圏論的論理学の拡がり

荒武 永史

京都大学数理解析研究所

2023 年 2 月 23 日@Logic Winter School 2023

Contents

Contents

自然数対象

基数概念が現れない純粋に集合についての命題（e.g. Cantor–Bernstein, 対角線論法など）は任意のトポスで解釈できるが、算術の命題を解釈するためには自然数対象の存在を仮定する。

Definition

$\mathcal{E}$ におけるデータ $1 \xrightarrow{\mathrm{zero}} N \xrightarrow{\mathrm{succ}} N$ が次の普遍性を持つとき、
$(N, \mathrm{zero}, \mathrm{succ})$ を**自然数対象** (natural number object; NNO) と言う。

$$
\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "\mathrm{succ}"] \arrow[d, dashed, "\exists ! h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & N \arrow[d, dashed, "\exists ! h"] \\
1 \arrow[ur, "\mathrm{zero}"] \arrow[r, "\forall x"'] & X \arrow[r, "\forall f"'] & X
\end{tikzcd}
$$

帰納的に $h(n) = f(\cdots(f(x))\cdots)$ (n-times) が定義できることを表す。

トポスにおける数学

トポスを“集合の宇宙”と見なして内部論理で数学を展開する

- 高階論理（型付き！）で表現できる範囲という制限はつく
- 排中律や選択公理は成り立つとは限らない

構成的数学と相性がいいが、非可述的な操作（分離公理, 冪など）も許される。近年では可述的トポスの研究も進められている。

トポスで常に成り立つこと（w/o NNO）

- 対角線論法, $\neg\exists(A \twoheadrightarrow PA)$ 版の Cantor の定理
- 完備束の自己単調写像は不動点を持つ（Knaster–Tarski）

直観に反する現象の具体例

- $A \cong A^A$ なる非自明な対象が存在しうる
- 実効トポスでは N^N が N の subquotient になる

トポスにおける排中律

Recall: $\mathcal{E}$ が Boolean $\iff \mathcal{E} \models \forall p^{\Omega}(p \vee \neg p)$
任意の $\mathcal{E}$ から**二重否定位相** $\neg\neg\colon \Omega \to \Omega$ を使って Boolean 部分トポス $\mathcal{E}_{\neg\neg} \subseteq \mathcal{E}$ を切り出せる。$\mathbf{Sh}(P, \neg\neg) \subseteq \mathbf{Set}^{P^{\mathrm{op}}}$ はその一例。

Definition

$\mathcal{E}$ が **De Morgan 則**を満たす $\overset{\text{def.}}{\iff} \mathcal{E} \models \forall p^{\Omega}\forall q^{\Omega}[\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)]$

もう一方の De Morgan 則 $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ は常に成立。

Proposition (cf. Johnstone, Stone Spaces, §III.3)

(1) 位相空間 X に対し、$\mathbf{Sh}(X)$ が De Morgan 則を満たす
$\iff X$ は extremally disconnected、i.e. 開集合の閉包が再び開

(2) 任意の $\mathcal{E}$ に対し、De Morgan 則を満たす $\gamma\mathcal{E}$ および幾何的全射 $\gamma\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ であって "minimal" なものが存在（Gleason cover）

Boole 代数 B のスペクトラム $\mathrm{Spec}(B)$ が ext. disc. $\iff B$ が完備で、cpt. Haus. 空間 X の $\mathbf{Sh}(X)$ の Gleason cover は $\mathbf{Sh}(\mathrm{Spec}(\mathrm{RO}(X)))$

トポスにおける選択公理

external/internal Axiom of Choice を次で定義：

(EAC) 任意のエピ射が分裂エピ射

変数 $x : \mathsf{A}$, $y : \mathsf{B}$, $f : \mathsf{B}^{\mathsf{A}}$, $g : \mathsf{A}^{\mathsf{B}}$ について

$$\textbf{(IAC)} \qquad \mathcal{E} \models \forall f[\forall y \exists x(fx = y) \to \exists g \forall y(fgy = y)]$$

