Le concept de fonction dans la philosophie mathématique d'Auguste Comte.
Masahito HIRAI, Université de Tokyo.

1. Introduction

Plus d'un demi-siècle s'est déjà écoulé depuis Larry Laudan, philosophe des sciences, avait déploré le manque de recherche sur la philosophie des sciences d'Auguste Comte. Aujourd'hui, on pourrait dire que les circonstances se sont améliorées jusqu'à un certain point. En 2007, à l'occasion du cent cinquantenaire anniversaire de sa mort, la *Revue philosophique de la France et l'étranger* a édité, sous la direction d'Annie Petit, spécialement sur la philosophie des sciences d'Auguste Comte.

Cependant, on doit admettre que, jusqu'à présent il n'y a qu'un très petit nombre de chercheurs qui ont prêté attention à sa philosophie mathématique. Par exemple, les historiens et les philosophes des mathématiques tels que Léon Brunschvicg (1912), René Taton (1951), Craig Fraser (1990), et Jean Dhombre (2007). Sans doute, c'est en partie à cause de la critique lancée sur les mathématiques d'Auguste Comte : sa mathématique s'est construite sur les mathématiques obsolète, c'est-à-dire celle de Lagrange. Dans l'histoire des mathématiques, il a été destinée à être remplacée par Cauchy, alors que Comte a critiqué Cauchy sans merci.

Alors, devrait-on en conclure qu'il n'y a pas d'autres raisons d'analyser les mathématiques d'Auguste Comte que pour "satisfaire une vaine curiosité" ? Ne pourrait-on pas penser que sa *philosophie* mathématique joue un rôle important dans sa philosophie positive ? Ne pourrait-on pas y trouver la possibilité de reconsidérer sa philosophie des sciences d'un nouveau point de vue ? Aujourd'hui, en analysant sa philosophie mathématique, je voudrais vous montrer ce qui me semble spécifier la philosophie des sciences d'Auguste Comte.

2. Définition de la mathématique

D'abord, je vais envisager comment Comte a défini la mathématique dans la troisième leçon du *Cours de philosophie positive*. Il a commencé à partir de la "définition vague et insuffisante qu'on en donne ordinairement." Selon lui, on a généralement considéré la mathématique comme "*la science qui a pour but la mesure des grandeurs*."

Mais le plus souvent il est impossible de mesurer "directement," ou bien "immédiatement," une grandeur au moyen de la "superposition des lignes." Pour reprendre l'exemple cité par Comte, on ne saurait savoir "toutes les distances entre les différents corps célestes, ou de la terre à quelqu'autre corps céleste, et ensuite même la plupart des distances terrestres." Cette remarque est assez compréhensible. Comment pourrait-on mesurer la distance entre la terre et la lune, en utilisant, par exemple, un mètre à ruban ? D'où vient la nécessité de la mesure "indirecte."

> La méthode générale qu'on emploie constamment . . . pour connaître des grandeurs qui ne comportent point une mesure directe, consiste à les rattacher à d'autres qui soient susceptibles d'être déterminées immédiatement, et d'après lesquelles on parvient à découvrir les premières, au moyen des relations qui existent entre les unes et les autres. Tel est l'objet précis de la science mathématique envisagée dans son ensemble.

Donc, pour connaître des grandeurs inconnues que l'on ne peut mesurer qu'indirectement, d'une part on a besoin de quelques grandeurs connues que l'on peut mesurer directement, et d'autre part on a besoin des relations qui existent entre elles. L'idée de mesure indirecte est importante, parce qu'elle est étroitement liée à la définition de la mathématique.

> Nous sommes donc parvenu maintenant à définir avec exactitude la science mathématique, en lui assignant pour but la mesure *indirecte* des grandeurs, et disant qu'on s'y propose constamment de ***déterminer les grandeurs les unes par les autres, d'après les relations précises qui existent entre elles.***

Voilà la définition définitive de la mathématique. Comme l'a remarqué Michel Serre, "l'objet de la mathématique se déplace : de la mesure à la relation." Comte donne de l'importance à la connaissance de la relation, d'après laquelle on peut déduire chaque quantité inconnue.

3. Définition de la science en général

Ce n'est pas tout. "Cet énoncé," continue-il, "caractérise immédiatement **une véritable *science*** . . . D'après une telle définition, **l'esprit mathématique consiste à regarder toujours comme liées entre elles toutes les quantités que peut présenter un phénomène quelconque**, dans la vue de les déduire."

