曲率の違いによる不平等電界の大きさ

（久留米高専　電気電子工学科[1]、機械工学科[2]、一般科目（理科系）[3]）
〇江田光来[1]・貞方海生[1]・永江周助[2]・酒井道宏[3]

キーワード：曲率、電界集中、電界強度、アステロイド、サイクロイド

１．緒言

本稿では，ゼミ形式の 4 年次学科横断科目「リベラルアーツ特論」で実践している STEAM 教育における工学分野(E)と数学(M)に着目し、電界と曲率の関連性について調査結果を報告する。

2．曲率の定義

一般に曲線$y=f(x)$の各点のパラメータ表示を$P(t,f(t))$とすると、$x=t$の時の曲率$k(t)$は次式で表される。

$$k(t)=\frac{f''(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2}^3} \text{―①}$$

また、曲線の各点が$P\big(x(t),y(t)\big)$とパラメータ表示されているとすると、この時の曲率$k(t)$は次式で表される。

$$k(t)\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}^3} \text{―②}$$

３．サイクロイド、アステロイド

アステロイドとカージオイドはそれぞれ以下の式で定義される。

・アステロイド　　　・カージオイド

$$\begin{cases} x=acos^3\theta \\ y=asin^3\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x=a(1+cos\theta)cos\theta \\ y=a(1+cos\theta)sin\theta \end{cases}$$

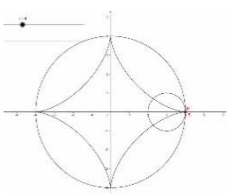

図１.アステロイド

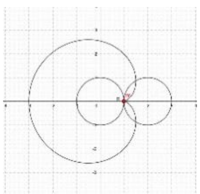

図２.カージオイド

４．電界集中

まず用語の解説として「電界」とは、空間のある場所に帯電体(電荷)を持って行ったとき、その帯電体に静電気力(クーロン力)が働くような場所である。また、電気をよく通す物体を「導体」と言い、導体の電界はその表面にのみ存在する。このことに留意して、導体の曲率半径が小さい部分では帯電している電荷の動きが制限されるため、電界は大きくなる。これを電界集中という。

５．不平等電界分布

図１のような同軸円筒電極で、電界強度 E(r)は次の③式で、そのときの最大電界強度は④式で表される。

$$E(r)=\frac{V}{r\,log_e(\frac{r_2}{r_1})} \text{―③}$$

$$E(r)_{max}=\frac{V}{r_1\,log_e(\frac{r_2}{r_1})} \text{―④}$$

また、この最大電界強度 E_{max} が最小となるのは④式の分母が最大の時に得られる。よって、④式の分母を r_1 で微分したときに 0 となるときに E_{max} が最小になる。

$$0=\frac{d}{dr_1}\{r_1\,log_e(\frac{r_2}{r_1})\}$$

$$0=\frac{d}{dr_1}\{r_1\,log_e(r_2)\}-\frac{d}{dr_1}\{r_1\,log_e(r_1)\}$$

$$log_e(r_1)=\ log_e(r_2)-\ log_e(e)$$

$$log_e(\,r_1)=log_e(\frac{r2}{e})$$

$$\therefore r_1=\frac{r_2}{e}$$

〈参考文献〉

アステロイド図　作者：masanao okumura

https://www.geogebra.org/m/NP5bsjgd

カージオイド図　作者: fnrk

https://www.geogebra.org/classic/jdf8vr5w

お問い合わせ先
氏名：酒井道宏
E-mail：sakai@kurume-nct.ac.jp

曲率の違いによる不平等電界の大きさ

久留米高専電気電子工学科[1]、機械工学科[2]、一般科目理科系[3]
〇江田光来[1]・貞方海生[1]・永江周助[2]・酒井道宏[3]

概要

本稿では, ゼミ形式の 4 年次学科横断科目「リベ ラルアーツ特論」で実践している STEAM 教育にお ける工学分野(E)と数学(M)に着目し、電界と曲率 の関連性について調査結果を報告する。

