ハーディ空間上の作用素論と不定値内積空間[1]

瀬戸 道生（防衛大学校）

[1]**本研究は** JSPS **科研費** JP15K04926, JP16K05190 **の助成を受けたものです．**

Schur クラスと作用素論

$\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ とする．

$$\mathcal{S}(\mathbb{D}) := \{\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : |\varphi(\lambda)| < 1 \ (\lambda \in \mathbb{D})\} \quad \text{(Schur クラス)}$$

$$= \{\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \frac{1 - \overline{\varphi(\lambda)}\varphi(z)}{1 - \overline{\lambda} z} \text{ is positive semi-definite}\}$$

$$\frac{1 - \overline{\varphi(\lambda)}\varphi(z)}{1 - \overline{\lambda} z} \text{ is positive semi-definite} \overset{def}{\Leftrightarrow} \sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \frac{1 - \overline{\varphi(\lambda_i)}\varphi(\lambda_j)}{1 - \overline{\lambda_i}\lambda_j} \geq 0$$

$$(n \in \mathbb{N}, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{D})$$

Schur クラスと作用素論

$$\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$$

$$\mathbb{H} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ \lambda > 0\}$$

Schur : $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ **（今日の話）**

Pick : $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ **（作用素単調関数の Loewner 理論）**

Herglotz : $\mathbb{D} \to e^{-\pi i/2}\mathbb{H}$ **（単葉関数の Loewner 理論）**

Schur クラスと作用素論

ハーディ空間

$$H^2(\mathbb{D}) := \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 < \infty \ (f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n)\}$$

$H^\infty(\mathbb{D})$: $\mathbb{D}$ **上の有界正則関数の全体**

テープリッツ作用素

$$T_\varphi : f \mapsto \varphi f \quad (\varphi \in H^\infty(\mathbb{D}), f \in H^2(\mathbb{D}))$$

セゲー核

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \overline{\lambda} z} \quad (\lambda \in \mathbb{D})$$

- $f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle$
- $\langle f, T_\varphi^* k_\lambda \rangle = \langle T_\varphi f, k_\lambda \rangle = \langle \varphi f, k_\lambda \rangle = \varphi(\lambda) f(\lambda) = \langle f, \overline{\varphi(\lambda)} k_\lambda \rangle.$

Schur クラスと作用素論

$$\langle (I - T_\varphi T_\varphi^*) \sum_{i=1}^n c_i k_{\lambda_i}, \sum_{j=1}^n c_j k_{\lambda_j} \rangle$$

$$= \langle \sum_{i=1}^n c_i k_{\lambda_i}, \sum_{j=1}^n c_j k_{\lambda_j} \rangle - \langle T_\varphi^* \sum_{i=1}^n c_i k_{\lambda_i}, T_\varphi^* \sum_{j=1}^n c_j k_{\lambda_j} \rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} \frac{1}{1 - \overline{\lambda_i} \lambda_j} - \sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} \frac{\overline{\varphi(\lambda_i)} \varphi(\lambda_j)}{1 - \overline{\lambda_i} \lambda_j}$$

$$= \sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} \frac{1 - \overline{\varphi(\lambda_i)} \varphi(\lambda_j)}{1 - \overline{\lambda_i} \lambda_j}.$$

$$\therefore \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D}) \Leftrightarrow \| T_\varphi \| \leq 1 \Leftrightarrow I - T_\varphi T_\varphi^* \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \overline{\varphi(\lambda)} \varphi(z)}{1 - \overline{\lambda} z} \geq 0.$$

Schur クラスと作用素論

Schur クラスの登場するテーマ

1. Pick の補間問題
2. H^∞-実現公式
3. de Branges-Rovnyak 空間
4. von Neumann の不等式
5. Littlewood の定理（$H^2(\mathbb{D})$ 上の合成作用素の有界性）

- 1〜3 では $\dfrac{1-\overline{\varphi(\lambda)}\varphi(z)}{1-\overline{\lambda}z}$ の正定値性が本質的．
- von Neumann の不等式には次のような証明法がある．

Schur クラスと作用素論

von Neumann の不等式の証明

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$, $\|T\| < 1$ とする．このとき，

$$0 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_C \int_C (z - T)^{-1}(I - TT^*)(\overline{w} - T^*)^{-1} \frac{1 - \overline{\varphi(w)}\varphi(z)}{1 - \overline{w}z} \, dz d\overline{w}$$

$$= I - \varphi(T)\varphi(T)^*.$$

この計算は二つの理論のもとである．

- Drury-Agler の functional calculus
- Schur-Agler クラスの理論

Drury-Agler の functional calculus（３つの例）

ハーディ空間 $H^2(\mathbb{D})$ の場合

$$H^2(\mathbb{D}) := \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 < \infty \ (f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n)\}$$