Il faut souligner le mot *quelconque*. "Il n'y a pas évidemment de phénomène qui ne puisse donner lieu à des considérations de ce genre." L'esprit mathématique peut s'appliquer aux tous les genres de phénomènes. Ici, Comte a tenté de définir la science en général, en y étendant la définition de la mathématique. Pour lui, la mathématique représente toutes les sciences. En réalité, il l'a déclaré beaucoup plus clairement qu'ailleurs.

> Cette dénomination [la mathématique], qui a pris aujourd'hui une acception si déterminée, signifie simplement par elle-même **la *science* en général**. Une telle désignation, rigoureusement exacte pour les Grecs, qui n'avaient pas d'autre science réelle, n'a pu être conservée par les

> modernes que pour indiquer les mathématiques comme **la science par excellence**.

De plus, il est allé jusqu'à dire que "la définition à laquelle nous venons d'être conduits . . . n'est autre chose que **la définition de toute véritable science quelconque**,"

> car chacune n'a-t-elle pas nécessairement pour but de **déterminer des phénomènes les uns par les autres, d'après les relations qui existent entre eux** ? Toute *science* consiste dans la coordination des faits ; si les diverses observations étaient entièrement isolées, il n'y aurait pas de science.

Presque la même remarque se retrouve ailleurs. Dans la trente-cinquième leçon, Il dit :

> La vraie science consiste, **en tout genre**, dans **les relations exactes établies entre les faits observés**, afin de **déduire**, **du moindre nombre possible de phénomènes fondamentaux**, **la suite la plus étendue de phénomènes secondaires**.

L'accent est mis également sur la déduction. Selon lui, "la science est essentiellement destinée à dispenser, autant que le comportent les divers phénomènes, de toute observation directe, en permettant de **déduire du plus petit nombre possible de données immédiates**, **le plus grand nombre possible de résultats**."

"N'est-ce point là," continue-t-il, "l'usage réel, soit dans la spéculation, soit dans l'action, **des *lois* que nous parvenons à découvrir entre les phénomènes naturels** ?" Ici, la loi est considérée comme une sorte de relation entre des phénomènes. Donc la loi, c'est une sorte de relation entre les phénomènes naturels. On peut déduire par les lois, c'est-à-dire par les relations entre des phénomènes naturels.

D'où l'on peut suggérer que la relation est à la déduction dans la mathématique ce que la loi est à la prévoyance dans la science en général. La loi, c'est "la véritable base rationnelle de l'action de l'homme sur la nature,"

> puisque la connaissance des lois des phénomènes, dont le résultat constant est de nous les faire **prévoir**, peut seule évidemment nous conduire, dans la vie active, à les modifier à notre avantage les uns par les autres.

En somme, "la science mathématique ne fait . . . que pousser au plus haut degré possible, tant sous le rapport de la quantité que sous celui de la qualité, sur les sujets véritablement de son ressort, **le même genre de recherches que poursuit**, à des degrés plus ou moins inférieurs, **chaque science réelle**, dans sa sphère respective."

> C’est donc par l’étude des mathématiques, et seulement par elle, que l’on peut se faire **une idée juste et approfondie de ce que c’est qu’une *science***. C’est là uniquement qu’on doit chercher à connaître avec précision **la méthode générale que l’esprit humain emploie constamment dans toutes ses recherches positives**.

4. Définition de l’équation

Nous avons constaté jusqu’ici que Comte a étendu la définition de la mathématique à celle de la science en général, et que l’importance est donnée à la notion de relation. Mais en fait, Comte ne l’a pas clarifié. Que veut dire exactement cette notion vague ? Pour répondre à cette question, il faut envisager deux notions, c’est-à-dire la *fonction* et l’*équation*. Car, dans la troisième leçon, il les a utilisé comme si elles étaient interchangeables.

D’abord, dans l’exemple de la chute verticale des corps pesants, Comte appelle la relation entre la hauteur et le temps, la *fonction* :

> En observant ce phénomène [*i.e.* la chute verticale des corps pesants], l’esprit le plus étranger aux conceptions mathématiques reconnaît sur-le-champ que **les deux quantités qu’il présente**, savoir : la hauteur d’où un corps est tombé, et le temps de sa chute, **sont nécessairement liées l’une à l’autre**, puisqu’elles varient ensemble, et restent fixes simultanément ; ou, **suivant le langage des géomètres, qu’elles sont *fonction* l’une de l’autre.**

