圏論的一階述語論理（2）

荒武 永史

京都大学数理解析研究所

2023 年 2 月 21 日@Logic Winter School 2023

Contents

Contents

整合理論の構文圏の構造：有限極限

しばらく整合理論 T のモデル M を固定して考える。

Question

$F_M \colon \mathcal{C}_T \to \mathbf{Set}$ はどのような圏構造を保つか？

整合論理式の構成に対応する圏構造を探す。まず**有限極限**を保存する。

$$\{\boldsymbol{x}.\,\varphi\} \longleftarrow \{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}.\,\varphi \wedge \psi\} \longrightarrow \{\boldsymbol{y}.\,\psi\}$$

$$\rightsquigarrow \quad [\![\boldsymbol{x}.\,\varphi]\!]_M \longleftarrow [\![\boldsymbol{x}.\,\varphi]\!]_M \times [\![\boldsymbol{y}.\,\psi]\!]_M \longrightarrow [\![\boldsymbol{y}.\,\psi]\!]_M$$

（**直積の保存**）

$$\begin{tikzcd}
\{\boldsymbol{x}.\,R(t_1,\dots,t_n)\} \arrow[r] \arrow[d, tail] & \{\boldsymbol{y}.\,R\} \arrow[d, tail] \\
\{\boldsymbol{x}.\,\top\} \arrow[r, "\boldsymbol{t}=(t_1,\dots,t_n)"] & \{\boldsymbol{y}.\,\top\}
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{tikzcd}
[\![\boldsymbol{x}.\,R(\boldsymbol{t})]\!]_M \arrow[r] \arrow[d, tail] & R^M \arrow[d, tail] \\
M^m \arrow[r, "\boldsymbol{t}^M"] & M^n
\end{tikzcd}$$

（**pullback の保存**）

整合理論の構文圏の構造：部分対象束

圏 $\mathcal{C}$ の射 $f\colon C \to C'$ が**モノ射** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall g, h\colon X \rightrightarrows C,\ [fg = fh \Rightarrow g = h]$

C を codomain に持つようなモノ射を C の**部分対象**と言う。
C の部分対象全体に次の前順序を入れたものを $\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(C)$ で表す：

$$S \leq S' \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \begin{tikzcd} S \arrow[rr, dashed, "\exists"] \arrow[dr, tail] & & S' \arrow[dl, tail] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Proposition

$\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}_T}(\{\boldsymbol{x}.\,\varphi\})$ は、$T \vdash \psi \to \varphi$ なる $\{\boldsymbol{x}.\,\psi\}$ 全体が成す Lindenbaum 代数と見なせる。特に分配束になっている。

$F_M\colon \mathcal{C}_T \to \mathbf{Set}$ は単調写像

$$\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}_T}(\{\boldsymbol{x}.\,\varphi\}) \longrightarrow \mathrm{Sub}_{\mathbf{Set}}(\llbracket \boldsymbol{x}.\,\varphi \rrbracket_M)$$

を誘導し、これは**分配束の準同型**。

整合理論の構文圏の構造：像分解

量化子 $\exists$ に対応する圏構造は何か？

$\mathcal{C}_T$ において“像分解”“順像”が考えられる。

$$
\begin{tikzcd}
\{\boldsymbol{x}.\,\varphi\} \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, two heads] & & \{\boldsymbol{y}.\,\psi\} \\
& \{\boldsymbol{y}.\,\exists\boldsymbol{x}\theta\} \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \{\boldsymbol{y}.\,\chi\} \arrow[dr, tail] & \\
\{\boldsymbol{x}.\,\varphi\} \arrow[ur] \arrow[dr, two heads] & & \{\boldsymbol{y}.\,\psi\} \\
& \{\boldsymbol{y}.\,\exists\boldsymbol{x}\theta\} \arrow[uu, dashed, "\exists"] \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}
$$

$\{\boldsymbol{y}.\,\exists\boldsymbol{x}\theta\}$ は θ の分解に現れる中で最小の部分対象。

$\{\boldsymbol{x}.\,\chi\} \rightarrowtail \{\boldsymbol{x}.\,\varphi\}$ の θ に沿った順像は $\{\boldsymbol{y}.\,\exists\boldsymbol{x}(\theta \wedge \chi)\}$ で与えられる。