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \overline{\lambda} z}$$ **（セゲー核）**

$$\frac{1}{k_\lambda(z)} = 1 - \overline{\lambda} z \mapsto I - TT^*.$$

- $\sigma(T) \subset \mathbb{D}$ and $I - TT^* \geq 0 \to$ **ロタの表現定理．**
- $I - TT^* = 0 \to$ **等距離作用素の理論．**

Drury-Agler の functional calculus（３つの例）

ベルグマン空間 $B^2(\mathbb{D})$ の場合

$$B^2(\mathbb{D}) := \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}|\widehat{f}(n)|^2 < \infty \ (f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n)\}$$

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{(1-\overline{\lambda}z)^2}$$ **（ベルグマン核）**

$$\frac{1}{k_\lambda(z)} = 1 - 2\overline{\lambda}z + \overline{\lambda}^2 z^2 \mapsto I - 2TT^* + T^2 T^{*2}.$$

- $\sigma(T) \subset \mathbb{D}$ and $I - 2TT^* + T^2 T^{*2} \geq 0 \to$ **ロタ型の表現定理**
- $I - 2TT^* + T^2 T^{*2} = 0 \to$ 2-isometry **の理論．**
- $B^2(\mathbb{D}) \cong (H^2(\mathbb{D}) \otimes H^2(\mathbb{D}))/[z_1 - z_2].$

Drury-Agler の functional calculus（３つの例）

ハーディ空間 $H^2(\mathbb{D}^2)$ の場合

$$H^2(\mathbb{D}^2) := H^2(\mathbb{D}) \otimes H^2(\mathbb{D})$$

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{(1-\overline{\lambda_1}z_1)(1-\overline{\lambda_2}z_2)} = \frac{1}{1-\overline{\lambda_1}z_1-\overline{\lambda_2}z_2+\overline{\lambda_1\lambda_2}z_1z_2}$$

$$\frac{1}{k_\lambda(z)} \mapsto I - T_1T_1^* - T_2T_2^* + T_1T_2T_1^*T_2^* \quad (T_1T_2 = T_2T_1).$$

- $\|T_j\| < 1$ $(j = 1, 2)$ and $I - T_1T_1^* - T_2T_2^* + T_1T_2T_1^*T_2^* \geq 0$

  $\to \|\varphi(T_1, T_2)\| \leq \|\varphi\|_\infty$（安藤の不等式の特別な場合）

ここまでのまとめ

- Drury-Agler の functional calculus から悪くない自己共役作用素が得られる．
- その自己共役作用素に正定値性を仮定すれば，伝統的な作用素論をほぼそのまま再現できる．
- このように，正定値性をもとにした作用素論は十分に発展した．
- ところが，安藤先生の不等式はこの枠組みだけでは捉え切れない．
- 中路先生が $H^2(\mathbb{D}^2)$ 上の作用素論を始めたきっかけは安藤先生の不等式であると聴いたことがある．Agler-McCarthy も同様な考えをもっているようである．

$H^2(\mathbb{D}^2)$ 上の作用素論

$$H^2(\mathbb{D}^2) := H^2(\mathbb{D}) \otimes H^2(\mathbb{D})$$ （$\mathbb{D}^2$ 上のハーディ空間）

$$A(\mathbb{D}^2) := \overline{\mathbb{C}[z_1, z_2]}^{\|\cdot\|_\infty}$$ （bidisk 環）

$$A(\mathbb{D}^2) \times H^2(\mathbb{D}^2) \to H^2(\mathbb{D}^2) \quad (\varphi, f) \mapsto \varphi f$$

（$H^2(\mathbb{D}^2)$ は $A(\mathbb{D}^2)$ を係数環とするヒルベルト加群）

$\mathcal{M}$ を上の意味での $H^2(\mathbb{D}^2)$ の（閉）部分加群とし，
$\mathcal{M}$ 上の作用素 R_φ を次のように定める．

$$R_\varphi : f \mapsto \varphi f \quad (\varphi \in A(\mathbb{D}^2),\ f \in \mathcal{M}).$$

- 可換な等距離作用素の組 (R_{z_1}, R_{z_2}) を調べたい．

$H^2(\mathbb{D}^2)$ 上の作用素論

R_{z_1} と R_{z_2} に Drury-Agler の functional calculus を適用して，

$$\Delta_{\mathcal{M}} := I_{\mathcal{M}} - R_{z_1}R_{z_1}^* - R_{z_2}R_{z_2}^* + R_{z_1}R_{z_2}R_{z_1}^*R_{z_2}^*$$

