\iff} M \models \forall \boldsymbol{x}[\top \to \varphi(\boldsymbol{x})]$ という略記も用いる。

空モデルについての注意

空モデルは $\forall x[x = x \to \bot]$ を満たすので、意味論が健全であるためには（定数記号なしなら）$\forall x[x = x \to \bot] \nvdash \bot$ でなければならない。特に、

$$\forall x[\top \to x = x], \forall x[x = x \to \bot] \vdash (\top \to \bot)$$

のようなカットの単純適用は禁止しなければならない [1]。

これを解決するために、全ての推論規則を context 込みで考える：
例えばカットは次のように修正する

$$\forall \boldsymbol{x}[\varphi(\boldsymbol{x}) \to \psi(\boldsymbol{x})], \forall \boldsymbol{x}[\psi(\boldsymbol{x}) \to \chi(\boldsymbol{x})] \vdash \forall \boldsymbol{x}[\varphi(\boldsymbol{x}) \to \chi(\boldsymbol{x})]$$

理論 T が矛盾することは、$T \vdash (\top \to \bot)$（empty context）として定義すればよい。もし $T \vdash \forall x[\top \to \bot]$ となっても、「x は空集合上の変数」との解釈が T-モデルになり得る。

many-sorted 等式論理でも似た問題が生じる [Goguen–Meseguer, 1985]

[1] いまは $\forall \boldsymbol{x}[\varphi(\boldsymbol{x}) \to \psi(\boldsymbol{x})]$ で一つの expression であったことに注意

モデルの圏の射について

Proposition

古典一階 $\mathcal{L}$-理論 T に対し、言語の拡大 $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ および整合 $\mathcal{L}'$-理論 T' が存在し、モデルと初等埋込の圏 T-**Elem** と T'-**Mod** が圏同値となる。

古典論理式 φ に対し、関係記号 P_φ（引数は φ と同じ）を用意

$$\mathcal{L}' := \mathcal{L} \cup \{\, P_\varphi \,;\, \varphi(\boldsymbol{x}) : \text{first-order formula-in-context} \,\}$$

T' は P_φ ($\varphi \in T$; 0-ary) と次の公理達から成る（T の **Morley 化**）

$$\begin{gathered}
\varphi(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow P_\varphi(\boldsymbol{x}), \qquad (\varphi \text{ は原子 } \mathcal{L}\text{-論理式}) \\
P_{\varphi\wedge\psi}(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow P_\varphi(\boldsymbol{x}) \wedge P_\psi(\boldsymbol{x}), \qquad (\vee \text{ についても同様}) \\
P_{\varphi\to\psi}(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow P_{\neg\varphi}(\boldsymbol{x}) \vee P_\psi(\boldsymbol{x}), \\
P_{\exists y\varphi}(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow \exists y P_\varphi(\boldsymbol{x}, y), \quad P_{\forall y\varphi}(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow P_{\neg\exists y\neg\varphi}(\boldsymbol{x}), \\
P_{\neg\varphi}(\boldsymbol{x}) \vee P_\varphi(\boldsymbol{x}), \quad P_{\neg\varphi}(\boldsymbol{x}) \wedge P_\varphi(\boldsymbol{x}) \to \bot
\end{gathered}$$

整合理論の構文圏

整合論理の函手的意味論を展開するためには、任意の整合論理式を対象とする構文圏 $\mathcal{C}_T$ を考える必要がある：

対象 $\{\boldsymbol{x}.\,\varphi\}$ for each coherent formula-in-context $\varphi(\boldsymbol{x})$

射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_T}(\{\boldsymbol{x}.\,\varphi\}\,,\{\boldsymbol{y}.\,\psi\}) := \{\,\theta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\ ;\ \text{函数論理式}\,\}/\!\sim$

ここで、整合論理式 $\theta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が**函数論理式**であるとは、

$$\theta \to \varphi \wedge \psi, \quad \varphi \to \exists \boldsymbol{y}\theta, \quad \theta \wedge \theta[\boldsymbol{y'}/\boldsymbol{y}] \to \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y'}$$

の全称閉包が T から証明可能であることをいう。また、

$$\theta \sim \theta' \overset{\text{def.}}{\iff} T \vdash \theta \leftrightarrow \theta'$$

合成 $\{\boldsymbol{x}.\,\varphi\} \xrightarrow{\theta} \{\boldsymbol{y}.\,\psi\} \xrightarrow{\gamma} \{\boldsymbol{z}.\,\chi\}$ の合成は $\exists \boldsymbol{y}(\theta \wedge \gamma)$

整合論理の函手的意味論（仮）

モデル M と $\theta\colon \{\boldsymbol{x}.\,\varphi\} \to \{\boldsymbol{y}.\,\psi\}$ に対し、$[\![\boldsymbol{xy}.\,\theta]\!]_M \subseteq [\![\boldsymbol{x}.\,\varphi]\!]_M \times [\![\boldsymbol{y}.\,\psi]\!]_M$ はある写像 $\theta^M\colon [\![\boldsymbol{x}.\,\varphi]\!]_M \to [\![\boldsymbol{y}.\,\psi]\!]_M$ のグラフ。よって函手 F_M を得る

$$\mathcal{C}_T \ni \theta\colon \{\boldsymbol{x}.\,\varphi\} \to \{\boldsymbol{y}.\,\psi\} \quad \mapsto \quad \theta^M\colon [\![\boldsymbol{x}.\,\varphi]\!]_M \to [\![\boldsymbol{y}.\,\psi]\!]_M \in \mathbf{Set}$$

準同型 $h\colon M \to N$ は次の図式を可換にする（$\neg$ を含まないのが本質的）

$$\begin{tikzcd}
{[\![\boldsymbol{x}.\,\varphi]\!]_M} \arrow[r, tail] \arrow[d, dashed, "\exists"'] & M^n \arrow[d, "h^n"] \\
{[\![\boldsymbol{x}.\,\varphi]\!]_N} \arrow[r, tail] & N^n
\end{tikzcd}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
{[\![\boldsymbol{x}.\,\varphi]\!]_M} \arrow[r, "\theta^M"] \arrow[d, "h"'] & {[\![\boldsymbol{y}.\,\psi]\!]_M} \arrow[d, "h"] \\
{[\![\boldsymbol{x}.\,\varphi]\!]_N} \arrow[r, "\theta^N"] & {[\![\boldsymbol{y}.\,\psi]\!]_N}
\end{tikzcd}$$

T-モデルと準同型の圏 T-**Mod** から $[\mathcal{C}_T, \mathbf{Set}]$ への函手が得られた。

Question

どのような函手 $\mathcal{C}_T \to \mathbf{Set}$ が T-モデルと対応するか？