

20世紀に入る頃、それまでの物理学には適用限界があることが明らかになり、二つの新しい理論体系が生まれました。そのひとつは前報で紹介した量子論、もうひとつがここで紹介する相対性理論（正確には特殊相対性理論）です。

質量の新しい定義を導くためには、特殊相対性理論の前提となる「光速不変の原理」と、その帰結としての「質量とエネルギーの等価性」が必要となります。ここでは極単純化して、高校レベルの物理学（運動方程式）と数学（微分と三角関数）で説明してみましよう（無謀！）。

19世紀当時、光の伝播と運動の関係について様々な解釈と検討が行われました。この代表的な例が図1に示す実験です。光源A、ハーフミラー（半透明の鏡）B、そしてBから等距離Lに二つの鏡C、Eがしっかりした台に取り付けられています。光がBで二分され、それぞれC、Eで反射してBに戻り、その光はD、Fとして再び一つの光となります。光は波なので、この時同じLの道のりを往復した光はぴったり同じ位相になり、干渉で光を強め合います。

さて、つぎにこの装置全体が左の方向に速度vで動いていたとしましょう。光がEに向かって進む間に、Eは速度vで左に進むので、光が到達する時の位置はE'になっているはずですが、そこで反射してBに戻ってくる間には、さらに時間が経つのでBはB'の位置にいるはずですが、

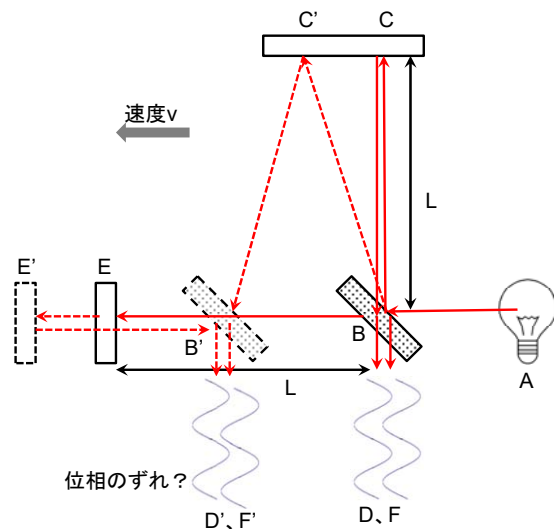


図1. マイケルソン-モーレイの実験

一方Cに進んだ光はB→C'、C'→B'と戻ってきます。このみちのりは丁度二等辺三角形の2辺に相当するので、三平方の定理で算出できます。光の速さをcとすると、こうして光が経由するそれぞれの距離と、それを進むのに要する時間は、表1のようになります。

表1. 動いている時の光路距離と要する時間

区間	区間距離	要する時間	合計時間
B→E'	$L + vL/(c-v)$	$L/(c-v)$	$\frac{2Lc}{c^2-v^2}$
E'→B'	$L - vL/(c+v)$	$L/(c+v)$	
B→C'	$L\sqrt{1+v^2/(c^2-v^2)}$	$L/\sqrt{c^2-v^2}$	$\frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}}$
C'→B'	$L\sqrt{1+v^2/(c^2-v^2)}$	$L/\sqrt{c^2-v^2}$	

今後のためにそれぞれの合計時間を次のように変形しておきます。

$$\text{時間 } B \rightarrow E' \rightarrow B' : \frac{2L/c}{1-v^2/c^2} \quad (1) \quad \text{時間 } B \rightarrow C' \rightarrow B' : \frac{2L/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (2)$$

移動速度vは光速cより小さいので、二つの時間を比べると(1)の方が長く（分母が小さい）、すなわちB→E'→B'と進んだ光の方が遅れて戻るので、この違いがそのままD'、F'において光の位相のずれとなるはずですが。

当時この実験では装置を地球の自転・公転方向に合わせて速度  $v$  を与え、光速  $c$  との比を求めようとしてしました。(地球の自転は赤道付近で時速 1600km 余りに相当する) ところがどんなに注意深く測定しても、地球の速度から予想された位相のずれは観測されなかったのです。当時の物理学者が理由について様々検討するなか、アインシュタインは、光の進む速さは運動に左右されない、「光速度不変の原則」を前提としました。そして逆に時間が運動によって伸び縮みする、と考えたのです。 $v$  で運動している時は(1)、(2)式の分母の違いに相当する  $\sqrt{1-v^2/c^2}$  (3)

