高階直観主義論理とトポス

荒武 永史

京都大学数理解析研究所

2023 年 2 月 22 日@Logic Winter School 2023

Contents

Contents

高階直観主義論理

高階直観主義論理の syntax の概略を与える。証明論はよしなに定義する。

基本ソートの集合 $\mathcal{L}$-Sort 上の**型**を次の BNF で定義

$$A, B ::= S \mid 1 \mid A \times B \mid B^A \mid \Omega \mid PA \qquad \text{（ただし } S \in \mathcal{L}\text{-Sort）}$$

函数記号は全て 1 引数 $f\colon A \to B$ とする（関係記号は $A \to \Omega$ と同一視）

項の生成規則（抜粋）：A, B, U, V は型、s, t は項を表すとする。

$$\begin{array}{ccc}
\text{変数 } x : A & \rightsquigarrow & x\colon A \to A \\
s\colon U \to A \text{ と函数記号 } f\colon A \to B & \rightsquigarrow & f \circ s\colon U \to B \\
s\colon U \to A,\ t\colon V \to B & \rightsquigarrow & \langle s, t\rangle\colon U \times V \to A \times B \\
s\colon U \times A \to B \text{ と変数 } x : A & \rightsquigarrow & (\lambda x.s)\colon U \to B^A \\
s\colon U \to A,\ t\colon V \to B^A & \rightsquigarrow & t(s)\colon U \times V \to B \\
s\colon U \to A,\ t\colon V \to A & \rightsquigarrow & (s =_A t)\colon U \times V \to \Omega \\
s\colon U \to A,\ t\colon V \to PA & \rightsquigarrow & (s \in_A t)\colon U \times V \to \Omega \\
s\colon U \times A \to \Omega \text{ と変数 } x : A & \rightsquigarrow & \{x \mid s\}\colon U \to PA
\end{array}$$

高階直観主義論理 (continued)

$s\colon A \to \Omega$ の形の項を**論理式**と言う。s, t の代わりに φ, ψ などで表す。

$\varphi \wedge \psi$ などの論理式は項の定義に含める or 適当な略記として扱う
（cf. [Elephant, D4.3.2], [Lambek–Scott, II.1], [上村]）

閉論理式、すなわち項 $1 \to \Omega$ の集合を**高階直観主義理論**と言う。

本講義の前半では $t(x), \varphi(x)$ といった記法を用いてきたが、高階直観主義論理では函数適用の記法と紛らわしいので避けることにする。

高階直観主義理論に対応する圏のクラスが**トポス**である。高階直観主義論理とトポスについても、構文圏・函手的意味論・トポス値意味論を議論できるがここでは扱わず、内部論理のみを扱う。以下の説明で

- トポスの圏構造があれば高階直観主義論理を解釈できる
- 高階直観主義論理はトポスの内部論理として充分な表現力を持つ

という 2 点を納得できれば OK

初等トポス

Definition

局所小圏 $\mathcal{E}$ が次の 3 条件を満たすとき、**（初等）トポス**と言う：

- 有限極限（と有限余極限）を持つ
- **指数対象**を持つ（カルテジアン閉圏)。すなわち、任意の $A \in \mathcal{E}$ に対して、直積函手 $(-) \times A \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ の右随伴 $(-)^A \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ が存在：
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(B \times A, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(B, C^A) \qquad \text{(un/Curry 化)}$$
- **部分対象分類子**、すなわち射 $\mathrm{true} \colon 1 \to \Omega$ で次の普遍性を持つものが存在：任意の A と部分対象 $S \rightarrowtail A$ に対し、次の図を pullback にする $\chi_S \colon A \to \Omega$ が一意に存在：
$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "!"] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, dashed, "\chi_S"] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \mathrm{Sub}(A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, \Omega)$$

FinSet や **Set** はもちろんトポスである。

指数対象による項の解釈（雰囲気）

$$s\colon U\times A\to B \text{ と変数 } x : A \quad\rightsquigarrow\quad (\lambda x.s)\colon U\to B^A$$
$$s\colon U\to A,\ t\colon V\to B^A \quad\rightsquigarrow\quad t(s)\colon U\times V\to B$$