と定める．

- 一般に $\Delta_{\mathcal{M}} \geq 0$ とは限らない．
- $\Delta_{\mathcal{M}} \geq 0$ のときは，$\mathcal{M}$ は $H^2(\mathbb{D}^2)$ とユニタリ同型．
- $\Delta_{\mathcal{M}}$ は Yang (SUNY, Albany) により詳しく研究されている．

Drury-Agler の理論を踏まえると，Yang の研究の主要な部分が次のように簡潔にまとめられることに気づいた．

$H^2(\mathbb{D}^2)$ 上の作用素論

定理 3.1 (Wu-S-Yang)

$\mathcal{M}$ を $H^2(\mathbb{D}^2)$ の部分加群とする．

$\operatorname{rank} \Delta_{\mathcal{M}} = 3$ のとき，$\Delta_{\mathcal{M}}$ のスペクトル分解を

$$\Delta_{\mathcal{M}} = \varphi_1 \otimes \varphi_1 + \varphi_2 \otimes \varphi_2 - \varphi_3 \otimes \varphi_3$$

と表せば，$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ は次の 1 と 2 を満たす．

1. $T_{\varphi_1} T_{\varphi_1}^* + T_{\varphi_2} T_{\varphi_2}^* - T_{\varphi_3} T_{\varphi_3}^* \subset P_{\mathcal{M}}$,
2. $T_{\varphi_1}^* T_{\varphi_1} + T_{\varphi_2}^* T_{\varphi_2} - T_{\varphi_3}^* T_{\varphi_3} \subset I_{H^2}$.

Remark

- 一般に $\operatorname{rank} \Delta_{\mathcal{M}}$ が有限の場合も同様のことが成立．
- 現時点では $T_{\varphi_1}, T_{\varphi_2}, T_{\varphi_3}$ は一般に非有界．

$H^2(\mathbb{D}^2)$ 上の作用素論

系 (Wu-S-Yang)

次の 1 **と** 2 **を満たす** $\mathbb{D}^2$ **上の正則関数の三つ組** $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ **が存在する．**

1. $0 \leq |\varphi_1(\lambda_1, \lambda_2)|^2 + |\varphi_2(\lambda_1, \lambda_2)|^2 - |\varphi_3(\lambda_1, \lambda_2)|^2 \leq 1 \qquad ((\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{D}^2)$
2. $|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 - |\varphi_3|^2 = 1$ *a.e. on* $\mathbb{T}^2$ $(\mathbb{T} = \partial\mathbb{D})$.

- **実はこの系に先に気づいた．**
- $H^2(\mathbb{D}^2)$ **には双曲構造が隠れていた（？）．**
- **定理** 3.1 **は不定値内積空間を経由して得られた．**

$H^2(\mathbb{D}^2)$ 上の作用素論

例 3.1

$\mathcal{M}$: z_1, z_2 で生成される $H^2(\mathbb{D}^2)$ の部分加群

このとき，

$$\varphi_1 = z_1, \quad \varphi_2 = z_2, \quad \varphi_3 = z_1 z_2.$$

特に，

$$|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 - |\lambda_1\lambda_2|^2 = |\lambda_1|^2 + (1 - |\lambda_1|^2)|\lambda_2|^2 \geq 0$$

かつ

$$1 - (|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 - |\lambda_1\lambda_2|^2) = (1 - |\lambda_1|^2)(1 - |\lambda_2|^2) \geq 0.$$

$H^2(\mathbb{D}^2)$ 上の作用素論

次の表にたどり着く.

空間	$H^2(\mathbb{D})$	$H^2(\mathbb{D}^2)$
内部での不等式	$\lvert\varphi\rvert^2 \leq 1$	$0 \leq \lvert\varphi_1\rvert^2 + \lvert\varphi_2\rvert^2 - \lvert\varphi_3\rvert^2 \leq 1$
境界での等式	$\lvert\varphi\rvert^2 = 1$	$\lvert\varphi_1\rvert^2 + \lvert\varphi_2\rvert^2 - \lvert\varphi_3\rvert^2 = 1$
数学の型	楕円型（？）	双曲型（？）

双曲的な作用素論

有界線型作用素のレベルで

$$T_{\varphi_1} T_{\varphi_1}^* + T_{\varphi_2} T_{\varphi_2}^* - T_{\varphi_3} T_{\varphi_3}^* \subset P_{\mathcal{M}}$$