これらの間には

$$\text{(EAC)} \Rightarrow \text{(IAC)} \Rightarrow \text{Boolean}$$

が成り立つ。後者の ⇒ は Diaconescu の定理（Goodman–Myhill の定理）。(IAC) を満たさない Boolean トポスもある [Freyd, 1980]

Proposition (Set $\models$ EAC を仮定)

Grothendieck トポス $\mathcal{E}$ が EAC を満たす
$\iff$ IAC を満たす $\iff$ ∃完備 Boole 代数 B, $\mathcal{E} \simeq \mathbf{Sh}(B)$

トポスにおける算術と有限性

トポスにおける自然数対象 N は標準的な解釈の下で Heyting 算術 HA のモデルになる[1]。特に N は算術的帰納法を満たす。cf. Lambek & Scott

一方、N がどの程度の "semi-classical arithmetic" を満たすかは非自明である。最近の中田哲さんの研究 (preprint) によって、実効トポスの部分トポスの NNO において Σ_n-LEM, Σ_n-DNE などがどの程度満たされるかについて進展があった。ここではトポス理論的な手法が用いられている。

また、NNO を用いれば様々な有限性の概念を定義することができる。AC なしの ZF 集合論上ですら、有限性の種々の定義が同値でなくなるのを鑑みると、トポスにおける有限性の取り扱いがより繊細な問題になることは容易に想像できるだろう。

$\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$ における有限集合 [Elephant D5.2.8, 5.4.14]

- 有限基数 $= F : \mathcal{C} \to \mathbf{FinSet}$ であって $\mathcal{C}$ の連結成分上で一定なもの
- Kuratowski 有限集合 $= F : \mathcal{C} \to \mathbf{FinSet}_{\mathrm{surj}}$

[1]Grothendieck トポスでは Peano 算術 PA のモデルになる。

トポスにおける実数

$L < U \in P\mathbb{Q}$ で適切な条件を満たす組 (L, U) について、

Dedekind 実数 $x < y \to (x \in L) \vee (y \in U)$

MacNeille 実数 $[x < y \wedge y \notin U \to x \in L] \wedge [x < y \wedge x \notin L \to y \in U]$

Dedekind 実数環 $\mathbb{R}_d$・MacNeille 実数環 $\mathbb{R}_m$

- Cauchy 実数の集合 $\mathbb{R}_c$ を適切に定義すると $\mathbb{R}_c \subseteq \mathbb{R}_d \subseteq \mathbb{R}_m$
- $\mathbb{Q}$ は常に体だが、$\mathbb{R}_d, \mathbb{R}_m$ は $\forall x[x = 0 \vee \exists y(xy = 1)]$ を満たすとは限らない。直観主義論理上でこれと同値にはならない体の公理 $\neg\exists y(xy = 1) \to x = 0$ は満たされる。
- $\mathbb{R}_m$ は局所環とも限らない。
  $\mathbb{R}_d$ は分離実閉局所環 [Kock–Johnstone, 1979], [Joyal–Reyes, 1986]
- $x \le y \nrightarrow (x < y) \vee (x = y)$ や $\neg\forall x, y[x \le y \vee y \le x]$ の可能性がある
- $\mathbb{R}_m$ は順序完備。$\mathbb{R}_d$ が順序完備（$\mathbb{R}_d = \mathbb{R}_m$）$\iff$ $\mathcal{E}$ が De Morgan
- 空間 X 上の $\mathbb{R}$ 値連続函数の層 C は $\mathbf{Sh}(X)$ の $\mathbb{R}_d$ [SGL, §§VI.8–9]
- 実効トポスでは Brouwer の定理（全ての函数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続）が成立

トポスにおける実数 (continued)

- $\mathbf{Sh}(\mathbb{R})$ では $\mathbb{R}_c \subsetneq \mathbb{R}_d$ [Fourman–Hyland, 1977]
- $\mathbb{R}_d$ が局所コンパクトとは限らない（ただし $\mathbf{Sh}(X)$ では loc. cpt.）