だけ、時間がゆっくり進むので、結局遅れず同じタイミングで B' に到達するとして矛盾を解消したのです。(ただし  $c$  は秒速約 30 万 km と莫大な速さなので日常的な運動においては  $\sqrt{1-v^2/c^2} \approx 1$  となり無視しうる)

誰にとっても同一と思われた時間が、運動によって進み方が変わる、というのはにわかに信じがたい事です、理由はともかく実験結果を説明する理論体系が示されたのです[1]。さて、ここからはこの理論によって改めて物体の運動がどう記述されるか、思考実験をしてみます。

同じ質量を持つ 2 つの物体が完全弾性衝突して、跳ね返る時の運動を考えてみましょう。静止時の物体の質量を改めて  $m_0$ 、そして今後のために速度  $v$  における質量は添字をつけて  $m_v$  と表すことにします。

その様子を示したのが図 2 です。平面上で左右方向の座標を  $x$ 、奥行き方向の座標を  $z$  とします。手前と奥手から同じ速度の物体が同じ進入角度で原点で衝突したとします。衝突の前後で運動量が保存されるので、観測者が静止していたら衝突前後では丁度鏡の反射のように、物体それぞれ速度の符合が反転するだけのように見えるはずですが、衝突の前後で物体の運動量はそれぞれ保存され、その合計は零になります。

では次に図 3 のように、観測者が一方の物体 1 の  $x$  軸成分と同じ速度  $u$  で  $x$  軸方向に併走しながら観測したと考えましょう。観測者にとって物体 1 は、図 4 に示すように水平方向の速度は零で、 $z$  軸方向に速度  $w$  で手前から遠ざかるように見えます。そして衝突の刹那、物体 1 は逆に速度  $w$  で手前に近づくように見えます。図 2、図 4 は同じ現象を視点を変えて見ているだけ