F_M は像分解を保つ：

$$
\begin{tikzcd}
\llbracket \boldsymbol{x}.\,\varphi \rrbracket_M \arrow[rr, "\theta^M"] \arrow[dr, two heads] & & \llbracket \boldsymbol{y}.\,\psi \rrbracket_M \\
& \theta^M(\llbracket \boldsymbol{x}.\,\varphi \rrbracket_M) \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}
$$

Quantifiers as Adjoints

Set においては $\exists, \forall$ の圏論的解釈を同時に与えることができる。

集合 X, Y, 射影 $p\colon X \times Y \to X \quad \rightsquigarrow \quad p^{-1}\colon PX \to P(X \times Y)$

$S \subseteq X \times Y$ に対し、$\exists_y S, \forall_y S \subseteq X$ を次で定める：

$$\exists_y S = \{\, x \in X \,;\, \text{ある } y \in Y \text{ が存在して } (x, y) \in S \,\}$$
$$\forall_y S = \{\, x \in X \,;\, \text{任意の } y \in Y \text{ に対して } (x, y) \in S \,\}$$

すると、$\exists_y, \forall_y\colon P(X \times Y) \to PX$ は次を満たす：

Proposition

任意の部分集合 $S \subseteq X \times Y$ および $R \subseteq X$ について、

$$\exists_y S \subseteq R \iff S \subseteq p^{-1}(R), \qquad p^{-1}(R) \subseteq S \iff R \subseteq \forall_y S$$

これは圏論の言葉で次のように表現される

- $\exists_y$ は p^{-1} の**左随伴函手**である：$\exists_y \dashv p^{-1}$
- $\forall_y$ は p^{-1} の**右随伴函手**である：$p^{-1} \dashv \forall_y$

整合理論の構文圏の構造：像分解 (continued)

$\mathcal{C}_T$ における θ に沿った“順像”と“逆像”も随伴を構成する

$$
\begin{tikzcd}
\{\boldsymbol{y}.\,\exists\boldsymbol{x}(\theta\wedge\chi)\} \arrow[r, dashed, "\exists"] \arrow[dr, hook] & \{\boldsymbol{y}.\,\alpha\} \arrow[d, hook] \\
& \{\boldsymbol{y}.\,\psi\}
\end{tikzcd}
\iff
\begin{tikzcd}
\{\boldsymbol{x}.\,\chi\} \arrow[r, dashed, "\exists"] \arrow[dr, hook] & \{\boldsymbol{x}.\,\exists\boldsymbol{y}(\theta\wedge\alpha)\} \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \{\boldsymbol{y}.\,\alpha\} \arrow[d, hook] \\
& \{\boldsymbol{x}.\,\varphi\} \arrow[r, "\theta"] & \{\boldsymbol{y}.\,\psi\}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Sub}(\varphi) \arrow[r, shift left=2, "\chi\,\mapsto\,\exists\boldsymbol{x}(\theta\wedge\chi)"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Sub}(\psi) \arrow[l, shift left=2, "\exists\boldsymbol{y}(\theta\wedge\alpha)\,\mapsfrom\,\alpha"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned}
&\exists\boldsymbol{x}(\theta\wedge\chi)\le\alpha \\
\iff &\chi\le\exists\boldsymbol{y}(\theta\wedge\alpha)
\end{aligned}
$$

F_M は $\exists$ を保つ：

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}_T}(\{\boldsymbol{x}.\,\varphi\}) \arrow[r, "F_M"] \arrow[d, "\exists_\theta"] & \mathrm{Sub}([\![\boldsymbol{x}.\,\varphi]\!]_M) \arrow[d, "\exists_{(\theta^M)}"] \\
\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}_T}(\{\boldsymbol{y}.\,\psi\}) \arrow[r, "F_M"] & \mathrm{Sub}([\![\boldsymbol{y}.\,\psi]\!]_M)
\end{tikzcd}
$$