Plus tard, malgré qu’il s’agisse du même exemple de la chute verticale, il désigne la même relation entre la hauteur et la durée [*i.e.* le temps] comme l’*équation* :

> Reprenant le phénomène déjà cité de la chute verticale d’un corps pesant, et consi dérant le cas le plus simple, on voit que pour parvenir à déterminer l’une par l’autre la hauteur d’où le corps est tombéet la durée de sa chute, il faut commencer par découvrir **la relation exacte de ces deux quantités, ou, suivant le langage des géomètres, l’*équation* qui existe entre elles.**

Même exemple (la chute verticale des corps pesants), mots différents (la fonction et l’équation). Les deux dérivent également du “langage des géomètres.” Mais quelle différence y-a-il ? Pour quelle raison les distingue-t-il ?

En fait, Comte a senti la nécessité de différencier la notion d’*équation* de celle de *fonction*. Dans la quatrième leçon, il écrit : “On se forme ordinairement une idée beaucoup trop vague de ce que c’est qu’une *équation*, lorsqu’on donne ce nom à toute espèce de relation d’égalité entre deux fonctions *quelconques* des grandeurs que l’on considère.”

Pour éviter de les confondre, il propose de distinguer deux sortes de *fonctions*, d'où vient la définition de l'équation :

> les fonctions *abstraites*, analytiques, et les fonctions *concrètes*. Les premières peuvent seules entrer dans les véritables *équations*, en sorte qu'on pourra désormais définir, d'une manière exacte et suffisamment approfondie, toute équation : une relation d'égalité entre deux fonctions *abstraites* des grandeurs considérées.

Ensuite, Comte explique les deux fonctions différentes. D'une part, quant aux fonctions *abstraites* :

> *A priori*, les fonctions que j'appelle *abstraites* sont celles qui expriment entre des grandeurs **un mode de dépendance qu'on peut concevoir uniquement entre nombres**, sans qu'il soit besoin d'indiquer aucun phénomène quelconque où il se trouve réalisé.

D'autre part, concernant les fonctions *concrètes* :

> Je nomme, au contraire, fonctions *concrètes* celles pour lesquelles **le mode de dépendance exprimé ne peut être défini ni conçu qu'en assignant un cas physique déterminé**, géométrique, mécanique, ou de tout autre nature, dans lequel il ait effectivement lieu.

Ainsi, l'équation est définie comme une relation d'égalité qui se compose uniquement des fonctions abstraites. L'équation n'est pas une simple relation. C'est une relation d'égalité qui exprime un mode de dépendance uniquement entre des nombres.

5. Division de la mathématique

J'ai constaté jusqu'ici que la mathématique, et toutes les sciences, ont pour but de ***déterminer les grandeurs les unes par les autres, d'après les relations précises qui existent entre elles***. Et pour dire précisément, ces relations signifient les ***équations***.

Dans sa philosophie mathématique, la notion d'*équation* est la clé de voûte. Selon lui, la mathématique se divise en deux parties distinctes : la mathématique *abstraite*, et la mathématique *concrète*. "En effet," dit Comte,

> nous avons vu que toute recherche mathématique a pour objet de déterminer des grandeurs inconnues, d'après les relations qui existent entre elles et des grandeurs connues. Or, il faut évidemment d'abord, à cette fin, parvenir à **connaître avec précision les relations existantes entre les quantités** que l'on considère. Ce premier ordre de recherches constitue ce que j'appelle **la partie *concrète* de la solution**. Quand elle est terminée, la question change de nature ; elle se réduit à une pure question de nombres, consistant simplement désormais à **déterminer**

des nombres inconnus, lorsqu'on sait quelles relations précises les lient à des nombres connus. C'est dans ce second ordre de recherches que consiste ce que je nomme **la partie *abstraite* de la solution**. De là résulte la division fondamentale de la science mathématique générale en deux grandes sciences, la mathématique abstraite et la mathématique concrète.

De plus, les deux parties, c'est-à-dire la mathématique en sa totalité, traitent également l'équation : d'un côté la mathématique concrète vise à *découvrir* des équations ; d'un autre côté la mathématique abstraite a pour objectif de *résoudre* des équations.

> Le but définitif de nos recherches dans la mathématique concrète [est] **la découverte des *équations***, qui expriment les lois mathématiques des phénomènes considérés, et ces *équations* [constituent] **le véritable point de départ du calcul** [*i.e.* la mathématique abstraite], dont l'objet est d'en déduire la détermination des quantités les unes par les autres.