トポスにおける空間概念はうまく振る舞わないことが多いので、その代わりに formal space [Fourman–Grayson, 1982] や locale といった "point-free space" を考えるのも重要。例えば "locale of formal reals" $\mathbb{R}_\ell$ は常に（locale の意味で）局所コンパクトかつ $\mathrm{pt}(\mathbb{R}_\ell) \cong \mathbb{R}_d$ [Johnstone, Stone Spaces, Chap. IV]

実数関連に限らず point-free topology は構成的数学やトポスの内部論理と相性がよく、例えば locale 版の Tychonoff の定理（コンパクト空間の直積はコンパクト）は任意のトポスで成り立つ。

幾何学への応用

前層圏や層の圏における代数は T-$\mathbf{Alg}$ への函手と見なせる。

$$T\text{-}\mathbf{Alg}([\mathcal{C}, \mathbf{Set}]) \simeq [\mathcal{C}, T\text{-}\mathbf{Alg}]$$

$$T\text{-}\mathbf{Alg}(\mathbf{Sh}(X)) \subseteq [\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}}, T\text{-}\mathbf{Alg}]$$

幾何学では後者、特に環の層や加群の層が重要な役割を果たす。例えば、スキームはある種の局所環付き空間（=位相空間+局所環の層）である。

そこで、幾何学で現れる代数の層を内部論理で調べる試みがある。

- Serre–Swan の定理のトポス理論的証明 [Mulvey, 1974]
- スキーム上の準連接層への応用 [Blechschmidt]

他のタイプの幾何学との関連として、manifold を含む「空間の圏」と見なせるようなトポスを用いる綜合微分幾何学などもある。

また代数の層表現を通して、代数の性質と層トポスの内部論理の関連性を示唆する研究もある。（e.g. Macintyre, Bunge & Reyes: von Neumann 正則環の Pierce 表現とモデル完全性）

トポス量子論への応用

Example (Heunen–Landsman–Spitters, 2009)

単位的非可換 C^*-環 A に対し、$\mathcal{C}(A)$ を単位的可換部分 C^*-環のなす順序集合とする。$\mathcal{C}(A)$ 上の前層

$$\underline{A}\colon \mathcal{C}(A) \ni C \quad \mapsto \quad C \in \mathbf{Set}$$

を A の **Bohrification** と言う。また、前層圏 $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}(A)}$ を $\mathcal{T}(A)$ で表すと、$\underline{A}$ は $\mathcal{T}(A)$ の内部論理で可換 C^*-環になる。

$\mathcal{T}(A)$ の内部論理で $\underline{A}$ の Gelfand スペクトラム $\underline{\Sigma}(\underline{A})$（古典的には極大イデアル全体）を取ると、$\mathcal{T}(A)$ におけるコンパクトハウスドルフ空間になっている。この $\underline{\Sigma}(\underline{A})$ を前層 $\mathcal{C}(A) \to \mathbf{Set}$ として初等的に記述することで、量子状態空間を得る。

この構成の背景には、圏論・トポス理論の深いトピックがある

- locale による point-free topology（リンク先参照）
- 構成的 Gelfand 双対性 (by Banaschewski–Mulvey)
- topos-internal locale theory (by Joyal–Tierney)

Contents

トポスの集合論的構成

集合論のモデル構成をトポスでエミュレートできる。強制法は

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{Set}^{P^{\mathrm{op}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{Sh}(\mathcal{L}(P)) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{Sh}(P, \neg\neg) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{Sh}(\mathrm{RO}(\mathcal{L}(P)))
\end{array}
$$

より直接的に集合論的なデータを用いて定義できる **Heyting 値集合のトポス $\mathbf{Set}(H)$** もある [Higgs, 1984], [Fourman–Scott, 1979]（$\rightsquigarrow$ 付録）