を一般化して，

$$0 \leq T_1 T_1^* + T_2 T_2^* - T_3 T_3^* \leq I$$

を考える．

自明な例

Douglas **の定理から** ran $T_2 \supseteq$ ran T_3 **であれば，** $T_2 T_2^* \geq T_3 T_3^*$.
よって，任意の T_1 **に対し，**

$$0 \leq T_2 T_2^* - T_3 T_3^* \leq T_1 T_1^* + T_2 T_2^* - T_3 T_3^*$$

あとは十分大きな定数で割ればよい．

双曲的な作用素論

$H^2(\mathbb{D})$ での例

$$\| \begin{pmatrix} T_{\varphi_1} & T_{\varphi_2} \end{pmatrix} \|, \quad \| \begin{pmatrix} T_{\psi_1} \\ T_{\psi_2} \end{pmatrix} \| \leq 1$$

を満たす $\mathbb{D}$ **上の有界正則関数** $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ **を考える．このとき，**

$$\varphi_3 = \varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

とおけば，一般化された Toeplitz-Corona **定理により，**

$$0 \leq T_{\varphi_1} T_{\varphi_1}^* + T_{\varphi_2} T_{\varphi_2}^* - T_{\varphi_3} T_{\varphi_3}^* \leq T_{\varphi_1} T_{\varphi_1}^* + T_{\varphi_2} T_{\varphi_2}^* \leq I_{H^2}$$

が成り立つ．

双曲的な作用素論

$H^2(\mathbb{D}^2)$ での例

定理 3.1 **にて，** $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ **が有界と仮定する（このような例は豊富にある）．このとき，**

$$0 \le T_{\varphi_1} T_{\varphi_1}^* + T_{\varphi_2} T_{\varphi_2}^* - T_{\varphi_3} T_{\varphi_3}^* = P_{\mathcal{M}} \le I_{H^2}.$$

- $\forall f \in \mathcal{M} \quad f = \varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_2 - \varphi_3 g_3 \quad (g_j := T_{\varphi_j}^* f).$
- **岡**-Cartan-Guo **の定理によれば，**$\mathcal{M}$ **が** ψ_1, ψ_2, ψ_3 **で生成されるとき，**

$$\forall f \in \mathcal{M} \quad \exists h_1, h_2, h_3 \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}^2) \quad \text{s.t.} \quad f = \psi_1 h_1 + \psi_2 h_2 + \psi_3 h_3.$$

- $H^2(\mathbb{D})$ **における例では正定値性（**complete Pick property**）を用いたが，**$H^2(\mathbb{D}^2)$ **にはその正定値性がない．**

双曲的な作用素論

定理 3.2 (S-**内山**)

$\mathcal{H}$: **ヒルベルト空間**

$$\forall T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad \text{s.t.} \quad 0 \leq T_1 T_1^* + T_2 T_2^* - T_3 T_3^*$$

$$T := (T_1 T_1^* + T_2 T_2^* - T_3 T_3^*)^{1/2}$$

このとき，

$$\forall u \in \operatorname{ran} T \quad \exists z_1(n), z_2(n), z_3(n) \in \mathcal{H} \quad \text{s.t.}$$

(i) $\|T_1 z_1(n) + T_2 z_2(n) - T_3 z_3(n) - u\|_{\mathcal{H}} \to 0 \ (n \to \infty)$,

(ii) $0 \leq \|z_1(n)\|_{\mathcal{H}}^2 + \|z_2(n)\|_{\mathcal{H}}^2 - \|z_3(n)\|_{\mathcal{H}}^2 \uparrow \|u\|_{\mathcal{M}(T)}^2 \ (n \to \infty)$

ここで， $\|\cdot\|_{\mathcal{M}(T)}$ **は** T **による引き戻しノルム．**

双曲的な作用素論

rank $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}$ の生成系の最小濃度

rank $\mathcal{M}$ について知られていること

- $\dim \mathcal{M}/[(z_1-\lambda_1)\mathcal{M}+(z_2-\lambda_2)\mathcal{M}] \leq \operatorname{rank}\mathcal{M} \quad (\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{D})$
- $\mathcal{M}$ が Blaschke 積の列で生成される場合の研究（泉池）

定理 3.3 (S)

任意の $\mathcal{M}$ に対し，

$$\operatorname{rank}\mathcal{M} \leq \frac{\operatorname{rank}\Delta_{\mathcal{M}}+1}{2}$$

が成り立つ．

- この不等式は一般にこれ以上改良できない（$\because$ 例 3.1）．

まとめ

空間	$H^2(\mathbb{D})$	$H^2(\mathbb{D}^2)$
内部での不等式	$\lvert\varphi\rvert^2 \leq 1$	$0 \leq \lvert\varphi_1\rvert^2 + \lvert\varphi_2\rvert^2 - \lvert\varphi_3\rvert^2 \leq 1$
境界での等式	$\lvert\varphi\rvert^2 = 1$	$\lvert\varphi_1\rvert^2 + \lvert\varphi_2\rvert^2 - \lvert\varphi_3\rvert^2 = 1$
数学の型	楕円型（？）	双曲型（？）