Ensuite, il continue à les diviser. La mathématique concrète se compose de la géométrie et de la mécanique ; la mathématique abstraite, autrement dit le calcul, se divise en algèbre et arithmétique. Il s'agit ici d'envisager la mathématique abstraite, parce que Comte précise, dans la deuxième leçon, que "la partie concrète est nécessairement fondée sur la partie abstraite."

Les deux parties, l'algèbre et l'arithmétique, sont de natures différentes. "Dans la première," explique-t-il,

> on a pour objet de transformer les équations proposées, de façon à **mettre en évidence le mode de formation des quantités inconnues par les quantités connues** ; c'est ce qui constitue la question *algébrique*. Dans la seconde, on a en vue d'*évaluer* les *formules* ainsi obtenues, c'est-à-dire, de **déterminer immédiatement la valeur des nombres cherchés, représentés déjà par certaines fonctions explicites des nombres donnés** ; telle est la question *arithmétique*.

> l'*algèbre* peut se définir, en général, comme ayant pour objet **la *résolution* des *équations***, ce qui . . . signifie **transformer des fonctions *implicites* en fonctions *explicites* équivalentes** : de même, l'*arithmétique* peut être définie comme destinée à **l'*évaluation* des fonctions**. Ainsi, en contractant les expressions au plus haut degré, je crois pouvoir donner nettement une juste idée de cette division, en disant . . . que **l'*algèbre* est *le calcul des fonctions***, et **l'*arithmétique* le *calcul des valeurs***.

Par conséquent, "[i]ls ne diffèrent pas moins par le point de vue sous lequel on y considère les quantités, envisagées, dans le premier, **quant à leurs relations**, et, dans le second, **quant à leurs valeur**." Donc l'algèbre envisage des relations, et l'arithmétique cherche des valeurs.

Pourtant, l'arithmétique se dissout finalement dans l'algèbre. Pour

Comte, l'arithmétique n'est qu'une application particulière de l'algèbre.

> En cherchant à déterminer avec exactitude en quoi consistent proprement les *évaluations*, on reconnaît aisément qu'elles ne sont pas autre chose que **de véritables *transformations* des fonctions à évaluer**, transformations qui, malgré leur but spécial, n'en sont pas moins essentiellement de la même nature que toutes celles enseignées par l'analyse. Sous ce point de vue, **le *calcul des valeurs* pourrait être conçu simplement comme un appendice et une application particulière du *calcul des fonctions***, de telle sorte que **l'*arithmétique* disparaîtrait**, pour ainsi dire, dans l'ensemble de la mathématique abstraite, comme section distincte.
>
> . . . il faut observer que, lorsque l'on propose d'***évaluer* un nombre inconnu dont le mode de formation est donné**, il est . . . déjà défini et exprimé sous une certaine forme ; et qu'**en l'*évaluant*, on ne fait que mettre son expression sous une autre forme déterminée**, à laquelle on est habitué à rapporter la notion exacte de chaque nombre particulier, en le faisant rentrer dans le système régulier de la *numération*. L'*évaluation* consiste si bien dans une simple *transformation*, que lorsque l'expression primitive du nombre se trouve elle-même conforme à la numération régulière, il n'y a plus, à proprement parler, d'*évaluation*, ou plutôt on répond à la question par la question même.

Ici, il faut remarquer qu'un nombre cherché est "déjà défini et exprimé sous une certaine forme," si "le mode de formation est donné." Autrement dit, l'équation, qui représente le mode de formation d'un nombre inconnu, comprend tout nombre possible qui satisfait à cette équation. De toute façon, on comprend qu'il a fondé sa mathématique sur la notion d'équation [Voyez la *Fig*. suivante].