整合圏・整合函手

有限極限を持つ圏について、像分解の存在と逆像の左随伴の存在は同値。
有限極限を保つ函手について、像分解の保存と ∃ との交換は同値。

Definition

圏 $\mathcal{D}$ が**整合圏** $\overset{\text{def.}}{\iff}$

- 有限極限・像分解を持つ
- 任意の $\mathrm{Sub}_{\mathcal{D}}(A)$ が（分配）束
- 像分解と $\mathrm{Sub}_{\mathcal{D}}(A)$ の join が pullback で保たれる

整合圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の間の**整合函手** $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ $\overset{\text{def.}}{\iff}$ F は整合圏の構造を保つ。

直積を持つ圏・整合圏などは論理体系に対応する圏のクラス。総称的に**論理的圏**と言うこともある。構文圏としても宇宙としても現れる。

準トポス以外の整合圏の例

分配束, コンパクト Hausdorff 空間の圏 **KHaus**, Stone 空間の圏 **Stone**

Set-値モデルの函手的意味論

「定義可能集合を取る函手」を得る対応により、

$$T\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Coh}(\mathcal{C}_T, \mathbf{Set})$$

ただし、右辺は整合函手と自然変換の圏。

他方、整合函手 $F\colon \mathcal{C}_T \to \mathbf{Set}$ から T-モデル $M := F(\{x.\top\})$ を得る：

$$f^M := F([y = f(\boldsymbol{x})])\colon F(\{\boldsymbol{x}.\top\}) \to F(\{y.\top\})$$
$$R^M := F(\{\boldsymbol{x}.R\}) \text{ as subobjects of } F(\{\boldsymbol{x}.\top\})$$

任意の項 t と整合論理式 $\varphi(\boldsymbol{x})$ に対し

$$t^M = F([y = t(\boldsymbol{x})])\colon F(\{\boldsymbol{x}.\top\}) \to F(\{y.\top\})$$
$$[\![\boldsymbol{x}.\varphi]\!]_M = F(\{\boldsymbol{x}.\varphi\}) \text{ as subobjects of } F(\{\boldsymbol{x}.\top\})$$

Theorem

$$T\text{-}\mathbf{Mod} \simeq \mathbf{Coh}(\mathcal{C}_T, \mathbf{Set})$$

整合圏における構造

$\mathcal{D}$ を整合圏とする。**$\mathcal{D}$ における $\mathcal{L}$-構造** M は、“台対象” M および射 $f^M \colon M^n \to M$ と部分対象 $R^M \rightarrowtail M^n$ たちから成る。

帰納的に項 t の解釈 $t^M \colon M^n \to M$ が定まる。原子論理式 $R(t_1, \dots, t_n)$, $s = t$ の解釈は、次の pullback を用いて得られる：

$$
\begin{tikzcd}
\llbracket \boldsymbol{x}.\, R(\boldsymbol{t}) \rrbracket_M \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & R^M \arrow[d, tail] \\
M^m \arrow[r, "\boldsymbol{t}^M"] & M^n
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\llbracket \boldsymbol{x}.\, s = t \rrbracket_M \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & M \arrow[d, tail] \\
M^m \arrow[r, "\langle s^M, t^M \rangle"] & M \times M
\end{tikzcd}
$$

$\llbracket \boldsymbol{x}.\, s = t \rrbracket_M$ は $s^M, t^M \colon M^m \rightrightarrows M$ の equalizer として定義してもよい。

論理結合子の解釈

論理結合子は $\mathrm{Sub}_{\mathcal{D}}(M^n)$ の束構造を使って自然に解釈する。

$$[\![\boldsymbol{x}.\,\varphi]\!]_M\,, [\![\boldsymbol{x}.\,\psi]\!]_M \in \mathrm{Sub}(M^n) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} [\![\varphi \wedge \psi]\!]_M &:= [\![\varphi]\!]_M \wedge [\![\psi]\!]_M \\ [\![\varphi \vee \psi]\!]_M &:= [\![\varphi]\!]_M \vee [\![\psi]\!]_M \end{aligned}$$

