圏論的双対性の理論入門*

丸山 善宏
Quantum Group, Dept. of Computer Scinece, Oxford University
maruyama@cs.ox.ac.uk

2012 年 9 月

1 プラン

今回の話では大体以下のようなことを解説する（これは必ずしも本文の記述の流れに沿うものではない）：

1. 「言葉の意味とは何か」という古い問いがある。
2. 論理学は、構文論（言葉）と意味論（指示的な意味）という二項対立の形でそれを深化させてきた。通常は後者の指示的な意味論のみが「意味論」とされがちだが、前者もまた意味に関する一つの視点、推論主義的な視点を与えているのであり、意味論という名に値する（最近では証明論的意味論と呼ばれる）。
3. 圏論的双対性、特にストーン双対性は、意味に関するそれら二つの対立する視点を関連づけ、それらの等価性を明らかにする（つまり、意味についての二項対立から出発しながら、両者の関係性を徹底的に追求することにより、最終的にはその対立を超えていく。その意味で、duality は “transdichotomy”、超二項対立とも言うべきもの）。
4. 構文論と意味論の等価性とは完全性定理の趣旨であり、それは順序集合のレベルでの、理論とモデルの双対性を表現する。ストーン双対性は完全性が導く順序集合的双対性の圏論的拡張である。
5. これと全く平行した状況が、代数幾何における、ヒルベルト零点定理が導く順序集合的双対性と、k 代数と代数多様体の反変圏同値の間にある。有限体の場合にはこのアナロジーは現金化できる。

* これは京都大学総合人間学部の以前所属した研究室で研究内容の紹介を頼まれた際に準備した資料。数学セミナーの記事「圏論的双対性の論理」を補足する狙いだったが、急ぎ足で書かれたため甚だ不十分。機会があれば大幅に加筆修正して完成させたい。

6. 簡単に言えば、双対性は「多く語れば（言葉が増えれば）意味が限定される」ということに他ならない。論理式や多項式が増えれば、それらを満たすモデルないし点（= 数学的にはともに素イデアル）は減少する。

7. 別の視点から簡単に言えば、双対性とは「二つの引数のスワップ」である（Keimel）。種々の反変随伴と、反変随伴の一般理論は実際にこういった側面を持っている（しかし他の重要な側面もある）。

8. 双対性が圏論的に表現されるべきというのは本当は自明ではない。現在ではそれが標準であるにせよ、それが不適切であるような場合も実際存在する。

9. しかし、圏論的な双対性の概念定義は、数学における一つの有効な普遍的normを与える（圏論のuniversal normativity）。圏論的な理論構築による一般的な双対性定理は、（単なるexplanationを超え出た）一つのunderstandingを与える（圏論のunderstanding conferrabilty）。圏論の技術は絵的議論に満ちており、絵は数学の存在論を提供するものとさえ捉えられる（圏論のontological picturalism）。以上のことは、圏論の三つの主要特性（universal normativity, understanding conferrabilty, ontological picturalism）を例示している。

数学的な内容としては、証明等をする時間はないので、基本的に易しい例による双対性理解を目指す。特に三つの例を挙げる。いずれの例でも、「二つの圏に住む一つの対象」という、双対性理論の基本アイデアが背後にある。

一つ目（有限的双対性）：古典論理のストーン双対性を理解するため、古典論理のリンデンバウム代数とカントル空間が対応することを見る。完全性が双対性の帰結であること、排中律が空間のゼロ次元性を意味すること（直観主義論理に対応する空間は無限次元であること）、普遍代数的な見地からは古典論理の関数的完全性がストーン双対性成立の肝となること、ストーン双対性と代数幾何の双対性の関連（或は完全性と零点定理の関連）などがこの例から分かる。古典論理以外の論理の場合に双対性のどの部分が変わるかも見る。

二つ目（無限的双対性）：幾何的論理のストーン双対性（これは無限的双対性）を理解するため、ユークリッド位相をもつ $\mathbb{R}$ と、ザリスキー位相をもつ $\mathbb{C}$ を、それぞれの二重双対と比較する（開集合系の構造から元の構造がいかにして復元できるかという問題）。幾何的論理の通常の双対性が一般には（双対同値ではなく）双対随伴でしかないことと、異なる点概念（主に素イデアルと極大イデアル）は異なる双対性を与えることなどが分かる。