1 つ目の項の解釈はもちろん

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(U\times A, B)\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(U, B^A)$$

を用いて与える（Curry 化, exponential transpose）。

2 つ目の項の解釈は、上の同型で $U = B^A$ と置いたときに右辺の id に対応する $\mathrm{eval}\colon B^A\times A\to B$ を用いて、

$$U\times V \xrightarrow{\sim} V\times U \xrightarrow{t\times s} B^A\times A \xrightarrow{\mathrm{eval}} B$$

の合成で与える。

部分対象分類子による項の解釈（雰囲気）

$$s\colon U \to A,\ t\colon V \to A \quad \rightsquigarrow \quad (s =_A t)\colon U \times V \to \Omega$$
$$s\colon U \to A,\ t\colon V \to PA \quad \rightsquigarrow \quad (s \in_A t)\colon U \times V \to \Omega$$
$$s\colon U \times A \to \Omega \text{ と変数 } x : A \quad \rightsquigarrow \quad \{x \mid s\}\colon U \to PA$$

$PA = \Omega^A$ と見なしたうえで、

- $(s =_A t)$ の解釈は $U \times V \xrightarrow{s \times t} A \times A \xrightarrow{(x =_A x')} \Omega$
- $(s \in_A t)$ の解釈は $t(s)$ と同一、すなわち

$$U \times V \xrightarrow{\sim} V \times U \xrightarrow{t \times s} \Omega^A \times A \xrightarrow{\mathrm{eval}} \Omega$$

- $\{x \mid s\}$ の解釈は $(\lambda x.s)\colon U \to \Omega^A$ と同一

$\mathcal{E}$ の対象としての Ω^A を A **の冪対象**と言い、PA で表す。実は有限極限と冪対象だけから指数対象を作ることも可能（cf. [SGL, §IV.2]）

トポスの基本性質

論理式の解釈を定めるのに必要なトポスの性質を列挙していく。

- トポスは有限余完備（$\because$ $P\colon \mathcal{E}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{E}$ はモナディック）
- 任意の対象 $A \in \mathcal{E}$ について、スライス圏 $\mathcal{E}/A$ はトポス
- 特に locally cartesian closed で、pullback 函手 $f^*\colon \mathcal{E}/B \to \mathcal{E}/A$ は右随伴 $\Pi_f\colon \mathcal{E}/A \to \mathcal{E}/B$ を持つ（dependent product に相当）
- 任意の $f\colon A \to B$ は像分解を持ち、順像 $\exists_f\colon \mathrm{Sub}(A) \to \mathrm{Sub}(B)$ が誘導される。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads] & & B \\
& \mathrm{Im}\, f \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, dashed, two heads] \arrow[d, tail] & & \exists_f S \arrow[d, dashed, tail] \\
A \arrow[rr, "f"] & & B
\end{tikzcd}
$$

$\exists_f$ は f^* の左随伴になる。像分解の構成は f の核の coequalizer より OK。像分解が pullback で安定なことは、f^* が右随伴を持つことより OK。

 高階直観主義論理とトポス

Logical Operations in a Topos

トポスは Heyting 圏（≒ 演算 $\forall, \to$ を持つ整合圏）

- $\mathrm{Sub}(A)$ は Heyting 代数の構造を持つ。

$$\begin{tikzcd}
S \wedge T \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & T \arrow[d, tail] \\
S \arrow[r, tail, "m"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S + T \arrow[dr, two heads] & & T \arrow[ll] \arrow[dd, tail] \\
& S \vee T \arrow[dr, tail] & \\
S \arrow[uu] \arrow[rr, tail] & & A
\end{tikzcd}$$

$S \to T$ は下記の演算を使って $\forall_m(S \wedge T)$ で構成できる。

- $f\colon A \to B$ に対し $f^*\colon \mathrm{Sub}(B) \to \mathrm{Sub}(A)$ は Heyting 代数の準同型。
- f^* は右随伴 $\forall_f\colon \mathrm{Sub}(A) \to \mathrm{Sub}(B)$ も持つ（Π_f の制限）