1.曲率の定義

一般に曲線$y=f(x)$の各点のパラメータ表示を$P(t,f(t))$とすると、$x=t$の時の曲率$k(t)$は次式で表される。

$$\boldsymbol{k(t)=\frac{f''(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2}^3}}$$

また、曲線の各点が$P\big(x(t),y(t)\big)$とパラメータ表示されているとすると、この時の曲率$k(t)$は次式で表される。

$$\boldsymbol{k(t)\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}^3}}$$

2.カージオイド、アステロイド

カージオイドとアステロイドは以下のようなパラメータ表示で表すことができる。

カージオイド： (a=1)$\begin{cases} x=cos\theta(1+cos\theta) \\ y=sin\theta(1+cos\theta) \end{cases}$　アステロイド： (a=1)$\begin{cases} x=cos^3\theta \\ y=sin^3\theta \end{cases}$

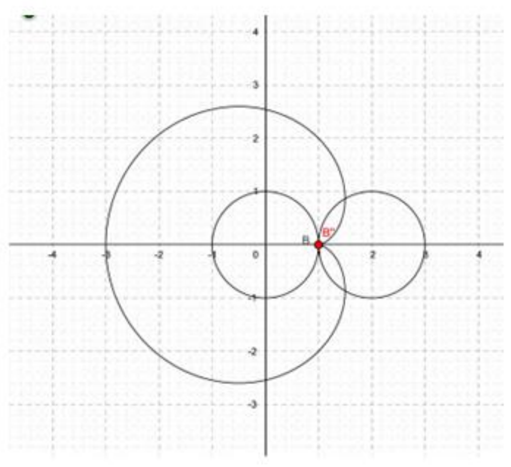
図1.カージオイド

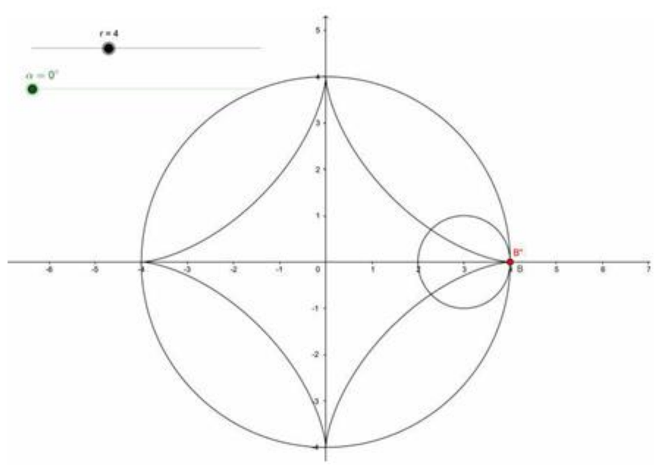
図2.アステロイド

3.カージオイド、アステロイドの曲率の計算

カージオイド、アステロイドの曲率をカージオイドは$\theta=0,\frac{\pi}{2},\pi$ アステロイドは$\theta=0,\frac{\pi}{4}$として定義に従って計算すると、以下のように表すことができる。

（ここでは簡略化のため$sinx=t, sin2x=u, cosx=v, cos2x=w$とする。）

カージオイド

$$k(\theta)=(\frac{(t+2u)(t+u)}{\big((t+u)^2+(v+w)^2\big)\sqrt{(t+u)^2+(v+w)^2}}+(v+2w)(v+w))$$

$$k(0)=6,\quad k\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad k(\pi)=0$$

アステロイド

$$k(\theta)=-\frac{t^2}{(v^3u^2+t^4v)\times 3\sqrt{v^2u^2+t^4}}$$

$$k(0)=0,\quad k\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4\sqrt{6}}{27}=-0.362887$$