三つ目（双対随伴の一般理論）：$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{-}, \Omega) : \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ という関手が自分自身の随伴であるということ。ここで Ω は任意の集合だが、$\{0, 1\}$ の場合が最も基本的。大抵の双対随伴は、この随伴の一方の圏に代数構造を加え、他方の圏に空間的構造を加えることにより生じる。双対随伴の一般理論は、そうして構造を加えたとき、どんな仮定が必要になるかを述べる[1]。

2　目的

本稿の目的は、論理学におけるストーン双対性に代表される、様々な圏論的双対性を紹介し、それらの本質（もしそんなものがあるなら）を捉えるための一般理論への手引きを与えること、またそれを通じて圏論という特異な数学の顕著な三つの特徴（universal normativity, understanding conferrabilty, ontological picturalism）を明確にすることである（これら三つの特徴は筆者の提案によるもので一般的なものではない）。今回は論理学的な双対性の紹介に重点をおき、有限的ストーン型双対性と無限的ストーン型双対性を一つずつ紹介するとともに、それらが代数幾何や関数解析における他の双対性といかに関連するか、双対性の（ある程度の）統一理論がいかにして構築可能かを概観する。

それとともに、双対性という考えを概念的なレベルで理解することを試みる。特に双対性という概念は、「言葉と意味」という哲学上の古典的対比を基礎とすると考えられる一方で、同時にその基礎的対比を失効させる帰結をも（双対性という一つの概念のうちに）併せ持つという点において、双対性は “transdichotomy” なのであると論じる（無理に和訳すれば「超二項対立」）。二項対立の帰結として生じてきたものが同時に元々の二項対立を無効化してしまう、双対性という概念にはそういったアイロニーが含意されているのである。そしてこのアイロニーは、双対性というものを、単なる哲学的思考原理としての二項対立として捉えるに留まらず、それに数学的（圏論的）表現を与えた結果、立ち現れてくるものなのである。この意味で双対性は critique としての側面を持っていると言って良い[2]。

[1] 基本的には Hom 集合に適切な構造が「うまく」入るということだが、この考えの一つの具現化としては、まず二種類の Hom 集合に対応する圏の対象としての構造が入ることを仮定し、射影が構造を保存する射になることと、射影して構造を保存するなら元の射も構造を保存することという、二つの条件を要求すれば良い（Porst-Tholen の方法）。しかし、元々の二つの圏を代数的なものと位相的なものとすれば、「二種類の Hom 集合に対応する圏の対象としての構造が入る」ということを天下り的に仮定する必要はなくなり、実質的な形で Hom 集合に構造が入る仕方を記述でき、二つのリフト条件はたった一つの調和条件（直観的には「連続写像」の全体が当該の「代数演算」で閉じること）に帰着される。

[2] 数理科学的研究においても概念的思惟は肝心であると筆者は考える。例えば、現代的な論理学の誕生においては、フレーゲやラッセルの概念的思惟が枢要な役割を果たした。

3　思想としての双対性：言葉と意味という対比

「意味とは何か」ということは、意味という概念が歴史上のある時点で発見あるいは開発されて以降、様々な形で問題とされてきた。これは、一方では「人生の意味とは何か」というような人生哲学上の問い[3]でもあり得るし、他方では「記号により何かを意味するとはどういうことか」とか「言葉に意味を与えるものは何なのか」とか「言葉はそもそも本当に何かを意味できる（あるいはしている）のか」といった言語哲学上の問い[4]でもあり得る。

意味という概念の発明は、様々な新しい「語り方」を可能にし、既に述べたような新しい問題意識を人間に植え付けた。意味という概念は、実に偉大な発明品だと言わなければならない。それ無しでは、ひとはもはや日常的な当たり前の精神的生活を営むことができないと言っても過言ではないだろう。意味概念の解体を声高に叫ぶ人たちがいるのも、それが概念の必需品の一項目に加えられて久しいからに他ならない。

フレーゲが意味（Sinn と Bedeutung）概念の探求と平行して現代論理学の先鞭を付けたことを引くまでもなく、論理学という学問は、意味概念

他にも、岡潔は、具体性を重んずる数学者でありながら、小林秀雄との対談の中で、数学をやるとき数式を使うかと尋ねられた際、「なかなか数式で表せるようになってこないのです。ですから、たいてい文です。」と答えている。彼の生み出した層の概念は、最近では、文脈に応じて変化する情報の構造を表現するための有効な手立てとなっている（例えば量子物理の基礎において）。