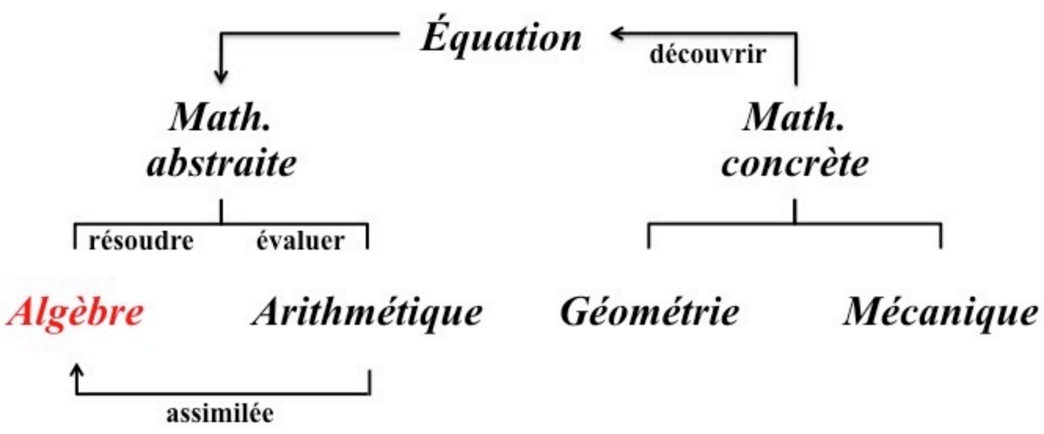

***Fig*. Composition de la mathématique dans le *Cours*.**

6. Concept de *fonction*

Cependant, il reste toujours un problème fondamental. Malgré qu'il ait défini l'équation, malgré qu'il ait fondé sur cette notion sa mathématique entière, il n'a point clarifié que signifie la *fonction*.

Mais n'a-t-il pas caractérisé la notion même d'*équation*, dans la mesure où elle est la relation d'égalité entre les *fonctions* abstraites? N'a-t-il pas défini l'*algèbre*, qui constitue effectivement la mathématique abstraite, comme le calcul des *fonctions*? Notre analyse resterait incomplet, si l'on ne saurait clarifier cette notion importante.

Maintenant, il s'agit d'envisager le concept de *fonction* en question. En fait, dans le cours de notre analyse, Comte a parfois utilisé les mots "fonction," "fonction explicite," et "fonction implicite," sans les avoir définis, cependant.

Certes, il a suggéré sa signification, lorsqu'il mentionne les fonctions abstraites et les fonctions concrètes. Les fonctions abstraites sont "celles qui expriment entre des grandeurs ***un mode de dépendance*** qu'on peut concevoir uniquement entre nombres," alors que les fonctions concrètes sont "celles pour lesquelles ***le mode de dépendance*** exprimé ne peut être défini ni conçu qu'en assignant un cas physique déterminé, géométrique, mécanique." En général, la fonction est une sorte de *mode de dépendance*.

Relativement aux fonctions abstraites, il en énumère dix, qu'il appelle les "éléments analytiques."

> Soit x **la variable indépendante**, y **la variable corelative** [*sic*] qui en dépend. Les différents modes simples de dépendance abstraite que nous pouvons maintenant concevoir entre y et x, sont exprimés par les dix formules élémentaires suivantes. . . .

1er couple	1° $y = a + x$	fonction *somme*,
	2° $y = a - x$	fonction *différence*,
2e couple	1° $y = a\,x$	fonction *produit*,
	2° $y = \frac{a}{x}$	fonction *quotient*,
3e couple	1° $y = x^a$	fonction *puissance*,
	2° $y = \sqrt[a]{x}$	fonction *racine*,
4e couple	1° $y = a^x$	fonction *exponentielle*,
	2° $y = \underset{a}{l}x$	fonction *logarithmique*,
5e couple *	1° $y = \sin x$	fonction *circulaire directe*,
	2° $y = \text{arc}\,(\sin = x)$	fonction *circulaire inverse*

Ici, un nouveau concept apparaît : la *variable*. Dans ce cas, la variable corrélative y dépend de la variable indépendante x la variable indépendante ; donc les fonctions ci-dessus expriment les différents modes de dépendance entre y et x.

Mais, il ne les explique pas davantage. En réalité, la notion de *fonction* et celle de *variable* étaient habituellement usées par les mathématiciens dans la première moitié du 19e siècle, parce que, au cours du 18e siècle, ils avaient été formulés par les éminents mathématiciens, tels que Leibniz, Bernoulli, Euler, et Lagrange.

De plus, Comte avait déjà déclaré, dans la première leçon, "c'est un *Cours de philosophie positive*, et non de sciences positives, que je me propose de faire." Il n'a donc pas d'obligation d'expliquer toute notion élémentaire de chaque science fondamentale, y compris la *fonction* et la *variable*.

Il faut donc envisager les traités de mathématiques du 19e siècle. Selon Youschkevitch, historien des mathématiques, la formation du concept de fonction se divise en trois époques : (1) l'antiquité ; (2) le moyen age ; (3) la période moderne [1]. Comte appartient à la troisième époque, où la fonction, *i.e.* le mode de dépendance, était exprimée par les expressions analytiques.