ここで φ, ψ に現れる自由変数が異なるときは、例えば $\varphi(\boldsymbol{x})$ に仮想的な自由変数 y を追加して $\varphi(\boldsymbol{x}, y)$ にする必要がある。このときの解釈は次の pullback を取る：

$$\begin{tikzcd} {[\![\boldsymbol{x}y.\,\varphi]\!]_M} \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & {[\![\boldsymbol{x}.\,\varphi]\!]_M} \arrow[d, tail] \\ M^n \times M \arrow[r, "\mathrm{proj}_1"] & M^n \end{tikzcd}$$

量化記号の解釈

論理式 $\varphi(\boldsymbol{x}, y)$ に対し、$[\![\exists y \varphi]\!]_M$ を次の順像で定める：

$$\begin{tikzcd}
[\![\boldsymbol{x}y.\, \varphi]\!]_M \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & [\![\boldsymbol{x}.\, \exists y \varphi]\!]_M \arrow[d, tail] \\
M^n \times M \arrow[r, "\mathrm{proj}_1"] & M^n
\end{tikzcd}$$

$\pi := \mathrm{proj}_1$ に沿った順像 $\exists_\pi \colon \mathrm{Sub}(M^n \times M) \to \mathrm{Sub}(M)$ を使えば、$[\![\exists y \varphi]\!]_M := \exists_\pi [\![\varphi]\!]_M$ とも表せる。

以上で、構造 M における整合論理式の解釈 $[\![\boldsymbol{x}.\, \varphi]\!]_M \rightarrowtail M^n$ が定義された。特に閉論理式からは $[\![[\,].\, \varphi]\!]_M \rightarrowtail 1$ が得られる。

$$M \models \forall \boldsymbol{x}[\varphi(\boldsymbol{x}) \to \psi(\boldsymbol{x})] \overset{\text{def.}}{\iff} [\![\boldsymbol{x}.\varphi]\!]_M \leq [\![\boldsymbol{x}.\psi]\!]_M \text{ as subobjects of } M^n$$

$$M \models T \text{（}M\text{ は }T\text{-モデル）} \overset{\text{def.}}{\iff} \text{For any } (\varphi \to \psi) \in T,\ M \models \varphi \to \psi$$

準同型による整合論理式の保存

準同型 $h\colon M \to N$ は任意の項と原子論理式を保つ

$$
\begin{tikzcd}
M^n \arrow[r, "t^M"] \arrow[d, "h^n"'] & M \arrow[d, "h^n"] \\
N^n \arrow[r, "t^N"'] & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R^M \arrow[r, tail] \arrow[d, dashed, "\exists"'] & M^n \arrow[d, "h^n"] \\
R^N \arrow[r, tail] & N^n
\end{tikzcd}
$$

準同型 $h\colon M \to N$ は次の図式を可換にする：

$$
\begin{tikzcd}
[\![\boldsymbol{x}.\,\varphi]\!]_M \arrow[r, tail] \arrow[d, dashed, "\exists"'] & M^n \arrow[d, "h^n"] \\
[\![\boldsymbol{x}.\,\varphi]\!]_N \arrow[r, tail] & N^n
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{tikzcd}
[\![\boldsymbol{x}.\,\varphi]\!]_M \arrow[r, "\theta^M"] \arrow[d, "h"'] & [\![\boldsymbol{y}.\,\psi]\!]_M \arrow[d, "h"] \\
[\![\boldsymbol{x}.\,\varphi]\!]_N \arrow[r, "\theta^N"] & [\![\boldsymbol{y}.\,\psi]\!]_N
\end{tikzcd}
$$

一般のモデルに対する函手的意味論

T-$\mathbf{Mod}(\mathcal{D})$：$\mathcal{D}$ における T-モデルと準同型の圏

Theorem

$$T\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{D}) \simeq \mathbf{Coh}(\mathcal{C}_T, \mathcal{D})$$

等式理論のときと同様に、$\mathcal{C}_T$ における canonical T-モデル M_T が取れ、

$$T \vdash (\varphi \to \psi) \iff \{\boldsymbol{x}.\,\varphi\} \leq \{\boldsymbol{x}.\,\psi\} \text{ in } \mathrm{Sub}(\{\boldsymbol{x}.\,\top\}) \iff M_T \models (\varphi \to \psi)$$