[3]カミュやサルトルなどの広義での実存主義者は、この問いに正直に真正面から答えようとした。彼らの議論が現在ではアクチュアルな意味を欠いているということでは必ずしもないが、後の世代の、フーコーやデリダなどのポスト構造主義の思想家は、彼らが前提とする近代的個人主義、特に「人間」という概念を問題にし、それは近代における歴史的構築物であるとした（「人間なんてごく最近の発明品に過ぎない」と言われる）。こういった立場から言えば、「人生の意味とは何か」という問いは、近代という歴史的コンテクストに絡めとられた者の戯れ言に過ぎないとも言えるだろう。しかし、近現代人はいったん「人間」として発明されてしまった以上、「人間」であることを中止することは実際には容易ではないし、何人もそれぞれの生きる歴史的コンテクストから完全に逃れ出ることはできない。さらに言えば、人間概念の解体もまた発明品に過ぎず、「1968 年的」な風土の中で生まれた、普遍性を欠く特異な思想だとも考えられる。こういった脱構築的作業は「影踏み」のように続き、「語ることにより何も意味しない」ためには永遠に語り続ける必要があるのである。逆に言えば、影を踏み続けるという、不断の反復的相対化の活動を維持する限りにおいては、脱構築は自分自身を常に解体しながらも一つの一貫した立場を与えると言える（その一貫性自体もまた問題視されなければならないにせよ）。

[4]言語哲学における意味の理論には、「表現の意味とは表現と実在との対応である」というモデル論的意味論のような考え（ディヴィドソンや前期ヴィトゲンシュタインなど）と、「表現の意味とは表現の使用法である」とか「意味とは検証条件である」という証明論的意味論や構成的意味論（BHK 解釈）のような考え（後期ヴィトゲンシュタインやダメット）がある。クワインの「翻訳の不確定性」の議論、パトナムの「モデル論的議論」やクリプキの『ヴィトゲンシュタインのパラドクス』における議論などは、「確定した意味」という概念自体を問題とし、「言葉は意味を持てない」という主張に一定の根拠を与える。もっと違った角度から言えば、こういった「意味の不定性」はデリダ的脱構築に基づく文学批評理論における主要なトピックでもある。論理学的に言うなら、非標準モデルの存在が意味の不定性という考えと親近性がある（パトナムの議論はこれとほぼ同種）。

の探求と緊密に関連している。一方では言葉の織りなす形式的なシステムが提示する推論主義的な意味概念があり、他方では言葉が対象（或は実体的な何か）を指示するという対応関係により与えられる古典的な（タルスキ的）意味概念がある[5]。論理学は、それぞれ形式体系と指示的なモデルという形で、この二つの意味概念を深化させてきたと（幾分ホイッグ史観になるが）考えられる。こういった、「証明論とモデル論」あるいは「構文論と（タルスキ的）意味論」という二項対立は、現代論理学の根底に腰を据えており、論理学は、「言葉と意味」という哲学上の対比の精緻化という側面を多分に持っている。

このとき双対性は、構文論と意味論の間の反変的な同値性として現れる。この関係性は、歴史的には最初、完全性定理という形で認識された。完全性定理が構文論と意味論の等価性を述べることは周知の事実である。これに比してあまり意識されないことは、ある論理に対する完全性定理が、その論理上の理論のなす順序集合と、モデルのなす順序集合の間の双対的な同型を示す点である (ガロア群と中間体の双対的対応も同種のもので、そのため順序集合間の随伴関係は Galois connection とも呼ばれる)。色々な論理に対するストーン型双対性は、この順序集合的な双対性を圏論的なレベルにまで引き上げることにより得られる。逆に言えば、**ストーン型双対性は**、対応する論理の完全性をその系として含んでおり、**完全性定理の圏論的拡張**なのである。