Ensuite, on peut distinguer trois types de documents, à laquelle Comte s'était probablement référé :

(1) *Les cahiers de cours à l'École polytechnique*, qui sont conservés dans la Maison d'Auguste Comte. Il y existe le Cahier de cours d'analyse de Louis Poinsot (1777–1859), celui d'Antoine-André-Louis Reynaud (1771–1844), et celui d'Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) ;

(2) *Les ouvrages mathématiques mentionnés dans la Bibliothèque positiviste*. Le *Cours d'analyse* de Henri Navier (1785–1836) et la *Théorie des fonctions analytiques* par Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) ;

(3) *Les ouvrages conservés dans la Bibliothèque personnelle d'Auguste Comte*. Outre la *Théorie des fonctions* de Lagrange déjà cité, l'*Introductio in analysin infinitorum* par Leonhard Euler (1707–1783), le *Résumé des leçons d'analyse*

---

[1] "(1) Antiquity, the stage in which the study of particular cases of dependences between two quantities had not yet isolated general notions of variable quantities and functions. (2) The Middle Ages, the stage in which, in the European science of the 14th century, these general notions were first definitely expressed both in geometrical and mechanical forms, but in which, as also in antiquity, each concrete case of dependence between two quantities was defined by a verbal description, or by a graph rather than by formula. (3) The Modern Period, the stage in which, beginning at the end of the 16th century, and, especially, during the I7th century, analytical expressions of functions began to prevail, the class of analytic functions generally expressed by sums of infinite power series soon becoming the main class used." A. P. Youschkevitch, "The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century," *Archive for History of Exact Sciences* 16, no. 1 (1976): 37-85, on 39.

données à l'Ecole polytechnique de Navier, le *Résumé des leçons données à l'Ecole royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal* de Cauchy, etc.

Aujourd'hui, je ne peux examiner que quelques documents ci-dessus. Cependant, j'ai l'intention de les analyser profondément à d'autres occasions.

Le plus important, c'est probablement la *Théorie de fonctions analytiques*, puisque Comte lui-même mentionne fréquemment dans le *Cours* le nom de cet ouvrage. De plus, comme le note Michel Serres, certaines leçons mathématiques, par exemple la huitième leçon, reposent grandement sur Lagrange, telles que la *Théorie des fonctions analytiques*, les *Leçons sur le calcul des fonctions*, et la *Mécanique analytique*.

Au début de la *Théorie des fonctions*, Lagrange définit la fonction d'une manière générale. Il l'explique comme suivant :

> On appelle ***fonction*** **d'une ou de plusieurs quantités**, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que **les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles**. Ainsi, dans les fonctions, on ne considère que les quantités qu'on suppose **variables**, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.
>
> Nous désignerons en général par la caractéristique f ou F, placée devant une variable, toute fonction de cette variable, c'est-à-dire **toute quantité dépendante de cette variable** et **qui varie avec elle suivant une loi donnée**.

Ici, Lagrange donne l'importance à la notion de dépendance. Pour dire précisément, c'est un mode de dépendance, exprimé par Lagrange comme une *loi*. En un mot, une *fonction* est une quantité variable, dont le mode de dépendance est exprimé par d'autres quantités variables composées.

Mais pourquoi "les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles" ? Sa définition succède à celle d'Euler. Selon lui, une quantité variable est "une quantité qui comprend toutes les valeurs déterminées." Il ajoute qu'une "fonction de variable . . . est aussi une quantité variable." D'où vient la définition de Lagrange : *les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles*.

Il faut également faire référence à l'ouvrage de Cauchy. Il décrit la quantité variable "comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres." Et selon lui,

> LORSQUE des quantités variables sont tellement **liées entre elles**, que, **la valeur de l'une d'elles étant donnée**, **on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres**, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors **le**

> **nom de *variable indépendante***; et les autres quantités, exprimées au moyen de la variable indépendante, sont ce qu'on appelle **des *fonctions* de cette variable**.

Si l'on compare cette expression à celle de Comte, on se rend compte d'une étonnante ressemblance. En considérant le phénomène de la chute oblique, Comte dit :

> Toutes ces diverses quantités [que présente la chute oblique] seront **liées entre elles**, de telle sorte que **chacune à son tour pourra être déterminée indirectement d'après les autres**, ce qui présentera autant de recherches mathématiques distinctes qu'il y aura de grandeurs coexistantes dans le phénomène considéré.