位相群 G から作られる permutation model は、連続 G-作用を持つ離散集合のトポス $\mathbf{Cont}(G)$ と概ね対応する。

なお、任意の Grothendieck トポスは $\mathbf{Cont}(\mathrm{Aut}(\mathbb{N}))$ のある“強制拡大”に埋め込むことができる（Freyd の表現定理）

トポスは集合論の代替となり得るか？

集合論のモデル $(V, \in)$ から集合と写像の圏としてトポスを作るのは容易。また、Heyting 値モデル V^H から $\mathbf{Set}(H)$（well-pointed でない！）を構成することもできる。

ではトポスから集合論のモデルを作るのはどうか？ 例えば CH を満たさないトポスから CH を満たさない ZFC のモデルを直接構成できないか？

高階論理と集合論の大きな違い

- 集合論では**クラス上の関係** $=, \in$ を考える。高階論理ではこれに相当するものはない（$=_\mathsf{A}, \in_\mathsf{A}$ しか使えない）。
- 高階論理では全ての量化 $\exists x, \forall x$ に型が付いているのに対し、集合論では**全ての集合に渡る量化（非有界量化）**が許されている。

cf. Lawvere の Elementary Theory of the Category of Sets：$\mathbf{Set}$ の圏論的な特徴づけ

トポスを用いた集合論の解釈

トポスからモデルを作る最初の試みは、Cole, Mitchell, Osius による。well-pointed なトポス $\mathcal{E}$（w/ NNO & EAC）から、集合の中身を表現するような“木”全体のクラスに適切に $\in$ を定めると**有界 Zermelo 集合論**（分出公理を有界論理式に制限）のモデルができる（cf. [SGL, §VI.10]）。

それに続くアプローチはいろいろある。

- 余完備トポスの中で累積的階層 for IZF を構成（Fourman, Hayashi）
- ZFA の Boole 値モデルを“表現する”部分トポスの構成（Blass–Scedrov）
- 代数的集合論（Joyal–Moerdijk）：“クラスの圏”と“小ささの概念”を与えた状況で、累積的階層を Zermelo–Fraenkel 代数として構成
- トポスに directed structural system of inclusions を付加して（非）整礎集合論を解釈する（Awodey–Butz–Simpson–Streicher）
- Shulman's stack semantics：KJ 意味論をさらに圏の対象全体を渡る量化などを許すように拡張した意味論。Shulman は同論文で弱い集合論のモデルと pretopos の関係も議論している。

トポスの variant

- pretopos = effective (Barr-exact) かつ positive な整合圏（cf. Shulman's work）
- 準トポス（quasitopos）
= 有限余完備 + LCCC + strong subobject classifier
$\rightsquigarrow$ "anafunction" を map とする内部論理
- predicative topos
- ∞-topos $\rightsquigarrow$ ホモトピー型理論のモデル

Grothendieck トポスに exact に対応するような集合論（$\implies \mathbb{N} \models \mathrm{PA}$）はおそらく知られていないが、Grothendieck トポスから IZF(A) のモデルを作る方法はいくつかある [Grayson 1979] by Heyting-valued sets, [Streicher] by general sheaf toposes, [Gambino 2005, 2006] for CZF

Heyting 値集合

Definition ([Higgs 1984], [Fourman–Scott 1979])

H-**値集合**とは、集合 A と写像 $\|\cdot = \cdot\| : A \times A \to H$ の組で

- $\forall a, b \in A,\ \|a = b\| = \|b = a\|$
- $\forall a, b, c \in A,\ \|a = b\| \wedge \|b = c\| \leq \|a = c\|$

$\|a = b\| \in H$ は“a と b がどの程度等しいか”を表す。

空間 X 上の連続函数の層 C による $x = y$ の解釈 $C(U) \times C(U) \to \downarrow(U)$ を合わせて、$\mathcal{O}(X)$-値集合を得る：

$$\coprod_U C(U) \times \coprod_U C(U) \to \mathcal{O}(X)$$

適切な方法で H-値集合の圏 $\mathbf{Set}(H)$ を定めると $\mathbf{Sh}(H)$ と圏同値。よって、これらの内部論理は本質的に等価である（cf. [Aratake 2021]）。