こういった双対性は通常、圏論における反変的な圏同値（あるいは随伴）という概念により定式化され記述される[6]。ブール代数（古典論理）のストーン双対性は、圏論的双対性の最初の厳密な例であり、「素イデアルを幾何的な点とみてそれらの集合に位相を入れる」という双対性理論の重要な着想の最初の例でもある。後者のアイデアは後に代数幾何学や非可換幾何学において不可欠なものとなった。しかし、より素朴な形での、順序集合レベルの双対性は、多項式の零点としての多様体という古典代数幾何の考えに既に現れていた。多項式が増えるにつれて、それらの共通零点が減っていく、この双対的な関係が厳密に順序集合のレベルでの双対的同型であることを教えるのがヒルベルトの零点定理である[7]。また、空間をそれに対応する代数（空間上の関数代数）により研究するという、双対性理論的スタイルは、既にリーマンにおいて存在していた。

---

[5]通常は後者のみが「意味論」と呼ばれ、本稿での「意味論」も基本的にその意味である。ただし、「証明論的意味論」と言うときは前者の意味であり、その背景には、構文論それ自体が一つの意味の理論を与え得るという推論主義の考えがある。

[6]圏同値とは二つの圏が同型な対象を潰して見たとき同じになるということで、反変圏同値は一方の圏の射の向きを全て反対にすれば圏同値になるということ。

[7]ガロア理論、代数幾何や数理論理学といった、様々な異なる分野における基礎的な定理が双対性という形式を共有している点は興味深い。双対性の母体である二項対立的思考が人間の思考の深奥に存在することを否応無く感じさせると（勇み足に）言いたくなる。

完全性定理による論理学的双対性も、零点定理による代数幾何的双対性も、「式が増えれば、それらを満たすものは減る」という実に単純な、明々白々たる原理に基づいている。まず、構文論的なもの（論理式や多項式）と意味論的なもの（モデルや多様体）がある（言葉と意味の二項対立）。そして、前者の増加が後者の減少を生むという関係がある。言葉を増やす、つまり多くの条件を要求すれば、それらの条件を満たすものは減る、つまり可能な意味の範囲は狭くなる。端的に言えば、「**言葉を多く語れば意味はその分限定される**」のである[8]。誤解を恐れず言えば、双対性とは、ただそれだけのことである。もし双対性理論が難解に見えるなら、根底にあるこの明晰判明なアイデアを思い起こすべきであり、その他のことは数学的詳細として目をつぶってもよいと筆者は思う。

数学、計算機科学や物理学における他の色々な圏論的双対性の多くも、この単純なアイデアにより捉えることができる。例えば、計算機科学では、プログラム論理と表示的意味の双対性や、システムとその振る舞いの論理の双対性（代数と余代数の双対性）があり、量子力学では、状態と観測可能量の双対性が知られている。この概念的レベルで観察されるアナロジーを数学的に現金化することも（双対性の一般理論において）ある程度可能である[9]。

最後に、なぜ双対性は "transdichotomy" なのか。双対性は、単なる概念的枠組みではなく、極めて強力な証明の道具である。それは、代数多様体を研究するのに、その双対である座標環を研究するという代数幾何の考えにも、証明体系（特に証明不可能性）を研究するのに、その双対であるモデルの空間を研究するという論理学の考えにも現れている。勿論、この逆の使い方もできる。しかし、なぜそういったことが可能なのか。それは、双対性は、構文論的な世界と意味論的な世界の間の（反変的な）等価性を意味するからである。最初に措定された「言葉と意味」の二項対立は、個々の文脈において双対性という形式にまで昇華させられるが、双対性から帰結するこの等価性が（相対するものであったはずの関与する二項の同値性を示すことにより）当の二項対立を失効させるのである。この意味で、双対性は transdichotomy なのである。

なお、本稿では「言葉（構文論的なもの）と意味（意味論的なもの）の二項対立（双対性）」という言い方をしてきたが、グランジェは「形式的操作と対象の双対性」という言い方をし、ローヴェアは「形式的なものと

[8] しかし、論理や代数幾何を離れて、自然言語の織りなす豊かな世界では、一つの表現に継ぎ足されて行く多くの言葉が、元の表現の持ち得る意味の範囲を限定するどころかより豊穣なものにしていく、という逆転した非単調的関係も同時に観察されることを付言しておきたい。

[9] しかし、例えば経済学における商品の数量と価格の双対性などが同じ仕方で理解できるのかは自明ではない。概念的には、数量という実体的、意味論的なものと、価格という認知的、構文論的なものとの間の双対性であると言えないことはない。