よって広い意味でのモデルについての完全性が成り立つ。

整合圏におけるモデルの具体例

位相空間 X について、

$\mathbf{Sh}(X)$ における T-モデル M $\iff$ 各 stalk M_x が $\mathbf{Set}$ における T-モデル

特に X 上の $\mathbb{R}$ 値連続函数の層 C（$= \mathbf{Sh}(X)$ における実数対象）は、一般に整域でないが（分離実閉）局所環（Kock–Johnstone, Joyal–Reyes）

Contents

束の内部論理

Boole 代数 B に対し、命題理論 T_B を構成する：

- 各元 $b \in B$ に命題変数 p_b を用意：$\mathrm{PV} = \{\, p_b \,;\, b \in B \,\}$
- T_B は以下の公理から成る：

$$\begin{array}{lll} \top \to p_{1_B}, & p_{(b\wedge b')} \leftrightarrow p_b \wedge p_{b'}, & p_b \wedge p_{\neg b} \to \bot \\ p_{0_B} \to \bot, & p_{(b\vee b')} \leftrightarrow p_b \vee p_{b'}, & \top \to p_b \vee p_{\neg b} \end{array}$$

T_B-モデル $v\colon \mathrm{PV} \to 2$ は Boole 準同型 $B \to 2$ と対応。
より一般に、Boole 代数 L における T_B-モデルは準同型 $B \to L$ に対応。

Proposition

Lindenbaum 代数 $L_{(T_B)}$ は B と同型で、任意の Boole 代数 L について

$$T_B\text{-Mod}(L) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bool}}(L_{(T_B)}, L) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bool}}(B, L)$$

例えば、B における等式 $((a \to b) \wedge (b \to c)) \to (a \to c) = 1_B$ を直接示す代わりに、$T_B \vdash ((p_a \to p_b) \wedge (p_b \to p_c)) \to (p_a \to p_c)$（これは 2 値モデル版の完全性より容易に示せる）から $L_{(T_B)} \cong B$ における等式を得られる。

有限直積を持つ圏の内部論理

有限直積を持つ小圏 $\mathcal{C}$ の**内部等式理論** $T_{\mathcal{C}}$ を構成したい。

$\rightsquigarrow$ **many-sorted な等式論理が本質的に必要！**

$\mathcal{C}$ の内部言語 $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ および等式理論 $T_{\mathcal{C}}$ は次から成る

- 各対象 A に対する基本ソート A、および各射 $f\colon A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ に対する n 変数函数記号 $\mathsf{f}\colon \mathsf{A}_1 \cdots \mathsf{A}_n \to \mathsf{B}$ と定数記号 $c : 1$
- $T_{\mathcal{C}}$ の公理（$x : \mathsf{A}$ や $\underset{\mathsf{A}}{=}$ は変数や等号のソートを表す）

$$f_i\colon A_1 \times \cdots \times A_n \to B_i,\ g\colon B_1 \times \cdots \times B_m \to C$$

$$\rightsquigarrow \qquad \forall \boldsymbol{x} : \bar{\mathsf{A}},\ \ulcorner \mathsf{g} \circ \langle \mathsf{f}_1, \ldots, \mathsf{f}_m \rangle \urcorner (\boldsymbol{x}) \underset{\mathsf{C}}{=} \mathsf{g}\left(\mathsf{f}_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \mathsf{f}_m(\boldsymbol{x})\right)$$

$$\forall x : \mathsf{A},\ \mathsf{id}_{\mathsf{A}}(x) \underset{\mathsf{A}}{=} x, \qquad \forall x : 1,\ x \underset{1}{=} c$$

厳密には $f\colon A \times B \to C$ に対し、$\mathsf{f}\colon \mathsf{A}\mathsf{B} \to \mathsf{C}$ に加えて、$A \times B$ を一つの対象と見なすことで函数記号 $\ulcorner \mathsf{A} \times \mathsf{B} \urcorner \to \mathsf{C}$ も割り当てられるのでこれらを区別しなければならない。

有限直積を持つ圏の内部論理 (continued)