Heyting 値意味論

H-値集合 A の元についての述語 $\varphi(x)$ の解釈は、次のような H での具体的な計算で求められる。

$$\|\exists x \varphi(x)\| = \bigvee_{a \in A} \|\varphi(a)\|,$$
$$\|\forall x \varphi(x)\| = \bigwedge_{a \in A} (\|a = a\| \to \|\varphi(a)\|).$$

これを用いると内部論理での真偽や強制関係を捉え直せる：

$$\mathbf{Set}(H) \models \forall x^{\mathsf{A}} \varphi \iff \forall a \in A, \|\varphi(a)\| = \|a = a\|$$
$$U \Vdash \varphi(a) \iff \|\varphi(a)\| \geq U$$

圏論的論理学	Kripke–Joyal 意味論	Heyting 値意味論
集合論	強制法	Heyting 値モデル

なお、集合論では $\|a = a\| = 1$ であるような H-値集合のみを考える。

Contents

古典一階理論

この後は便宜上**古典一階理論**について議論する。

- 構文圏 $\mathcal{C}_T$ は Boolean 整合圏（Boole 圏）
- Boole 圏 $\mathcal{D}$ に対し T-モデルと初等埋込の圏 $T\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{D})_e$ が

$$T\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{D})_e \simeq \mathbf{Coh}(\mathcal{C}_T, \mathcal{D})$$

- T の Morley 化で得られる整合理論 T_m について、

$$\mathcal{C}^{\mathrm{coh}}_{(T_m)} \simeq \mathcal{C}^{\mathrm{cfo}}_T$$

理論の翻訳

T, T' をそれぞれ $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$-理論とする。

Definition

T から T' への**前翻訳** I は以下のデータから成る：

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{L}\text{-ソート } A & \rightsquigarrow & \text{組 } (\partial^I_A, \Delta^I_A) \\
 & & \begin{cases} \partial^I_A : \mathcal{L}'\text{-論理式} \\ \Delta^I_A : \partial^I_A \text{ 上の } T'\text{-同値関係} \end{cases} \\
\mathcal{L}\text{-関係記号 } R \rightarrowtail \bar{A} & \rightsquigarrow & \Delta^I_{\bar{A}}\text{-不変な } \mathcal{L}'\text{-論理式 } R^I \subseteq \partial^I_{\bar{A}} \\
\mathcal{L}\text{-函数記号 } f\colon \bar{A} \to B & \rightsquigarrow & \mathcal{L}'\text{-論理式 } \Gamma^I_f \subseteq \partial^I_{\bar{A}B} \text{ s.t. } \Gamma^I_f \text{ は} \\
 & & \text{“射 } \partial^I_{\bar{A}}/\Delta^I_{\bar{A}} \to \partial^I_B/\Delta^I_B \text{ を誘導する”}
\end{array}
$$

I は写像 $\varphi \mapsto \varphi^I \subseteq \partial^I_{\bar{A}}$ を誘導する。

理論の翻訳 (continued)

Definition (Hodges, 1993, §5.4)

前翻訳 I が次を満たすとき、**翻訳**といい $I\colon T \to T'$ と表す：

$$\text{任意の}\ \varphi \in T\ \text{に対し}\ T' \models \varphi^I$$

適当な商集合を用いて、T'-モデルから T-モデルが誘導される。

Examples

(1) 公理系の拡大 $T \subseteq T'$、すなわち公理の追加。

(2) 複素数体 $\mathbb{C}$ の公理系は（原理的には）実数体 $\mathbb{R}$ の公理系に帰着できる。より一般に任意の実閉体 R に対して、$\mathbb{C}$ と同様の方法で R^2 に演算を入れることで代数閉体が得られる。（ACF_0 から RCF への翻訳）