Les quantités des phénomènes naturels sont **liées entre elles**. Lorsqu'il définit la mathématique, il déclare que "l'esprit mathématique consiste à regarder toujours comme **liées entre elles** toutes les quantités que peut présenter un phénomène quelconque." Et elles sont liées, "d'après les relations précises qui existent entre elles." C'est un mode de dépendance ou, selon Lagrange, une *loi*. Lorsque Comte parle "des lois que nous parvenons à découvrir entre les phénomènes naturels," il entend l'existence de dépendance entre des quantités des phénomènes naturels.

En plus, si l'on considère la chute oblique, "l'espace parcouru, soit dans le sens vertical, soit dans le sens horizontal, le temps employé à le parcourir, la vitesse du corps à chaque point de sa course, et même l'intensité et la direction de son impulsion primitive" sont envisagées comme "variables." Cela signifie *toutes les valeurs possibles* (Lagrange), *une quantité qui comprend toutes les valeurs déterminées* (Euler), une quantité *devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres* (Cauchy).

Si la loi des phénomènes naturels comprend des quantités variables, elle exprime *toutes les cas possibles des phénomènes naturels*. D'où Comte a dit, dans la première leçon :

> **la perfection du système positif**, vers laquelle il tend sans cesse, quoiqu'il soit très probable qu'il ne doive jamais l'atteindre, **serait de pouvoir se représenter tous les divers phénomènes observables comme des cas particuliers d'un seul fait général**, tel que celui de la gravitation, par exemple.

7. *En thèse philosophique générale . . .*

J'ai constaté d'abord la définition de la mathématique d'Auguste Comte, et puis celle de la science en général. Selon lui, toutes les sciences ont pour but de *déterminer des phénomènes les uns par les autres, d'après les relations qui existent entre eux* ; dans la mathématique, la relation signifie l'*équation* ; Cette dernière se définit par la notion de *fonction*, c'est-à-dire la quantité *variable* qui dépend suivant une loi d'autres quantités variables ; si la loi des phénomènes naturels comprend une ou plusieurs quantités variables, elle exprime *toutes les cas possibles* des phénomènes naturels.

Mais, malgré qu'il donne l'importance à l'esprit mathématique, Comte n'est-il pas conscient de la *limite* de la mathématique ? Comte dit, il est vrai, que c'est "par les mathématiques que la philosophie positive a commencé à se former : c'est d'elles que nous vient la méthode." Pourtant, ne déclare-t-il pas que la mathématique, "berceau [de la positivité] ne saurait être un trône" ? En réalité, après avoir considéré la définition de la mathématique, Comte envisage également "les grandes limitations qui, vu la faiblesse de notre intelligence, rétrécissent singulièrement **son domaine effectif**, à mesure que les phénomènes se compliquent en se spécialisant."

Il y a deux obstacles principaux. D'abord, pour découvrir la relation entre des phénomènes naturels, il faut obtenir des *nombres fixes*. Mais, si le phénomène considéré est sous l'influence du "**grand nombre d'agens divers déterminant**," on ne peut pas éluder "la variabilité irrégulière des effets." Donc, "c'est seulement au plus pour les trois premières," *i.e.* l'astronomie, la physique, la chimie, alors que la biologie, *a fortiori* la sociologie, "sont nécessairement inaccessibles . . . à notre analyse mathématique, en vertu de l'extrêtme variabilité numérique des phénomènes correspondants."

Ensuite, "nos faibles moyens" interdit de mathématiser les phénomènes naturels sous plusieurs conditions. Par exemple, "le phénomène très-simple de l'écoulement d'un fluide, en vertu de sa seule pesanteur, par un orifice donné, n'a pas jusqu'à présent de solution mathématique complète" ; et puis "le mouvement encore plus simple d'un projectile solide dans un milieu résistant" ; enfin "le mouvement de deux corps tendant l'un vers l'autre en vertu de leur gravitation, l'influence d'un troisième corps agissant sur tous deux de la même manière."

Alors, quant à la physique organique, Comte repousse-t-il enfin la définition de la science en général ? Je crois que *non*. En fait, après avoir décrit le domaine effectif de la mathématique, il dit :

> Nous devons, pour les phénomènes les plus compliqués, nous contenter d'analyser avec exactitude **les circonstances de leur production**, **de les rattacher les uns aux autres d'une manière générale**, **de connaître le genre d'influence qu'exerce chaque agent principal**, etc. ; mais sans les étudier sous le point de vue de la quantité. . . .