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathrm{Sub}(A) \arrow[r, shift left=8, "\exists_f"] \arrow[r, shift left=4, phantom, "\perp"] \arrow[r, shift right=4, phantom, "\perp"] \arrow[r, shift right=8, "\forall_f"'] & \mathrm{Sub}(B) \arrow[l, "f^*"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned}
\exists_f S \le T &\iff S \le f^* T \\
f^* T \le S &\iff T \le \forall_f S
\end{aligned}$$

Internal Logical Operations

上述の “external” な演算と対比して、“internal” な演算もある。

Ω には “internal Heyting algebra”（= Heyting 代数 in $\mathcal{E}$）の構造が入る。

$$\wedge, \vee, \Rightarrow \colon \Omega \times \Omega \to \Omega, \quad \neg \colon \Omega \to \Omega$$

これらは external な演算と compatible: 例えば

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(A, \Omega \times \Omega) \arrow[rr, "\wedge \circ (-)"'] \arrow[d, "\wr"] & & \mathrm{Hom}(A, \Omega) \arrow[dd, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}(A, \Omega) \times \mathrm{Hom}(A, \Omega) \arrow[d, "\wr"] & & \\
\mathrm{Sub}(A) \times \mathrm{Sub}(A) \arrow[rr, "\wedge"] & & \mathrm{Sub}(A)
\end{tikzcd}$$

また、$f \colon A \to B$ に対して “internal adjunction” が存在：

$$\begin{tikzcd}
PA \arrow[r, shift left=6, "\exists f"] \arrow[r, shift right=6, "\forall f"'] & PB \arrow[l, "Pf"' description] \arrow[l, phantom, shift left=3, "\perp"] \arrow[l, phantom, shift right=3, "\perp"]
\end{tikzcd}$$

トポスの内部言語: Mitchell–Benabou language

論理体系が豊かになり内部論理で色々な現象を記述できるようになることで、トポスの内部論理は整合圏の内部論理よりも遥かに重要性が増す。

トポス $\mathcal{E}$ の **Mitchell–Benabou language** $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ は以下のデータから成る

- 基本ソートのクラス $\{\,\mathsf{A}\,;\,A\in\mathcal{E}\,\}$（特に Ω を含む）
- 函数記号のクラス $\{\,\mathsf{f}\colon\mathsf{A}\to\mathsf{B}\,;\,f\colon A\to B\in\mathcal{E}\,\}$

基本ソート 1 や Ω は、型としての $1,\Omega$ と同一視してしまう。

型に対応する対象を用いて、任意の項 t は $\mathsf{A}\to\mathsf{B}$ の形のものに置き換えられる。このとき t は自然な解釈 $[\![t]\!]:A\to B$ を持つ。

特に論理式 $\varphi\colon\mathsf{A}\to\Omega$ は解釈 $[\![\varphi]\!]:A\to\Omega$ を持ち、Ω の普遍性よりこれは A の部分対象と同一視できる。一方、$[\![\varphi]\!]$ の Curry 化は定義より $[\![\{x:\mathsf{A}\mid\varphi\}]\!]:1\to PA$ と一致する。

$$\mathrm{Sub}(A)\cong\mathrm{Hom}(A,\Omega)\cong\mathrm{Hom}(1,PA)$$

トポスの内部論理：論理式の解釈

Ω の internal Heyting 構造や $\exists f, \forall f$ を用いて論理式の解釈を定義する。例えば $[\![\varphi]\!], [\![\psi]\!] : A \rightrightarrows \Omega$ のとき、

$$[\![\varphi \wedge \psi]\!] := \left(A \xrightarrow{\langle [\![\varphi]\!], [\![\psi]\!] \rangle} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega \right)$$

$[\![\varphi]\!] : A \times B \to \Omega,\ y : \mathrm{B}$ のとき、$[\![\exists y \varphi]\!] : A \to \Omega$ は

$$\mathrm{Hom}(A \times B, \Omega) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(1, P(A \times B)) \xrightarrow{\exists \pi_1 \circ (-)} \mathrm{Hom}(1, PA) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(A, \Omega)$$

による $[\![\varphi]\!]$ の像として定義する。

一方、$\mathcal{E}$ の Heyting 圏としての構造を用いても、整合論理の $\mathcal{E}$ における解釈と同様にして、$[\![\varphi]\!] \rightarrowtail A$ を構成できる。部分対象と射の同一視および external/internal 演算の compatibility により、これは上の定義と等価。

