曲面曲率のプロット

（久留米高専 制御情報工学科[1]、久留米高専　機械工学科[2]、
久留米高専 一般科目（理科系）[3]）
○末安洸樹[1]・青山知弘[1]・田村拓磨[2]・酒井道宏[3]

キーワード：曲率,曲面の曲率,３D プロット

１．緒言

本研究は,「如何にして学習者を深い学びに導けるか？」という問いに対して，知的好奇心の喚起と AL の 2 つの手法を組み合わせて実証を試みる。知的好奇心の喚起は,STEAM 教育における工学分野(E)と数学(M)の関連性に着目した学習活動によって実践する。AL は，ゼミ形式の 4 年次学科横断科目「リベラルアーツ特論」で実践する。曲率の応用として，曲面曲率のプロットをテーマに扱い，その調査結果を報告する。

2.　空間の曲率と曲率の求め方

平面曲線の曲がり方を測る指標として曲率が知られている。曲線上のある点付近の曲線は曲率円という円で近似することができる。この曲率円の半径を曲率半径といい,この曲率半径が大きいと曲がり方が小さくなる。曲面の曲率では曲線と同様に平面や凹凸のある面などの曲がり具合や曲がりの程度を定量化した数値となる。今回は空間の曲面のパラメータ表示より,3 次元の曲率(ガウス曲率)を求める。

曲面$S = \{x(u,v)\}$にける曲率は,

$E = x_u \cdot x_u$，$F = x_u \cdot x_v$，$G = x_v \cdot x_v$とした時,

$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$を第一基本行列という。

また、n を S の単位法線ベクトルとして,

$L = x_{uu} \cdot n$，$M = x_{uv} \cdot n$，$N = x_{vv} \cdot n$とした時,

$I\!I = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$を第二基本行列という。

I の逆行列をI^{-1}として，$A = I^{-1}\, I\!I$を考えると，曲率$\boldsymbol{\kappa}$は,

$$\boldsymbol{\kappa} = |A|$$

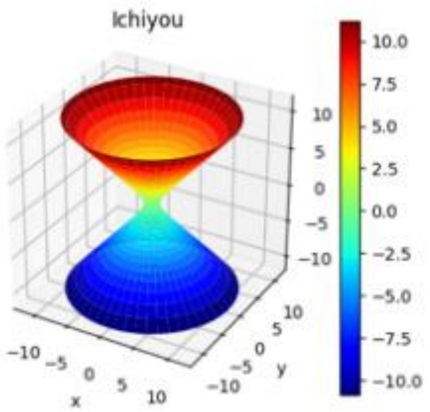
で求められる。

３．曲面と曲率の三次元座標へのプロット

ここでは,曲面と曲率の三次元座標へのプロットについて述べる。この背景として,難解な数式で表される曲面や曲率をプログラムを使って可視化したいと考えたことがきっかけである。

まず,曲面の曲率はプログラムを使って求めることが不可能だと判断したため,人の手で求める手法を用いた。

次に,ここで求めた曲率の数式と元の曲面の数式をプログラムに打ち込んでグラフにプロットした。上記の方法を用いて元の曲面と、曲率のグラフを 3D プロットを用いて三次元グラフに描画したものを下に示す。



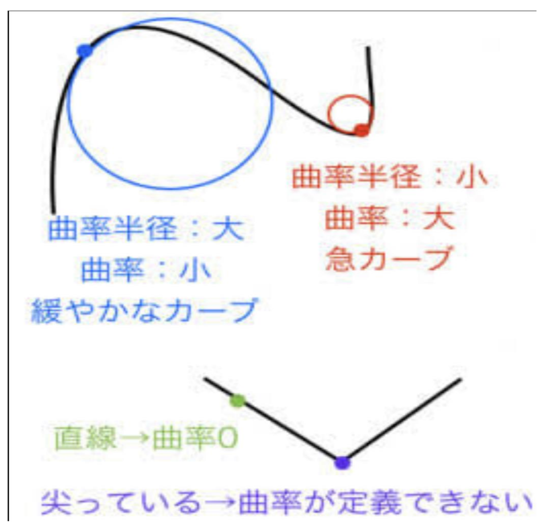
お問い合わせ先
氏名：酒井道宏
E-mail：sakai@kurume-nct.ac.jp

曲面曲率のプロット

（久留米高専　制御情報工学科[1]、機械工学科[2]、一般科目理科系[3]）
末安洸樹[1]・青山知弘[1]・田村拓磨[2]・酒井道宏[3]

1：曲率とは

- 曲線や曲面の曲がり具合を表す度合いであり、曲がり具合が大きければ曲率の値は大きくなる。
例）半径rの円の曲率は$\frac{1}{r}$となる。



2：曲面の曲率（ガウス曲率）

- 曲面における曲率は、
ある曲面$S=\{x(u,v)\}$に対し、
$E=x_u \cdot x_u$、$F=x_u \cdot x_v$、$G=x_v \cdot x_v$としたとき、
$I=\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$を第一基本行列という。
また、nをSの単位法線ベクトルとして、
$L=x_{uu} \cdot n$、$M=x_{uv} \cdot n$、$N=x_{vv} \cdot n$としたとき、
$II=\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$を第二基本行列という。
Iの逆行列をI^{-1}として、$A=I^{-1}\,II$を考えると曲率κは、
$\kappa=|A|$
で求められる。

3：曲率をプログラムへ展開

- 曲面の曲がり具合は前のページの数式で求められることがわかった。
- しかし、曲率が数式で表されても直感的にはそれがどういうグラフを描くのかは理解し難い。
- そこで、まず曲率を手計算で求める。次に、手計算で求めた数式をプログラムに打ち込んで、グラフを描画する準備を行う。
- 元の曲面と、曲率のグラフを3Dプロットを用いて三次元グラフに描画。