(3) 代数閉体 k に対して、射影空間 $\mathbb{P}^n_k$ は $k^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ の商空間として得られる。（“射影空間の公理系” から ACF への翻訳）

構文圏のプレトポス完備化

実は $\mathcal{C}_T$ は理論 T の圏論的表現としては充分適切でない。

期待される性質

構文圏は圏同値であることは、“理論が似ている”ことと等価

しかし、モデル理論における“Shelah の eq-構成”$T \subseteq T^{\mathrm{eq}}$ については、$\mathcal{C}_T, \mathcal{C}_{T^{\mathrm{eq}}}$ は圏同値とは限らない。また、翻訳 $I\colon T \to T'$ には“論理式の商”のデータが入っているので、整合函手 $\mathcal{C}_T \to \mathcal{C}_{T'}$ が誘導できない。

$\rightsquigarrow$ 構文圏を同値関係について“完備化”する

Theorem (Harnik, 2011)

T に関する弱い条件のもとで、$\mathcal{C}_{T^{\mathrm{eq}}}$ は pretopos で、自然な函手 $\mathcal{C}_T \to \mathcal{C}_{T^{\mathrm{eq}}}$ は pretopos 完備化の普遍性を満たす [a]。

[a] 通常の pretopos 完備化は disjoint coproduct を形式的に付け加えるが、今は同値関係の商を付け加えるだけで充分。

$\mathcal{P}_T := \mathcal{C}_{T^{\mathrm{eq}}}$ を **classifying pretopos** と言う。

翻訳と論理的函手

翻訳 $I\colon T \to T'$ から得られる写像 $\varphi \mapsto \varphi^I \subseteq \partial^I_{\bar{A}}$ から“論理式の商” $\varphi^I/\Delta^I_{\bar{A}}$ を対応させることで、整合函手 $\mathcal{P}_I\colon \mathcal{P}_T \to \mathcal{P}_{T'}$ が誘導される。

さらに、翻訳による T'-モデル M から T-モデル $M|_I$ への対応は、函手 $T'\text{-}\mathbf{Mod}_e \to T\text{-}\mathbf{Mod}_e$ に拡張できる。この函手は $\mathcal{P}_I\colon \mathcal{P}_T \to \mathcal{P}_{T'}$ を用いて次のように表現することができる。

$$
\begin{tikzcd}
T'\text{-}\mathbf{Mod}_e \arrow[rr, "(-)|_I"] \arrow[d, "\wr"] & & T\text{-}\mathbf{Mod}_e \arrow[d, "\wr"] \\
\mathbf{Coh}(\mathcal{P}_{T'}, \mathbf{Set}) \arrow[rr, "(-)\circ \mathcal{P}_I"] & & \mathbf{Coh}(\mathcal{P}_T, \mathbf{Set})
\end{tikzcd}
$$

また、T-モデルとは“T から $\mathbf{Set}$ への翻訳”に他ならない。

翻訳と函手の性質

Definition

- T-モデル M が conservative
  $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の閉論理式 φ について、$M \models \varphi$ ならば $T \models \varphi$
- 翻訳 $I\colon T \to T'$ が conservative
  $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の閉論理式 φ について、$T' \models \varphi^I$ ならば $T \models \varphi$
- 函手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が conservative（同型を反射する）
  $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の射 $f \in \mathcal{C}$ について、Ff が同型射ならば元々 f は同型射

Proposition

(1) T-モデル M が conservative $\iff$ $F_M\colon \mathcal{P}_T \to \mathbf{Set}$ が conservative

(2) $T \subseteq T'$ が保存拡大 $\iff$ 自然な函手 $\mathcal{P}_T \to \mathcal{P}_{T'}$ が conservative

翻訳と函手の性質 (continued)