4.不平等電界分布

図1のような同軸円筒電極で、電界強度E(r)は次の(1)式で、そのときの最大電界強度は(2)式で表される。

$$E(r)=\frac{V}{r\,log_e(\frac{r_2}{r_1})}\text{-(1)}$$

$$E(r)_{max}=\frac{V}{r_1\,log_e(\frac{r_2}{r_1})}\text{-(2)}$$

また、この最大電界強度E_{max}が最小となるの(1)式の分母が最大の時に得られる。よって、 (1)式の分母をr_1で微分したときに0となるときにE_{max}が最小になる。

$$0=\frac{d}{dr_1}\{r_1\,log_e(\frac{r_2}{r_1})\}$$

$$0=\frac{d}{dr_1}\{r_1\,log_e(r_2)\}-\frac{d}{dr_1}\{r_1\,log_e(r_1)\}$$

$$log_e(r_1)=log_e(r_2)-log_e(e)$$

$$log_e(r_1)=log_e(\frac{r2}{e})$$

$$\therefore r_1=\frac{r_2}{e}$$

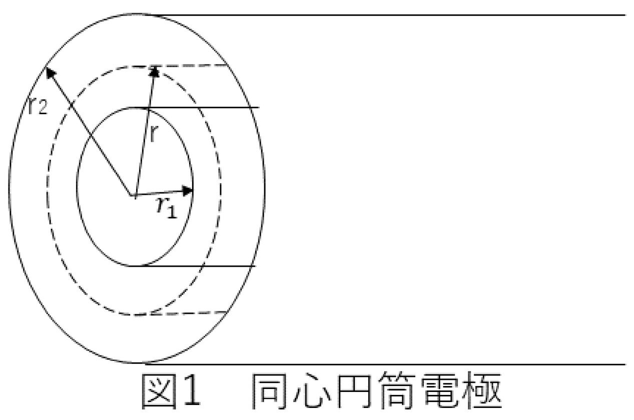

図1　同心円筒電極

5.実際の計算

(1)内部の電極が円筒の場合

同心円筒電極の電極間が20[kV]、外円筒の半径 r2 が2e[cm]のとする。電界強度E(r)が最大となる内円筒の半径 r1 は「$r_1=\frac{r_2}{e}$」の関係より、

$$\boldsymbol{r_1=2[\mathrm{cm}]}$$

よって、この内円筒の表面の曲率は、

$$\boldsymbol{1/2}$$

電界強度E(r)は(2)式より、

$$\mathrm{E(r)}=20/2\,log_e(\frac{2e}{2})$$
$$=10/1\times 1$$
$$=\boldsymbol{10}[\mathrm{kV/cm}]$$

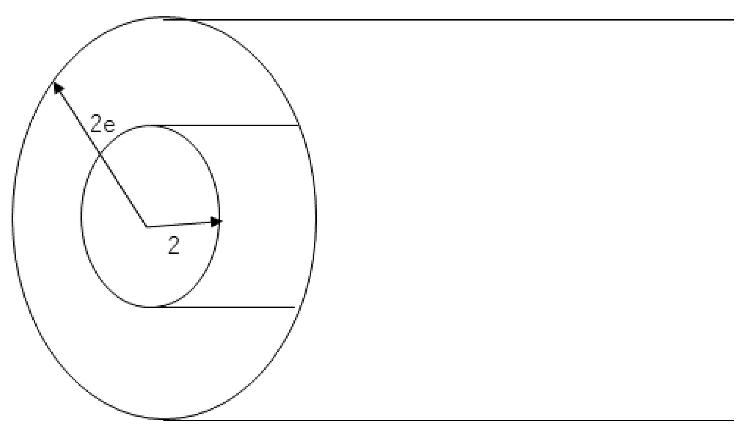

図2　中の電極が円筒型の円筒電極

(2)内部の電極がアステロイド型の場合

同心円筒電極の電極間が20[kV]、外円筒の半径 r2 が2e[cm]のとする。原点Oからそれぞれの点までの距離は以下の通りである。

$\boldsymbol{r_A=2}$**[cm]** 、 $\boldsymbol{r_B=\sqrt{2}}$ **[cm]**

また、それぞれの点での曲率は以下の通りである。

点A：$\boldsymbol{k(0)=0}$、点B：$\boldsymbol{k\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4\sqrt{6}}{27}=-0.362\cdots}$