（パラメータ表示から曲率までプログラムで計算しようとしたが技術的な問題で断念。）

4：曲面と曲率を描画するプログラム

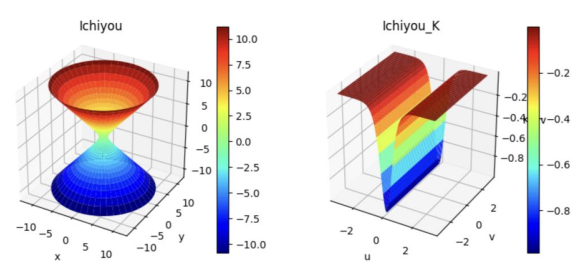
- 描画曲面：一葉双曲面
- 使用ライブラリ：numpy, matplotlib, Axes3D

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

#定数設定
PI = np.pi
A, B, C = 3,2,3

#媒介変数設定
u = np.linspace(-PI, PI, 100)
v = np.linspace(-PI, PI, 100)
u, v = np.meshgrid(u, v)

#グラフ変数
x = A * np.cosh(u) * np.cos(v)
y = B * np.cosh(u) * np.sin(v)
z = C * np.sinh(u)

#曲率
bunshi = -(A**2 * B**2 * C**2)
bunbo = ((B**2 * np.cos(v)**2 + A**2 * np.sin(v)**2) * C **2
     * np.cosh(u)**2 + A**2 * B**2 * np.sinh(u)**2)**2
K_uv = bunshi / bunbo
```

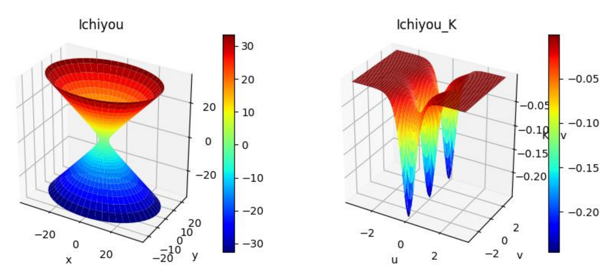
```
#グラフ作成
fig = plt.figure(figsize=(10,8))
ax1 = fig.add_subplot(121,projection="3d")
ax1.set_box_aspect((A, B, C))
ax2 = fig.add_subplot(122,projection="3d")
ax2.set_box_aspect((A, B, C))

#グラフの詳細設定
ax1.set_title("Ichiyou")
ax1.set_xlabel("x")
ax1.set_ylabel("y")
ax1.set_zlabel("z")

ax2.set_title("Ichiyou_K")
ax2.set_xlabel("u")
ax2.set_ylabel("v")
ax2.set_zlabel("K_uv")

#データプロット
"""
ax1.plot_surface(x,y,z,linewidth=0.3)
ax2.plot_surface(u,v,K_uv,linewidth=0.3)
"""
surface1 = ax1.plot_surface(x, y, z, cmap="jet")
surface2 = ax2.plot_surface(u,v,K_uv,cmap="jet")
fig.colorbar(surface1, ax=ax1, shrink=0.5)
fig.colorbar(surface2, ax=ax2, shrink=0.5)
plt.show()
```

5：描画されるグラフ

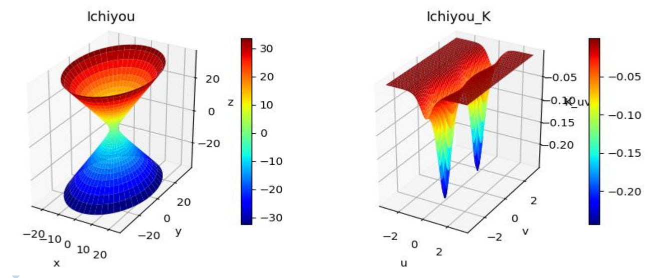
パラメータ：a=b=c=1



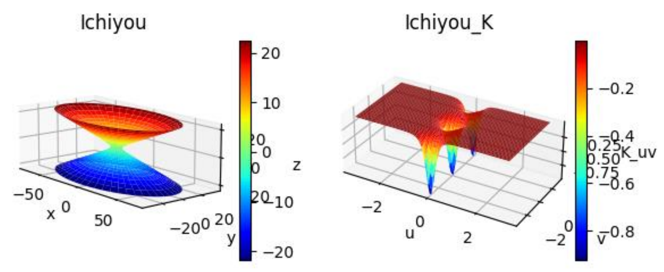
パラメータ：a=3, b=2, c=3



パラメータ：a=2, b=3, c=3



パラメータ：a=6, b=3, c=2



6：曲率の可視化

- 与えられた曲面の曲率を手計算にて求め、その数式をプログラムで定義してグラフを描画させることで、数式だけではわからなかった部分も見えてくる。
- パラメータの係数を変えることで、グラフや曲率がどのように変化するのかが理解できる。
- 今回の一葉双曲面においては係数値aとbについて、
  - a>b：曲率が大きくなる時が３回
  - a<b：曲率が大きくなる時が２回
  - a=b：u=0において曲率が最大

と推察できる。

7：まとめ

- 今回、直感的には理解し難い数式で表されたものをグラフに描画することによって理解しやすい形に表現した。
- 描画に用いたプログラムは簡素なものだが十分に表現することができた。しかし、もっと複雑な数式には対応できないと考えられる。

8：今後の展望

- より複雑な式に対応できるようにプログラム表現を充実させる。
- 双曲放物面やトーラスなど、他の面白い曲面のパラメータ表現を調べて曲率を計算し、解析を行う。