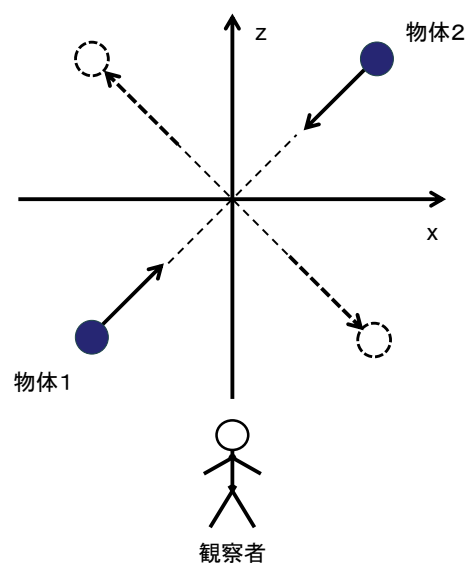


図 2. 質量・速度の等しい 2 つの物体の衝突

なので、図4においても二つの物体の運動量合計は零になるはずですが。

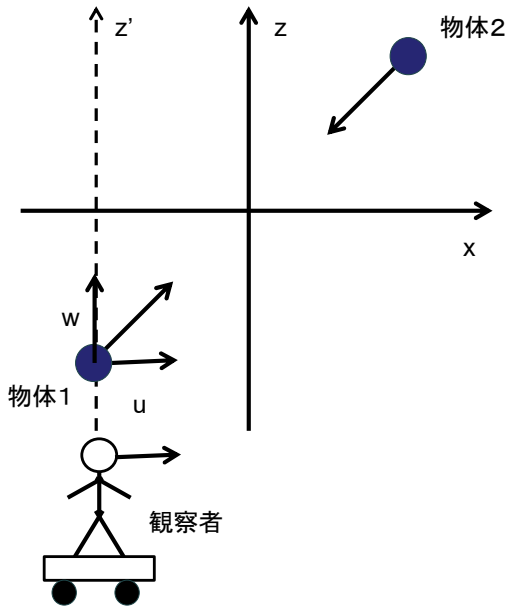


図3. 観察者が物体1の x 速度成分で併走した時

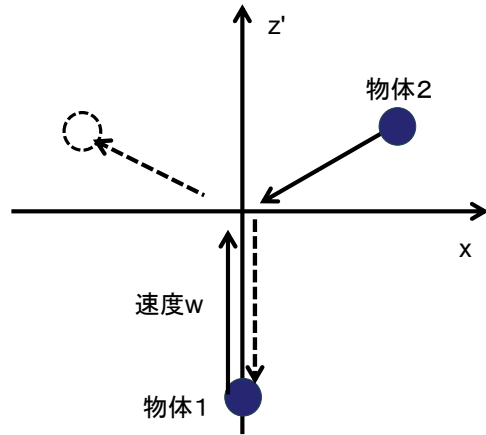


図4. 観察者から見た時の 2つの物体の運動

ところで運動量は質量×速度で表されます。そして速度は変位を  $x$ 、時間を  $t$  とすると変位の時間微分、すなわち  $v = dx/dt$  となります。ところがこの式には時間は誰にとっても一定に進む、という暗黙の前提が含まれています。運動によって時間が変動するのであれば、その速度は観測者にとっての変位を、観測者にとっての時間で微分しなければなりません。

図3において物体1の  $z$  軸方向運動量変化は  $2m_w w$ （衝突前後で方向が変わるので2がつく）ですが、物体2については観測者の速度  $u$  を考慮すると  $z$  軸方向の運動量は式(3)から  $w\sqrt{1-u^2/c^2}$  としなければなりません。そしてその運動量は質量を  $m_v$  として  $2m_v w\sqrt{1-u^2/c^2}$  となります（これも衝突前後で方向が変わるので2がつく）。衝突前後で  $z$  軸方向の運動量が変わらないので、この二つの運動量変化は互いに打ち消し合い、

$$2m_w w = 2m_v w\sqrt{1-u^2/c^2} \quad \text{すなわち} \quad \frac{m_w}{m_v} = \sqrt{1-u^2/c^2} \quad \text{となり、運動によって}$$

質量が変化するという不思議な関係が導かれます（これも光速が莫大な故通常は無視する）。

図5のように物体が直線上で衝突する、 $w=0$  の時を考えると、速度  $u$  で運動する物体の質量は、静止時の質量  $m_0$  で  $m_u = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$  と表せることになりま

す。

ここで右辺を  $m_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}$  とし、級数

展開（これは高校数学の範疇を超えますが）し、第3項以下を無視すると

$m_u \cong m_0 + \frac{1}{2} m_0 u^2 \left(\frac{1}{c^2}\right)$ 。さらにこの両辺に

$c^2$  を乗ずると  $m_u c^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2$  となり

ます。この時の単位はエネルギー（ジュールすなわち  $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ ）に他なりません。

そして右辺第2項はVol. 69の最後で示したとおり、ニュートン力学でも得られる運動エネルギーに相当します。

アインシュタインはこれらの関係からエネルギーと質量の等価性、 $E = mc^2$  という有名な式を導きました[2]。

浅学を顧みなかったせいで量子論と特殊相対性理論の説明にいささか時間を費やし過ぎましたが、質量の再定義を考えている私たちにとって、

- ・ エネルギーの最小単位（量子化単位）はプランク定数で与えられる
- ・ 質量とエネルギーは等価である

という関係が得られた事が収穫です。こうして質量をプランク定数で表現することが可能であることが保証されるのです。とはいえ理論的には正しくとも、それを実験的に実現（現示）出来なければ、どんなに科学的に厳格な定義も文字通り画に描いた餅です。次は取り組まれてきた現示方法について論じたいと思います。

（現示編に続く）

[1]アインシュタインによる光速不変の原理と光と運動に対する考察は Einstein, von A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper, in Annalen der Physik.17:891, 1905 で報告されましたが、この論文では純粋に思考実験で諸関係を導いています。本人がマイケルソン・モーレイの実験を知っていたかは諸説あるようです。

[2]アインシュタインは Einstein, von A., Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? Annalen der Physik (Leipzig) 323 (13): 639-641, 1905 において、光の放射による運動量の思考実験により質量とエネルギーの等価性を導いています。

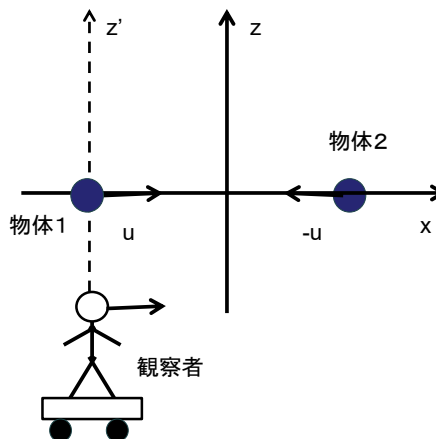


図5. z方向の速度が零の場合