概念的なものの双対性」という言い方をしている。双対性とはっきりとは言わないものの、カッシーラーは「実体概念と関数概念」という双対性的対比を用いている。双対性に関わるこういった考えは他にも幾つか存在してきた。すべてが正確に同じ考えを描いているわけではないにせよ、非自明な関連性の存在は明らかと思われる。

4　数学としての双対性

圏論的双対性は、数学的に言えば、通常ある種の代数構造とある種の幾何構造（空間構造）の間に生じる[10]。後者の幾何構造は、一般には、純粋な位相空間などに限らず、空間の上にさらに付加構造が加わる場合も多い。例えば、順序構造、関係構造、余代数構造や層構造などが加わった空間概念を考えるのも一般的である（例えばそれぞれ、順序ストーン空間、位相的クリプキフレーム、ストーン余代数やアファインスキームなど）。ポントリャーギン双対性の場合などは、代数構造のほうに位相が入り、幾何構造のほうに代数演算が入り、結局関与する二つの圏は同じ圏（局所コンパクトアーベル群の圏）になる（自己双対性）。

一般的に言って、代数から空間を得る際は、素イデアルないし素フィルターのようなものの空間を考えるか、特別な対象（真理値の代数、$\mathbb{C}$ や $\mathbb{T}$ など）への準同型全体の空間を考える（しばしば両者は一致する）。空間から代数を得る際は、特別な対象への連続関数全体のなす代数（論理学的な場合には空間上の述語の代数）を考えるか、空間の特別な部分集合（開集合など）のなす代数を考える（論理学的な場合には両者は一致する）。ここで言うような「特別な対象」は代数と空間の両方の構造を兼ね備えており、そのため schizophrenic な（二重人格的な）対象と形容される（この用語法に非数学的意図は通常ない）。ヤヌス的な対象と呼ばれることもある。ローヴェアはこのことを、「**一つの対象が二つの圏に住むとき、双対性の可能性が生じる**」と表現している。

ストーン双対性もゲルファンド双対性もポントリャーギン双対性も、schizophrenic な対象という視点から理解できるため、双対性の一般理論において schizophrenic な対象というアイデアは極めて重要なものであると広く認められている。二つの圏があり、両方の圏に住むことのできる一つの schizophrenic 対象が存在すれば、その対象への反変 Hom 関手を（二つの圏に応じて二種類）考えることにより、元の二つの圏やその特別な対象に関する一定の条件下で、反変随伴や反変圏同値を導けるといった理論が種々存在する。

[10]前節との関係で言えば、構文論的記号のなす代数と意味論的な値（モデル）のなす空間の間に双対性が生じるということである。

論理学的な文脈での圏論的双対性、つまりストーン型双対性は、大雑把に言って、次の二種類に分類される。勿論、全てのストーン型双対性が、いずれかにクリアカットに分類されるわけではない。

- 有限的 (finitary) ストーン型双対性。
  - 有限項演算を持つ代数とコンパクトな空間に関わる。双対空間のコンパクト性を示す（無限項演算を有限項演算に還元する）とき選択公理が使われる。
  - 古典論理、直観主義論理、様相論理や多値論理などの論理体系は、論理結合子の引数が全て有限であり、この範疇に入る。**随伴のユニットの単射性が完全性定理**に相当する（単射性はしばしば素イデアル定理のようなものから従う）。古典論理から直観主義論理へ移ることは、ゼロ次元空間から任意次元の空間に移ることに相当する（**ゼロ次元性は排中律**と等価）。双対化に用いる $\mathbf{2}$（$= \{0,1\}$）に入れる位相は離散位相からシェルピンスキー位相になる。様相論理への移行は、空間に関係構造あるいは余代数構造を入れることに相当する。多値論理への移行は、$\mathbf{2}$ を多値の代数に置き換えるという考えが基本となるが、実際に双対空間に必要となる付加構造は個々の多値論理による。
  - 自然双対理論 (natural duality theory) などの普遍代数的な一般理論が特に有効と考えられる。（普遍代数は基本的に有限項演算を扱う）。自然双対理論は厳密な反変圏同値の理論（しかし、$\mathbb{ISP}$ により論じることで選択公理が必要になる部分は回避する）。
- 無限的 (infinitary) ストーン型双対性。
  - 無限項演算を持つ代数と非コンパクトな空間に関わる。無限項演算を許しているので、選択公理により無限を有限に落とす必要はない。一般的に言って、直観主義集合論 IZF で証明可能である。
  - プログラム意味論の一種であるドメイン理論に見られる論理的構造や、トポス理論で重要な幾何的論理などは、無限引数の論理結合子を持ち、この範疇に入る。
  - Johnstone や Porst-Tholen の双対性理論などの圏論的な一般理論が特に有効と考えられる（モナドの代数などの圏論的代数概念は自然に無限項演算まで含み、特に**集合の圏上のモナドの代数の圏であることと無限項演算を許す等式クラスの圏である**