$T_{\mathcal{C}}$ の構文圏 $\mathcal{C}_{(T_{\mathcal{C}})}$ はソートの有限列を対象に持ち、

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(\mathsf{A}_1 \cdots \mathsf{A}_\mathsf{n}, \mathsf{B}_1 \cdots \mathsf{B}_\mathsf{m}) \\ := \mathrm{Hom}(\mathsf{A}_1 \cdots \mathsf{A}_\mathsf{n}, \mathsf{B}_1) \times \cdots \times \mathrm{Hom}(\mathsf{A}_1 \cdots \mathsf{A}_\mathsf{n}, \mathsf{B}_\mathsf{m})\end{aligned}$$

$A \xleftarrow{p} A \times B \xrightarrow{q} B$ に対し、$\mathrm{pair} \colon \mathsf{AB} \to \ulcorner \mathsf{A} \times \mathsf{B} \urcorner$ は次を満たす

$$\mathsf{p}(\mathrm{pair}(x, y)) \underset{\mathsf{A}}{=} x, \quad \mathsf{q}(\mathrm{pair}(x, y)) \underset{\mathsf{B}}{=} y, \quad \mathrm{pair}(\mathsf{p}(z), \mathsf{q}(z)) \underset{\ulcorner \mathsf{A} \times \mathsf{B} \urcorner}{=} z$$

$$\text{よって} \qquad \ulcorner \mathsf{A} \times \mathsf{B} \urcorner \cong \mathsf{AB} \cong \mathsf{A} \times \mathsf{B} \quad (\text{in } \mathcal{C}_{(T_{\mathcal{C}})})$$

Proposition (cf. Jacobs, CLTT, Theorem 3.3.8)

函手 $\mathcal{C}_{(T_{\mathcal{C}})} \to \mathcal{C}$ $(\mathsf{f} \mapsto f)$ は圏同値を与え、任意の有限直積圏 $\mathcal{D}$ に対し

$$T_{\mathcal{C}}\text{-}\mathbf{Alg}(\mathcal{D}) \simeq \mathbf{FPFunc}(\mathcal{C}_{(T_{\mathcal{C}})}, \mathcal{D}) \simeq \mathbf{FPFunc}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

内部論理の応用（その 1）

等式論理の場合は表現力が弱すぎるので非自明な応用は思いつかないが、例えば $A, B, C \in \mathcal{C}$, $f\colon A \to C$ として（proj_2 は適切な第 2 射影）

$$
\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "\Delta_A \times \mathrm{id}_B"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A \times \Delta_B"'] & (A \times A) \times B \arrow[d, "(f \circ \mathrm{proj}_2^{AA}) \times \mathrm{id}_B"] \\
A \times (B \times B) \arrow[r, "f \times \mathrm{proj}_2^{BB}"] & C \times B
\end{tikzcd}
$$

といった複雑な図式の可換性は **Set** における直観的な議論（を $T_{\mathcal{C}}$ からの証明に書き直したもの）に帰着できる。

conceptual に重要な点として、内部論理を通すことで等式理論と有限直積を持つ圏はある意味では等価であることがわかる。有限直積を持つ圏そのものを**代数理論**あるいは **Lawvere 理論**と言ってしまうことも多い。

整合圏の内部論理

整合圏 $\mathcal{C}$ の内部言語 $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ は、A と 1 変数記号 $\mathsf{f}\colon \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ だけでよい。

整合理論 $T_{\mathcal{C}}$ は以下の公理から成る（次頁に続く）：

- $f\colon A \to B,\ g\colon B \to C \quad \rightsquigarrow \quad \forall x : \mathsf{A},\ \ulcorner \mathsf{g} \circ \mathsf{f} \urcorner(x) \underset{\mathsf{C}}{=} \mathsf{g}\,(\mathsf{f}(x))$
- $\forall x : \mathsf{A},\ \mathsf{id}_{\mathsf{A}}(x) \underset{\mathsf{A}}{=} x, \qquad \exists x : \mathsf{1},\ x \underset{\mathsf{1}}{=} x, \qquad \forall x, x' : \mathsf{1},\ x \underset{\mathsf{1}}{=} x'$
- $\forall x, x' : \mathsf{A},\ \mathsf{f}(x) \underset{\mathsf{B}}{=} \mathsf{f}(x') \wedge \mathsf{h}(x) \underset{\mathsf{C}}{=} \mathsf{h}(x') \to x = x'$