他にも翻訳（理論の拡大）と函手の性質の対応がある

- 言語を等しくする拡大 $T \subseteq T'$ $\leftrightsquigarrow$ quotient morphism $\mathcal{P}_T \to \mathcal{P}_{T'}$
- $\varphi(x)$ を満たす定数記号の追加はスライス $\mathcal{P}_T \to \mathcal{P}_T / \{x.\varphi\}$ に対応

任意の整合函手は quotient-conservative 分解を持つ [Makkai, 1985]。これはロジックの言葉では次のように表現できる：それぞれ $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ で書かれた理論の拡大 $T \subseteq T'$ に対し、$I\colon \mathcal{P}_T \to \mathcal{P}_{T'}$ の q.-c. 分解は

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & T' \\ & T'|_{\mathcal{L}} \arrow[ur, tail] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{P}_T \arrow[rr, "I"] \arrow[dr, two heads] & & \mathcal{P}_{T'} \\ & \mathcal{P}_{T'|_{\mathcal{L}}} \arrow[ur, tail] & \end{tikzcd}$$

ここで、$T'|_{\mathcal{L}} := \{\, \varphi \,;\, \mathcal{L}$-閉論理式かつ $T' \vDash \varphi \,\}$

理論と構文圏の性質

Definition

整合圏 $\mathcal{C}$ が **two-valued** $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $\mathrm{Sub}(1) = \{0, 1\}$

Proposition

$$T \text{ が完全} \iff \mathcal{C}_T \text{ が two-valued}$$

$$T \text{ が完全} \iff \text{任意の } T\text{-モデルが conservative}$$

に注意すると、当然次の命題が成立する：

Proposition

Boole 圏 $\mathcal{C}$ について、TFAE:

(1) $\mathcal{C}$ は two-valued

(2) 任意の整合函手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ が conservative

論理と圏の等価性

現状で圏論化されているロジック的概念・現象は非常に限定的。

Questions

どのような意味で理論・翻訳は論理的圏・函手と exact に対応するか？

- 理論・モデルの性質はどの程度“圏論的”か？
  - どのような性質が圏同値によって保存されるか？
  - そのような性質は圏論的に特徴づけできるか？
- 理論の構成（e.g. elementary diagram）は圏論的にどのように表現されるか？

そこで等価性を正確に state するためには、“理論の圏”を考えたくなる。

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, bend left, "I"] \arrow[r, bend right, "J"'] & T'
\end{tikzcd}
\longrightarrow
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_T \arrow[r, bend left, "\mathcal{P}_I"] \arrow[r, bend right, "\mathcal{P}_J"'] & \mathcal{P}_{T'}
\end{tikzcd}
$$

理論の双圏 $\mathfrak{Th}$

“理論の圏”を考えようとするとき、次が問題になる：

翻訳 $I\colon T_0 \to T_1$, $J\colon T_1 \to T_2$, $K\colon T_2 \to T_3$ に対して、$(KJ)I$ と $K(JI)$ は翻訳として一致するとは限らない。

一方、$(KJ)I$ と $K(JI)$ はホモトピック（*cf.* Hodges, Chap. 5 §4(c)）である。そこで、翻訳の間のホモトピーを使う。

Theorem

理論・翻訳・ホモトピーは双圏 $\mathfrak{Th}$ を成す。さらに、$\mathfrak{BPretop}_*$ を (small) Boolean pretopos, pretopos functor, 自然同型が成す 2-圏とすると、先述の対応は擬函手 $\mathfrak{Th} \to \mathfrak{BPretop}_*$ に拡張されて**双圏同値**を与える。

$$\mathfrak{Th} \qquad\qquad\qquad \mathfrak{BPretop}_*$$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, bend left, "I"] \arrow[r, bend right, "J"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow h"] & T' \end{tikzcd} \longrightarrow \begin{tikzcd} \mathcal{P}_T \arrow[r, bend left, "\mathcal{P}_I"] \arrow[r, bend right, "\mathcal{P}_J"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mathcal{P}_h"] & \mathcal{P}_{T'} \end{tikzcd}$$