トポスの内部論理：Global Truth

論理式 $\varphi\colon A \to \Omega$, 変数 $x : A \quad \rightsquigarrow \quad \forall x \varphi\colon 1 \to \Omega$

Definition

$$\mathcal{E} \models \forall x \varphi \overset{\text{def.}}{\iff} [\![\forall x \varphi]\!] = \mathrm{true}\colon 1 \to \Omega$$

$$\iff \begin{tikzcd} & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[ur, "!"] \arrow[r, "{[\![\varphi]\!]}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright", shift right=3] & \Omega \end{tikzcd} \iff [\![\varphi]\!] = A \quad \text{in } \mathrm{Sub}(A)$$

特に $\varphi\colon 1 \to \Omega$ のときは $[\![\varphi]\!] = [\![\forall x^1 \varphi]\!]$ なので、単に $\mathcal{E} \models \varphi$ とも書く。

この意味論は高階直観主義論理の推論規則についてもちろん健全になる。
適切に理論 $T_{\mathcal{E}}$ を定めれば、$T_{\mathcal{E}} \vdash \varphi \iff \mathcal{E} \models \varphi$

[上村] では内部論理を用いて、冪対象から指数対象を構成したり、スライス圏が再びトポスになることを示している。

トポスの内部論理 (continued)

石原先生の講義で出てきた $A \neq \varnothing \not\Rightarrow \exists x(x \in A)$ のトポス版は、

$$\mathcal{E} \models \exists x^{\mathsf{A}} \top \iff !\colon A \to 1 \text{ が（正則）エピ射}$$

（A が inhabited / well-supported）

が「A が始対象である」(i.e. $\mathcal{E} \models \forall x^{\mathsf{A}} \bot$）と異なるということ。

Proposition

$\mathcal{E}$ が **Boolean**（i.e. 任意の $\mathrm{Sub}(A)$ が Boole 代数）$\iff$ $\mathcal{E} \models \forall p^{\Omega}(p \vee \neg p)$

Proof

$\mathcal{E} \models \forall p^{\Omega}(p \vee \neg p)$ は、$\mathrm{Sub}(\Omega)$ で $[\![p]\!] \vee \neg [\![p]\!] = \Omega$ であることを表す。変数 $p\colon \Omega \to \Omega$ の解釈は id_{Ω} なので部分対象としては $[\![p]\!] = 1 \rightarrowtail \Omega$ になる。
($\Rightarrow$) は $\mathrm{Sub}(\Omega)$ が Boole 代数になるので明らか。
($\Leftarrow$) 任意の $S \rightarrowtail A$ に対して、対応する射 $\chi\colon A \to \Omega$ で $1 \cup \neg 1 = \Omega$ を pullback すると、$\chi^*\colon \mathrm{Sub}(\Omega) \to \mathrm{Sub}(A)$ が Heyting 代数の準同型であることから $S \cup \neg S = A$ が得られる。 ■

Contents

半順序集合上の前層

トポスの具体例をいくつか紹介し、その内部論理を議論しよう。

P を半順序集合とする。圏 $\mathcal{C}$ の射の向きを逆にしたものを $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ で表す。

Definition

函手 $F\colon P^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を P **上の前層**と言う。すなわち、

- 各 $p \in P$ に対し、集合 $F(p)$ が、
- $p \geq q$ のとき、写像 $\rho_{p,q}\colon F(p) \to F(q)$ が

割り当てられていて、$p \geq q \geq r$ のとき、$\rho_{q,r} \circ \rho_{p,q} = \rho_{p,r}$

函手圏 $\mathbf{Set}^{P^{\mathrm{op}}}$ を P **上の前層圏**と言う。

後で見るように、$\mathbf{Set}^{P^{\mathrm{op}}}$（より一般に $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$）はトポスの代表例。

位相空間上の層

位相空間 X の開集合たちが成す順序集合を $\mathcal{O}(X)$ で表す。

Definition

X **上の前層**とは、函手 $F \colon \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ のこと。
さらに、F が次の**貼り合わせ条件**を満たすとき、X **上の層**と言う：