  $\forall y : \mathsf{B},\ \forall z : \mathsf{C},\ \mathsf{g}(y) \underset{\mathsf{D}}{=} \mathsf{k}(z) \to \exists x \left[\mathsf{f}(x) \underset{\mathsf{B}}{=} y \wedge \mathsf{h}(x) \underset{\mathsf{C}}{=} z\right]$

  for each pullback square
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "k"] & D \end{tikzcd}$$

整合圏の内部論理 (continued)

- $\forall x : \mathsf{0},\ \top \to \bot$（ただし 0 は始対象）
- $\forall x : \mathsf{A},\ \bigvee_i \exists y_i \left(\mathsf{f_i}(y_i) \underset{\mathsf{A}}{=} x \right)$
  for each finite cover $\{f_i \colon B_i \to A\}_{i=1}^n$, i.e. $A = \bigvee_i \mathrm{Im}(f_i)$

Proposition

自然な函手 $\mathcal{C}_{(T_\mathcal{C})} \to \mathcal{C}$ は圏同値を与え、任意の整合圏 $\mathcal{D}$ に対し

$$T_\mathcal{C}\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{D}) \simeq \mathbf{Coh}(\mathcal{C}_{(T_\mathcal{C})}, \mathcal{D}) \simeq \mathbf{Coh}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

よって整合理論と整合圏はある意味で等価。実は（プレトポス完備化を経由して）双圏としての圏同値と捉えられる（$\rightsquigarrow$4 日目）。

$$T_\mathcal{C} \vdash (\varphi \to \psi) \iff M_{(T_\mathcal{C})} \models (\varphi \to \psi) \iff \mathcal{C} \models (\varphi \to \psi)$$

内部論理の応用（その 2）

$\mathcal{C}$ の内部論理で射の性質を特徴づけられる：$f\colon A \to B$ について

$$
\begin{aligned}
f \text{ がモノ射} &\iff T_{\mathcal{C}} \vdash \forall x, x',\ \mathsf{f}(x) = \mathsf{f}(x') \to x = x' \\
f \text{ が正則エピ射} &\iff T_{\mathcal{C}} \vdash \forall y,\ \exists x\,(\mathsf{f}(x) = y) \\
A \text{ が始対象} &\iff T_{\mathcal{C}} \vdash \forall x(\top \to \bot)
\end{aligned}
$$

Proposition

整合圏の始対象から唯一の射 $f\colon 0 \to A$ が正則エピなら A は始対象

Proof

x : 0, y : A とする。仮定より

$$T_{\mathcal{C}} \vdash \qquad \forall y\,[\top \to \exists x\,(\mathsf{f}(x) = y)]\,, \qquad \forall x(\top \to \bot)$$

また $T_{\mathcal{C}} \vdash \forall y\,[\exists x\,(\mathsf{f}(x) = y) \to \exists x(x = x)]\,, \quad \exists x(x = x) \to \bot$ なので、

$$T_{\mathcal{C}} \vdash \forall y(\top \to \bot) \qquad \blacksquare$$

脱線：理論の等価性

整合圏 $\mathcal{C}$ は有限直積を持つ圏でもあるので $T_{\mathcal{C}}^{\mathrm{coh}}$ と $T_{\mathcal{C}}^{\mathrm{eqn}}$ の両方をつくれる。どちらからも（整合/等式）構文圏として $\mathcal{C}$ を復元できる。

Question

$T_{\mathcal{C}}^{\mathrm{coh}}$ と $T_{\mathcal{C}}^{\mathrm{eqn}}$ が“論理的に等価”であることをどう定式化すればいいか？

整合理論同士あるいは等式理論同士なら適切な双翻訳可能性で比較できるが、論理体系が異なるような理論を比較するには「分類トポスのレベルで圏同値」が一つの尺度になる。（$\rightsquigarrow$ 4 日目）