理論の森田同値と双翻訳可能性

Definition

理論 T, T' が**双翻訳可能** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 翻訳 $I\colon T \to T'$, $J\colon T' \to T$ が存在して $JI \simeq \mathrm{id}_T$, $IJ \simeq \mathrm{id}_{T'}$（ホモトピック）

双翻訳可能性は「双圏 $\mathfrak{Th}$ の中における同値」になっている。したがって、双圏同値を通して次が得られる：

Corollary

理論 T, T' について、次は同値：

(1) T, T' は双翻訳可能
(2) $\mathcal{P}_T \simeq \mathcal{P}_{T'}$（森田同値）

理論の森田同値の特徴づけは哲学の文脈 [Barrett–Halvorson 2016], [Tsementzis 2017], [Halvorson–Tsementzis 2017] で議論されていたが、2-圏的な見方をすればすでにモデル理論でよく知られている双翻訳可能性と一致することがわかった。

分類トポス

異なる論理で書かれた理論を比較するにはどうすればいいか？

整合圏 $\mathcal{C}_T$ 上に適当な被覆 J_T を与えると、J_T-連続な平坦函手 $F\colon \mathcal{C}_T \to \mathcal{E}$ は整合函手に他ならず、さらに**トポスの幾何的射** $\mathcal{E} \to \mathbf{Sh}(\mathcal{C}_T, J_T)$ が得られる。

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sh}(\mathcal{C}_T, J_T) \arrow[dr, dashed, shift left] & \\
\mathcal{C}_T \arrow[u, "\mathbf{ay}"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{E} \arrow[ul, dashed, shift left]
\end{tikzcd}$$

論理断片に合わせて J_T を適切に構成すれば、次の圏同値が得られる：

$$T\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{E}) \simeq \mathbf{ConFlat}_{J_T}(\mathcal{C}_T, \mathcal{E}) \simeq \mathbf{Geom}(\mathcal{E}, \mathbf{Sh}(\mathcal{C}_T, J_T))$$

ここで $\mathbf{Geom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は幾何的射と幾何的変換の圏。このような普遍性を持つトポスを **T の分類トポス**といい、$\mathbf{Set}[T]$ で表す。

分類トポス (continued)

命題論理で言えば、Lindenbaum 代数 L_T のイデアル完備化 $\mathrm{Idl}(L_T)$（上の層トポス）を取ることに相当する。

等式理論 T の構文圏 $\mathcal{C}_T^{\mathrm{eqn}}$ および整合理論と見なしたときの構文圏 $\mathcal{C}_T^{\mathrm{coh}}$ は圏同値にならないが、各々から作られた分類トポスは圏同値になる。

分類トポスはモデル理論的な情報のコアになっている。

- Makkai: 完全性定理、conceptual completeness、定義可能性、圏の埋め込み定理とタイプ排除
- Blass & Scedrov: Boolean coherent classifying topos と理論の可算範疇性、existentially closed model/finite-generic model の分類トポスの構成
- Caramello: 理論の性質と分類トポスの性質の関連、Fraisse 構成の圏論的一般化、可算均質モデルの自己同型群についてのガロア理論 etc.

Gödel の完全性定理

Theorem

整合圏 $\mathcal{C}$ に対し、整合函手の集合 $\{F_i : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}\}_{i \in I}$ で jointly conservertive なものが存在。すなわち、

$$\forall i,\ F_i(f) \text{ が同型射} \implies f \text{ 自身が同型射}$$

これは整合トポスについての Deligne の定理を言い換えたもの（cf. [SGL, §§IX.11, X.7]）

Recall

$\mathcal{C}_T$ は T からの証明可能性の情報を持つ：

$$T \vdash \varphi \iff \text{射 } \varphi \rightarrowtail \{\boldsymbol{x}.\top\} \text{ が同型射}$$

Deligne の定理を T の分類トポスに適用する（あるいは上の Theorem を $\mathcal{C}_T$ に適用する）ことで、Gödel の完全性定理が得られる。