$\forall U \in \mathcal{O}(X)$, $\forall \{U_i\}_i : U$ の開被覆, $\forall \{a_i\}_i \in \prod_i F(U_i)$ に対し、

$$i \neq j \implies a_i|_{U_i \cap U_j} = a_j|_{U_i \cap U_j}$$

を満たすならば、$\exists! a \in F(U), \forall i, a|_{U_i} = a_i$

$$\begin{tikzcd}
a_i|_{U_i\cap U_j} \arrow[dd, equal] & a_i \arrow[l, mapsto] & & & & U_i \arrow[dr] & \\
& & \exists! a \arrow[ul, dashed, mapsto] \arrow[dl, dashed, mapsto] & \rightsquigarrow & U_i \cap U_j \arrow[ur] \arrow[dr] & & U \\
a_j|_{U_i\cap U_j} & a_j \arrow[l, mapsto] & & & & U_j \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

X 上の層の圏 $\mathbf{Sh}(X) \subseteq \mathbf{Set}^{\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}}}$ もトポス（後で見る）。

$\mathbf{Set}^{P^{\mathrm{op}}}$ と $\mathbf{Sh}(P)$

半順序集合 P の下方集合全体 $\mathcal{L}(P)$ は、$\downarrow(p) := \{\, q \in P \,;\, q \leq p \,\}$ たちを開基とする P 上の位相を定める（Alexandrov 位相）。

Proposition

空間 $(P, \mathcal{L}(P))$ 上の層の圏 $\mathbf{Sh}(P)$ は、前層圏 $\mathbf{Set}^{P^{\mathrm{op}}}$ と圏同値。

- 層 $F\colon \mathcal{L}(P)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ が与えられたとき、

$$\begin{aligned} p \geq q \implies &\downarrow(q) \subseteq \downarrow(p) \\ \implies &F(\downarrow(p)) \to F(\downarrow(q)) \end{aligned}$$

  により、$G\colon P^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ が定まる（$P^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\downarrow(-)} \mathcal{L}(P)^{\mathrm{op}}$ と F の合成）。
- 逆に $G\colon P^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ が与えられたとき、$F(\downarrow(p)) := G(p)$ とおくと、貼り合わせ条件を満たすように層 $F\colon \mathcal{L}(P)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ に拡張できる（$P^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\downarrow(-)} \mathcal{L}(P)^{\mathrm{op}}$ に沿った F の左 Kan 拡張）。

完備 Heyting 代数

開集合系 $\mathcal{O}(X)$ は次の性質を持つ：

Definition

順序集合 H が次の同値な 2 条件を満たすとき**完備束**と言う：

(i) 任意の部分集合 $S \subseteq H$ が上限 $\bigvee S$ を持つ

(ii) 任意の部分集合 $S \subseteq H$ が下限 $\bigwedge S$ を持つ

また、$a \wedge (-) \colon H \to H$ が右随伴 $a \to (-) \colon H \to H$ を持つと仮定

$$\forall b, c \in H,\ [a \wedge b \leq c \iff b \leq a \to c]$$

このとき、H は**完備 Heyting 代数**と言う。

完備束が Heyting 代数 $\iff$ 無限分配律 $a \wedge (\bigvee_i b_i) = \bigvee_i (a \wedge b_i)$ を満たす

位相空間上の層の場合と同様にして、$\mathbf{Sh}(H)$ が定義できる。

$\mathbf{Set}^{P^{\mathrm{op}}}$, $\mathbf{Sh}(H)$ はトポス

$\mathbf{Set}^{P^{\mathrm{op}}}$, $\mathbf{Sh}(H)$ が極限・余極限を持つのは容易に示せる。

指数対象の構成はやや複雑なので割愛。

Ω は“**真理値が成す Heyting 代数**”のように振る舞う。

$\mathbf{Set}^{P^{\mathrm{op}}}$ の部分対象分類子：

$$P^{\mathrm{op}} \ni p \quad \mapsto \quad \Omega(p) := \{\, D \in \mathcal{L}(P)\,;\, D \subseteq {\downarrow}(p) \,\} \in \mathbf{Set}$$