ことは同値)。そういった圏論的理論は基本的に反変随伴の理論で、反変随伴を反変圏同値に制限する際には場合に応じて個別の議論が必要になることが多い。

この対比は筆者が考えたものだが、双対性に関する Dagstuhl Seminar のプロジェクト記述でも類似の対比が用いられているので、ストーン双対性の研究者の中ではある程度一般的な見方のはずである。以下では、前者の例として古典論理のストーン双対性を、後者の例として幾何的論理のストーン双対性を見る。その後、双対性の一般理論を概観する。

5 古典論理のストーン双対性

古典論理のリンデンバウム代数 L を考えよう（細かなことを無視すれば単に、論理式の集合を考えて、論理結合子をその上の代数演算だと思うということ)。古典命題論理の意味論は、論理式に対する真理値の付値により与えられる。従って、古典命題論理の**モデルとは準同型** $v : L \to \mathbf{2}$ である（$\mathbf{2} = \{0, 1\}$）[11]。準同型性は、付値が命題変数から再帰的に複雑な論理式に対して（論理結合子を保存する形で）定義されていくことを意味している。

従って今の場合、準同型の集合は、命題変数の集合を X とすると、$\mathbf{2}^X$ と見なせる。命題変数の集合は通常可算無限であり、このときモデルの集合 $\mathbf{2}^X$ は、よく知られたカントル空間である。モデルの集合に位相はまだ定義されていない。モデルの空間の位相は、論理式 φ に対して、φ が成り立つモデルの集合 O_φ、つまり $v(\varphi) = 1$ となる準同型 $v : L \to \mathbf{2}$ の集合 O_φ を基本開集合とすることにより与えられる。いわば**論理式それ自体を開集合と見る**のである。この位相は通常のカントル空間の位相と一致する。準同型を素イデアルと見なし、ブール代数を可換環と見なしたとき、この「ストーン位相」は代数幾何における可換環のザリスキー位相とも一致する。このモデルの空間を元の論理（ないし代数）の双対空間と呼ぶ。

このモデルの空間（カントル空間）から元の古典論理の代数構造を復元することができるだろうか。実は、古典論理のリンデンバウム代数 L は、カントル空間の開かつ閉集合のなすブール代数と同型になっている。ここで、開かつ閉集合の補集合はまた開かつ閉であり、これは排中律の成立を意味する。少し脱線するが、直観主義論理の双対性の場合、ある種の空間のコンパクト開集合のなす代数を考えるが、非ハウスドルフかもしれない一般の空間では、コンパクト開集合の補集合はコンパクト開集合ではなく、このことは排中律の不成立を意味する。こういった観点から言うと、

[11] これと同じ発想の「解とは準同型である」は佐藤幹夫の哲学と呼ばれているらしい。

開かつ閉の基底があるという、空間のゼロ次元性は、排中律の成立に対応していることが分かる。カントル空間は、そこから古典論理のリンデンバウム代数を復元できるので、古典論理（の演繹関係）と等しい情報量を持っている。この意味で、カントル空間は古典論理に対応する空間であると言える。

より具体的に言えば、リンデンバウム代数 L の元 φ に対して、先に述べた基本開集合 O_φ を対応させる写像 Φ_L が、L とカントル空間の開閉集合のなす代数の間の同型を与えるのである。O_φ はモデルの空間上に作用する関数とも思えるので、これは**論理式をモデルの空間上の関数と見る**ということである（最初はモデルが論理式に作用するものだったが、今度は論理式がモデルに作用する）。少し考えると、この Φ_L の単射性が完全性定理（非同値な論理式を区別するモデルがある）と等しいことが分かる。これは、代数的には素イデアル定理に相当する。論理におけるモデルの存在定理と、代数における素イデアル定理は（適切な文脈では）基本的に等価なものである。Φ_L の全射性は、カントル空間のコンパクト性から従う（この場合、双対空間のコンパクト性は選択公理無しで分かるが、一般にはそうではない）。

