代数曲線上のチェビシェフの偏り

小山　信也　(東洋大理工)[*1]
田中　花菜　(尾瀬高等学校)[*2]

概　　要

チェビシェフが 19 世紀に指摘した「素数の偏り」が代数曲線上にも存在することを深リーマン予想の下で示し，実例を考察した．

1 「チェビシェフの偏り」とは

チェビシェフは「4 で割って 3 余る素数」が「4 で割って 1 余る素数」に比べて多く存在するように見えることを指摘した．実際，自然数 q に対し，$p \equiv a \pmod q$ なる x 以下の素数 p の個数を $\pi(x;\, q,\, a)$ とおくとき，大多数の x が不等式 $\pi(x;\, 4,\, 3) - \pi(x;\, 4,\, 1) \geq 0$ を満たすことが，数値計算で確かめられる．

しかし，正の実数全体に占める集合 $A = \{x > 0 \mid \pi(x;\, 4,\, 3) - \pi(x;\, 4,\, 1) > 0\}$ の自然密度 $\mu(A) = \lim_{X\to\infty} \mu(A \cap [2, X])$ は収束しないことが，一般リーマン予想下で示されており，偏りは A の自然密度では解明し得ない謎とされている．

1994 年，Rubinstein-Sarnak は，一般リーマン予想と線形独立予想（L 関数の虚部の代数的独立性）の仮定下で集合 A の対数密度が 0.9959... に収束することを示した．以来，「不等式が成り立つ区間の対数密度が 0.5 を上回ること」が「偏り」の定義とされてきたが，不等式が成り立つ区間の長さのみに注目するこの方法は，偏りの大きさ（差の評価）を無視しており，真実を表しているとは言い難い．

2021 年，小山 [1] はこの問題を解消し，チェビシェフの偏りを漸近式

$$\pi_{\frac{1}{2}}(x;\, 4,\, 3) - \pi_{\frac{1}{2}}(x;\, 4,\, 1) = \frac{1}{2}\log\log x + O(1) \qquad (x \to \infty) \tag{1}$$

で定式化し，深リーマン予想 (L 関数のオイラー積の中心点における収束) 下で，その成立を証明した．ここで，$\pi_s(x;\, q,\, a) = \sum_{\substack{p<x:\,\text{素数} \\ p\equiv a \pmod q}} p^{-s} \quad (s \geq 0)$ は個数関数に重みを付け，小さな素数ほど重く見ることで「出現のタイミング」を記述可能にしたものである．

2 一般化と主定理

漸近式 (1) は深リーマン予想（DRH）の成立が期待される広範な L 関数に拡張でき，さまざまな局面において，対応する L 関数の DRH の下で，以下の「偏り」が発見された．

(A) 代数体のアーベル拡大において，「完全分解しない素イデアル」が持つ偏り．および

[*1] 350-8585 川越市鯨井 2100 東洋大学理工学部
[*2] 378-0301 群馬県沼田市利根町平川 1406

本研究は，2023 年度東洋大学井上円了記念研究助成金の助成を受けたものである．

「単項でない素イデアル」が持つ偏り（[2]）

(B) (A) の正標数類似は，DRH の仮定なしで成立（[2]）

(C) Ramanujan のタウ関数 $\tau(p)$（p は素数）のうち「正のもの」が持つ偏り（[3]）

(D) 正標数の楕円曲線のガロア表現 ρ による $\mathrm{tr}(\rho(\mathrm{Frobenius}\ 元))$ の符号の偏り（[4]）

本研究では (D) の一般化を扱う．C を大域体 K 上の代数曲線，素点 v の剰余体を k_v，$\#k_v = q_v$ とおく．$a_v = q_v + 1 - \#C(k_v)$ の符号の偏りが，以下のように記述される．

定理　C の（正規化された）Hasse-Weil 型 L 関数 $L(s, C)$ の DRH の仮定下で

$$\sum_{q_v \le x} \frac{a_v}{q_v} = -\left(\frac{\delta(C)}{2} + m\right) \log\log x + O(1) \quad (x \to \infty) \tag{2}$$

が成り立つ．ただし $\delta(C) = -\mathrm{ord}_{s=1} L^{(2)}(s, C)$ （$L^{(2)}(s, C)$ は 2 次モーメント L 関数）であり，$m = \mathrm{ord}_{s=1/2} L(s, C)$ である．

例（種数 3 の代数曲線の例）　$K = \mathbb{Q}$ 上の 4 次フェルマー曲線 $x^4 + y^4 = z^4$ の場合，各素数 p に対する $\#C(\mathbb{F}_p)$ を Davenport-Hasse の定理を用いて計算できる [5, 例 6.2.3]．これを用いて以下のように偏りが数値計算で確かめられる．(2) の左辺を S_x とおく．

x	100	200	300	400	500	600	700
S_x	0.5567	3.3412	-0.1160	0.2871	5.9287	6.0637	6.0438
$\#\{p \mid a_p > 0\}$	6	9	13	19	24	27	29
$\#\{p \mid a_p < 0\}$	5	12	16	18	20	24	30

$a_p > 0$ および $a_p < 0$ となる素数 p の個数は，ほぼ同数であるにもかかわらず，S_x は正で微増する傾向にある．これは，$a_p > 0$ なる p が早めに出現していること，すなわち「正への偏り」を表していると思われる．本結果は，奥村 [6] による「奇素数次フェルマー曲線の場合の正への偏り」の類似例になっている．

参考文献

[1] 小山信也：「チェビシェフの偏り」の解明と一般化（講演） 代数的整数論研究集会，数理解析研究所 2021 年 12 月 16 日．https://youtu.be/8poQFGt-cPo

[2] M. Aoki and S. Koyama: *Chebyshev's bias against splitting and principal primes in global fields.* J. Number Theory **245** (2023) 233-262.

[3] S. Koyama and N. Kurokawa: *Chebyshev's bias for Ramanujan's τ-function via the Deep Riemann Hypothesis.* Proc. Japan Acad. **98A** (2022) 35-39.

[4] I. Kaneko and S. Koyama: *A New Aspect of Chebyshev's Bias for Elliptic Curves over Function Fields.* Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).

[5] 諏訪紀幸：「有限体と代数曲線」朝倉書店．

[6] Y. Okumura: *Chebyshev's bias for Fermat curves of prime degree* （preprint）2023.