と $\mathrm{true}\colon 1 \to \Omega,\ \mathrm{true}_p(*) = {\downarrow}(p)$ で与えられる。

$\mathbf{Sh}(H)$ の部分対象分類子：

$$H^{\mathrm{op}} \ni U \quad \mapsto \quad \Omega(U) := {\downarrow}(U) \in \mathbf{Set}$$

と $\mathrm{true}\colon 1 \to \Omega,\ \mathrm{true}_U(*) = U$ で与えられる。

特に $H = \mathcal{L}(P)$ なら、前者の $\Omega(p)$ は後者の $\Omega({\downarrow}(p))$ に一致。

Cohen トポス

$F\colon P^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ についての次の条件を考える：

$\forall p \in P,\ D \subseteq {\downarrow}(p)$：下方稠密集合, $\forall \{a_q\}_q \in \prod_{q \in D} F(q)$ に対し、

$$r \leq q \implies a_q|_r = a_r$$

を満たすならば、$\exists! a \in F(p),\ \forall q \in D,\ a|_q = a_q$

この条件を満たす前層の圏 $\mathbf{Sh}(P, \neg\neg) \subseteq \mathbf{Set}^{P^{\mathrm{op}}}$ は、$(P, \mathcal{L}(P))$ の正則開集合（$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(D)) = D$ なる下方集合）全体が成す完備 Boole 代数 $\mathrm{RO}(\mathcal{L}(P))$ 上の層の圏 $\mathbf{Sh}(\mathrm{RO}(\mathcal{L}(P)))$ と圏同値になる。

$\mathbf{Sh}(P, \neg\neg) \simeq \mathbf{Sh}(\mathrm{RO}(\mathcal{L}(P)))$ は P 上の強制法のトポス理論的解釈を与える。特に P を Cohen poset としたものを **Cohen トポス**と言う。

より一般に、圏 $\mathcal{C}$ とその上の**被覆**（a.k.a. **Grothendieck 位相**）J に対し、J-層のトポス $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J) \subseteq \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ が得られる。この形のトポスは **Grothendieck トポス**と呼ばれ、初等トポスよりも良い性質を多く持つ。

実効トポス・実現可能性トポス

計算論と関係する初等トポスを軽く紹介する[1]。

実効トポスは Kleene の第 1 代数 K_1 から作られるトポスであり、その内部論理によって計算可能数学の宇宙と見なされる。より一般に、任意の部分結合子代数（partial combinatory algebra, Schönfinkel algebra）から実効トポスと同様の構成で得られる**実現可能性トポス**というクラスもある。Grothendieck トポスでない初等トポス（w/ 自然数対象）の代表例！

最近の木原貴行氏の研究により、実現可能性トポスに付随するトポス理論的な概念（e.g. Lawvere–Tierney 位相）の計算論の言葉への書き換えが推し進められている。

[1] Lawvere–Tierney 位相と合わせて 5 日目の木原先生のチュートリアルで扱われるはず

具体的なトポスの内部論理

(1) $\mathbf{Set}^P$ における一階の $\mathcal{L}$-構造は IQC の Kripke モデルを少し一般化したもの。後で見るように強制関係 $\Vdash$ はトポス構造から復元できる。

$$\varphi \text{ が一階 } \mathcal{L}\text{-論理式なら} \quad \mathbf{Set}^P \models \text{“}M \models \varphi\text{”} \iff \forall p \in P, p \Vdash \varphi$$

(2) X 上の連続函数の層 C に対し、$[\![x = y]\!] : C \times C \to \Omega$ の各成分は

$$\begin{array}{ccc} C(U) \times C(U) & \longrightarrow & \Omega(U) = \downarrow(U) \\ \uplus & & \uplus \\ (f, g) & \mapsto & \text{“}f = g \text{ となる最大の開集合”} \end{array}$$

(3) 3 点集合 3 に $\mathcal{O}(3) = \{\, 0, \{2\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, 3 \,\}$ で位相を入れる。F を

$$0 \mapsto \{*\},\ \{2\} \mapsto \{f, g\},\ \{0, 2\} \mapsto \{f\},\ \{1, 2\} \mapsto \{g\},\ 3 \mapsto \varnothing$$