Même ici, on peut apercevoir une marque de l'esprit mathématique. Malgré qu'il soit interdit de *quantifier* les phénomènes compliqués, on doit *rattacher les phénomènes les uns aux autres d'une manière générale*. Cette énoncé, n'évoque-t-elle pas la "méthode générale," qui "consiste à les [des grandeurs] **rattacher** à d'autres qui soient susceptibles d'être déterminées immédiatement, et d'après lesquelles on parvient à découvrir les premières, au moyen des relations qui existent entre les unes et les autres" ?

De plus, Comte distingue deux points de vue différents. D'une part, sous le point de vue *réel,* il tente de "circonscrire aussi exactement que possible **son extension effective**." D'autre part, sous le point de vue *logique*, il dit :

> il est indispensable de reconnaître avant tout, pour se faire une juste idée de la véritable nature des mathématiques, que, **sous le point de vue purement logique**, cette science est, par elle-même, nécessairement et rigoureusement universelle.
>
> quand il s'agit de concevoir **abstraitement** toute la portée intellectuelle d'une science, il importe de lui supposer l'extension totale dont elle est **logiquement** susceptible.
>
> Pour concevoir nettement la véritable nature d'une science, il faut **toujours la supposer parfaite**.

Et ce qui me semble important, c'est qu'il suppose, en tant qu'*hypothèse*, la *quantifiabilité* de tous les phénomènes naturels, l'existence des lois *mathématiques* dans tous les ordres de phénomènes. Malgré qu'il soit impossible de quantifier des phénomènes compliqués *en réalité*,

> Ce n'est pas néanmoins qu'on doive cesser . . . de concevoir, **en thèse philosophique générale**, les phénomènes de tous les ordres comme nécessairement soumis par eux-mêmes à des lois mathématiques, que nous sommes seulement condamnés à ignorer toujours dans la plupart des cas, à cause de la trop grande complication des phénomènes.
>
> s'il était possible d'isoler rigoureusement chacune des causes simples qui concourent à produire un même phénomène physiologique, tout porte à croire qu'elle se montrerait douée, dans des circonstances déterminées, d'un genre d'influence et d'une quantité d'action aussi exactement fixes que nous le voyons dans la gravitation universelle, véritable type des lois fondamentales de la nature. . . . On ne peut douter que **chacun des nombreux agens qui concourent à la production de ces phénomènes ne soit soumis séparément à des lois mathématiques**, quoique nous ignorions encore la plupart d'entr'elles.
>
> la conception fondamentale de Descartes sur la relation du concret à l'abstrait en mathématiques, a prouvé que toutes les idées de qualité étaient réductibles à des idées de quantité . . . il n'y a pas maintenant de géomètres qui ne la considèrent, **dans un sens purement théorique**, comme pouvant s'appliquer à toutes nos idées réelles quelconques, en sorte que tout phénomène soit **logiquement susceptible** d'être représenté par une équation, aussi bien qu'une courbe ou un mouvement.

Pour lui, tous les deux points de vue sont également importants. Comte dit : "Autant il importait de rendre sensible la rigoureuse universalité **logique** de la science mathématique, autant je devais signaler les conditions qui limitent pour nous son extension **réelle**."

8. Conclusion

J'ai jusqu'ici analysé la philosophie mathématique d'Auguste Comte pour saisir sa spécificité. Mais, comment pourrait-on dire que cet exposé a pu montrer sa philosophie des sciences comme *nouvelle*? À la vérité, c'est une philosophie des sciences plutôt *ancienne*, parce que certains philosophe des sciences comme Gaston Bachelard et Ernst Cassirer l'ont formulée dans la première moitié du 20e siècle. Ancienne, mais pas du tout obsolète. Lorsque Pierre Bourdieu, sociologue contemporain, a fait conférence à l'université de Tokyo en 1989, en faisant référence aux noms de Bachelard et Cassirer, il a expliqué que sa philosophie des sciences consiste à considérer "la particularité d'une réalité empirique" "comme cas particulier du possible," "comme un cas de figure dans un univers fini de configurations possibles." Bourdieu a montré la possibilité d'appliquer la philosophie des sciences, dite *relationnelle*, à des phénomènes sociaux. Ne pourrait-on pas dire que cette philosophie soit même aujourd'hui féconde? De toute façon, cet exposé, j'espère, a pu montré que cette philosophie des sciences s'est déjà apparue, même implicitement, dans la philosophie des sciences d'Auguste Comte, avant plus d'un siècle de la parution du *nouvel esprit scientifique* (1934).