電界強度E(r)は(2)式より、

$$\mathrm{E}(r_A)=20/2\,log_e(\frac{2e}{2})=10/1\times 1=\boldsymbol{10}[\mathrm{kV/cm}]$$

$$\mathrm{E}(r_B)=20/\sqrt{2}\,log_e\left(\frac{2e}{\sqrt{2}}\right)=40\sqrt{2}-10\sqrt{2}\ln(2)/\{4-ln(2)^2\}\cong\boldsymbol{10.05}[\mathrm{kV/cm}]$$

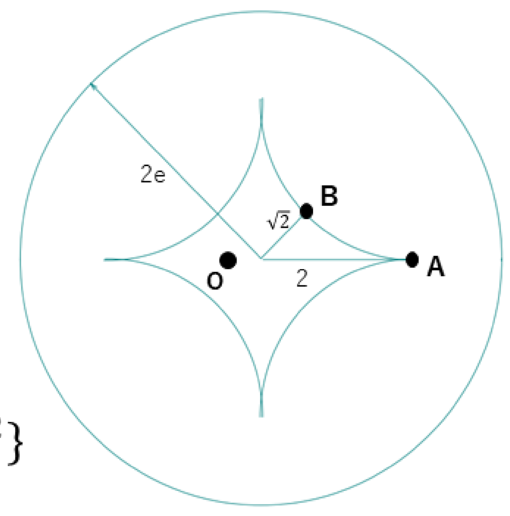

図3　中の電極がアステロイド型の円筒電極

(3)内部の電極がカージオイド型の場合

同心円筒電極の電極間が20[kV]、外円筒の半径 r_2 が2e[cm]のとする。原点Oからそれぞれの点までの距離は以下の通りである。

$\boldsymbol{r_A=2}$**[cm]** 、$\boldsymbol{r_B}$= 2.55[cm]、$\boldsymbol{r_C}$=2[cm]

また、それぞれの点での曲率は以下の通りである。

点A：$k(0)=6$、点B：$k\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$、点C：$k(\pi)=0$

電界強度E(r)は(2)式より、

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{r_A})=20/2\,log_e(\frac{2e}{2})=\boldsymbol{10}[\mathrm{kV/cm}]$$

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{r_B})=20/2.55\,log_e(\frac{2e}{2.55})=400/51ln\left(\frac{40e}{51}\right)\cong\boldsymbol{10.36}[\mathrm{kV/cm}]$$

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{r_C})=20/2\,log_e(\frac{2e}{2})=\boldsymbol{10}[\mathrm{kV/cm}]$$

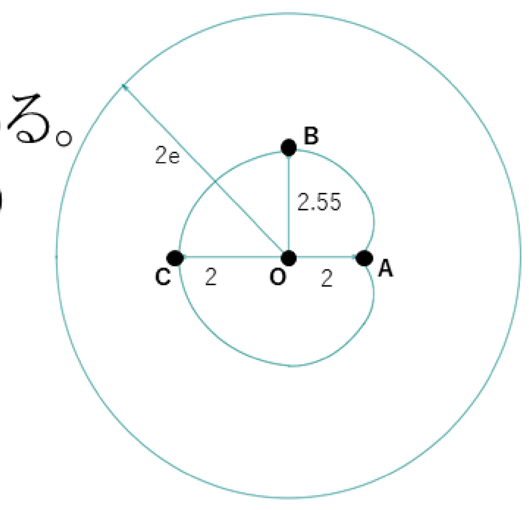

図4　中の電極がカージオイド型の円筒電極

6.まとめ

上記の(1)～(3)の計算で、曲率と電界強度の間には「曲率が低いほど電界強度は高くなる」という関係が求められはずだったが、その変化がわかりずらく判別しにくい。

これは、曲率半径が小さい部分程電界が大きくなるという電界集中を考慮していないためだと考えられる。