とおけばこれは層になり well-supported（各 stalk が non-empty）だが大域切断 $1 \to F$ を持たない。よって、$\mathbf{Sh}(3)$ では (external) AC が成り立たない。

Global Truth の不便さ

上で言及したように、$\mathbf{Set}^P$ と一階論理式 φ についてすら、$\mathbf{Set}^P \models \varphi$ という関係を簡単な記述することはできない。

$\mathrm{Sub}(A) \cong \mathrm{Hom}(1, PA)$ で $S \rightarrowtail A$ に対応する $\{S\}\colon 1 \to PA$ について、

$$\mathcal{E} \models \forall s^{\mathsf{PA}} \varphi(s) \quad \not\Leftrightarrow \quad \text{任意の } S \rightarrowtail A \text{ について } \mathcal{E} \models \varphi(\{\mathsf{S}\})$$

$\mathbf{Set}$ は“1 で生成される”ので、部分集合と“PA の global element”が対応する。一方、一般の $\mathcal{E}$ の内部論理で集合論的な議論をしようとしても、$\exists x \in X$ の解釈を与えるのに X の global element だけでは不十分。

そこで“generalized element”を用いた forcing 的な意味論を導入すると、様々な具体例において論理式がどのくらい成り立つを計算しやすくなって便利。（cf. $\mathcal{L}_\in$-論理式 φ がジェネリック拡大 $M[G]$ で成り立つのを調べるのに、直接 $M[G]$ 上の $\in$-関係で計算するのではなく、truth lemma によって強制関係 $p \Vdash \varphi$ に翻訳して議論する）

Kripke–Joyal 意味論

Definition (Kripke–Joyal 意味論; Local Truth, cf. [SGL, §VI.5–7])

$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$-論理式 $\varphi\colon \mathsf{A} \to \Omega$ と射 $\alpha\colon U \to A$ に対し、

$$
U \Vdash \varphi(\alpha) \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad
\begin{tikzcd}
 & \llbracket \varphi \rrbracket \arrow[d, tail] \\
U \arrow[ur, dashed, "\exists"] \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowright"] & A
\end{tikzcd}
$$

ここで $\varphi(\alpha)$ は φ の変数に α を形式的に代入した表現であって、函数記号「$\ulcorner\alpha\urcorner$」を含む論理式ではない。

global truth と local truth は互いに翻訳することができる：

$$
\begin{aligned}
U \Vdash \varphi(\alpha) &\iff \mathcal{E} \models \forall u^{\mathsf{U}}(\varphi \circ \ulcorner\alpha\urcorner \circ u) \\
\mathcal{E} \models \forall x^{\mathsf{A}}\varphi &\iff A \Vdash \varphi(\mathrm{id}_A)
\end{aligned}
$$

特に $\varphi\colon 1 \to \Omega$ のとき　$\mathcal{E} \models \varphi \iff 1 \Vdash \varphi$

Kripke–Joyal 意味論 (continued)

Lemma

Monotonicity $U \Vdash \varphi(\alpha)$ および $p \colon V \to U$ について、$U \Vdash \varphi(\alpha p)$

Local character $p \colon V \twoheadrightarrow U$ がエピ射で $V \Vdash \varphi(\alpha p)$ ならば、$U \Vdash \varphi(\alpha)$

Proposition

論理式 $\theta \equiv \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \neg\varphi, \varphi \to \psi, \exists y\varphi, \forall y\varphi$ に対する関係 $U \Vdash \theta(\alpha)$ は、φ, ψ に対する $\Vdash$ 関係を用いて表現できる。例えば、

- $U \Vdash \varphi(\alpha) \vee \psi(\alpha)$ iff 射 $p \colon V \to U$, $q \colon W \to U$ が存在して、$p + q \colon V + W \twoheadrightarrow U$ がエピ射かつ $V \Vdash \varphi(\alpha p)$ かつ $W \Vdash \psi(\alpha q)$
- $U \Vdash \neg\varphi(\alpha)$ iff 任意の $V \not\cong 0$, $p \colon V \to U$ について $V \nVdash \varphi(\alpha p)$
- $U \Vdash \exists y\varphi(\alpha, y)$ iff エピ射 $p \colon V \twoheadrightarrow U$ と $\beta \colon V \to B$ が存在して、$V \Vdash \varphi(\alpha p, \beta)$

したがって、$1 \Vdash \varphi$ を示すためには、φ の構成に沿って
$U \Vdash$ “subformula of φ” の形の議論に帰着させていけばよい。

Sheaf Semantics I: 前層圏の場合

$\mathcal{E}$ が具体的なトポスの場合を考えていこう。

$\mathcal{E} = \mathbf{Set}^{P^{\mathrm{op}}}$ のとき、$p \in P$ に対し表現可能前層 $\mathbf{y}(p) = \mathrm{Hom}_P(-, p)$ についての $\mathbf{y}(p) \Vdash \varphi(\alpha)$ を単に $p \Vdash \varphi(\alpha)$ と書く。ここで米田の補題より $\alpha\colon \mathbf{y}(p) \to A$ は $\alpha \in A(p)$ と同一視できる。

$\mathbf{Set}^{P^{\mathrm{op}}}$ での KJ 意味論について次が成り立つ：

- $p \Vdash \varphi(\alpha) \vee \psi(\alpha)$ iff $p \Vdash \varphi(\alpha)$ または $p \Vdash \psi(\alpha)$
- $p \Vdash \neg\varphi(\alpha)$ iff 任意の $q \leq p$ について $q \nVdash \varphi(\alpha|_q)$
- $p \Vdash \exists y \varphi(\alpha, y)$ iff ある $\beta \in B(p)$ が存在して $p \Vdash \varphi(\alpha, \beta)$

これは直観主義論理に対する Kripke 意味論や、（より一般の $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ に拡張したうえで）モデル理論における有限強制と関わりがある。

Sheaf Semantics II: 完備 Heyting 代数上の層トポスの場合

$\mathbf{Sh}(H)$ のときも、$U \in H$ が表現する層 $\mathbf{y}U = \mathrm{Hom}_H(-, U)$ についての $\mathbf{y}U \Vdash \varphi(\alpha)$ を $U \Vdash \varphi(\alpha)$ と書き、$\alpha \colon \mathbf{y}U \to A$ と $\alpha \in A(U)$ を同一視する。

$\mathbf{Sh}(H)$ での KJ 意味論について次が成り立つ：

- $U \Vdash \varphi(\alpha) \vee \psi(\alpha)$
  iff ある被覆 $U = V \cup W$ が存在して、$V \Vdash \varphi(\alpha|_V)$ かつ $W \Vdash \psi(\alpha|_W)$
- $U \Vdash \neg\varphi(\alpha)$ iff 任意の $0_H \lneq V \leq U$ について $V \nVdash \varphi(\alpha|_V)$
- $U \Vdash \exists y \varphi(\alpha, y)$
  iff ある被覆 $U = \bigcup_i V_i$ と $\beta_i \in B(V_i)$ が存在して、$V_i \Vdash \varphi(\alpha|_{V_i}, \beta_i)$

これは Heyting 値モデル V^H を用いた強制法との関わりがある。

Sheaf Semantics III: Cohen トポスの場合

$\mathbf{Sh}(P, \neg\neg)$ の KJ 意味論については次が成り立つ：

- $p \Vdash \varphi(\alpha) \vee \psi(\alpha)$ iff $\forall q \leq p,\ \exists r \leq q,\ r \Vdash \varphi(\alpha|_r)$ or $r \Vdash \psi(\alpha|_r)$
- $p \Vdash \neg\varphi(\alpha)$ iff 任意の $q \leq p$ について $q \nVdash \varphi(\alpha|_q)$
- $p \Vdash \exists y \varphi(\alpha, y)$ iff $\forall q \leq p,\ \exists r \leq q,\ \exists \beta \in B(r),\ r \Vdash \varphi(\alpha|_r, \beta)$

この場合は、Cohen の強制法に関わりがある。$\mathbf{Sh}(P, \neg\neg)$ は Boolean トポスになっているので、ほぼ ZF のモデルと見なすことができる。

$\rightsquigarrow$ 連続体仮説を満たさないトポスの構成など（cf. [SGL, Chap. VI]）