以上は古典論理とカントル空間の対応関係である。古典論理それ自体の代わりに、古典論理上の理論から出発しても、全く同じことができる。理論の公理が増えると、モデルは減少する。これまでは理論ないし代数から出発した場合の話だが、空間から出発しても全く対称的に同じことができる。ストーン双対性とは、基本的にはこういった、理論と空間の間の反変的な対応関係のことである。

通常ストーン双対性は、ブール代数の圏とゼロ次元コンパクトハウスドルフ空間の圏の間の反変圏同値である、というように圏論的に表現される。古典論理上の理論のリンデンバウム代数のクラスは、全てのブール代数のクラスと（同型を除いて）一致する。また、理論の双対空間として現れる位相空間のクラスは、ゼロ次元コンパクトハウスドルフ空間のクラスと一致する。これらに加えて、準同型が連続写像に写り、連続写像が準同型に写ることを考慮すれば（完全性定理の導く順序集合的双対性はここで、任意の準同型や連続写像ではなく、包含写像であるものしか考えに入れない）、上記の考察とあわせて、ストーン双対性の通常の圏論的表現に到達することができる。このとき理論 T に対して Φ_T を対応させる関係は、圏論の言葉での自然変換というものになっており、随伴のユニットと呼ばれるものである（圏同値は随伴の特別な場合）。コユニットは、空間から出発した場合の同種のものである。

一つ注意したいことは、$\mathbf{2}$ を離散空間と見たとき、位相空間から $\mathbf{2}$ への連続写像とその空間の開かつ閉集合の間には一対一対応がある。従って、

空間の開かつ閉集合の代数をとる操作は、その空間から **2** への連続写像の代数をとる操作に置き換えられる。代数から空間を作る操作も、構造を保つ **2** への写像全体を考えることにより得られた。ストーン双対性において、**2** は代数構造と空間構造を併せ持ち、既に述べた意味での schizophrenic 対象として機能しているのである。

しかし、そもそもこのストーン双対性はなぜ成り立つのだろうか。双対性理論はこういった疑問に関与する。自然双対理論 (natural duality theory) によれば、**古典論理に対してストーン双対性が成り立つ理由は、古典論理が関数的完全性 (functional completeness) を持つから**である。普遍代数の言葉で言えばこれは、**2** が primal algebra だということである。ある論理の代数のクラスが primal algebra から生成されているならば、その論理の代数の圏は常にゼロ次元コンパクトハウスドルフ空間の圏と反変圏同値であることが知られている（この結果は自然双対理論の先駆となった)。このように、**項関数 (term functions) の構造が双対性を決める**という現象は比較的広汎に観察されるものである。一般に理論構築が、explanation に相対するものとしての understanding に関わるというのは、このような意味においてである。

最後に，代数幾何と論理のアナロジーに手短に触れる。対応関係は、基本的に以下の表の通りである。

代数幾何学	数理論理学
多項式	論理式
イデアル (生成元)	理論 (公理)
零点 (素・極大イデアル)	モデル
ヒルベルトの零点定理	ゲーデルの完全性定理
k 代数と多様体の双対性	ストーン双対性

代数幾何の双対性と論理の双対性は、$\mathbb{GF}(2)$ 上の幾何と古典論理の場合には厳密に等価である。実際、古典論理のストーン双対は，(有限生成とは限らない) 冪等な $\mathbb{F}_2$ 代数と $\mathbb{F}_2$ 上の (有限次元とは限らない) 代数多様体の間の双対性と等しいことが分かる。一般に、$\mathbb{GF}(p^n)$ 上の幾何と $\mathbb{GF}(p^n)$ に真理値をとる多値論理に対して同じことが言える。

「前」双対性としての古典論理の完全性と ($\mathbb{F}_2$ の代数閉包上の) ヒルベルト零点定理もほぼ等価である。手短に言えば，V をイデアルの零点の空間をとる操作，I を与えられた空間上で消える多項式を集める操作とすると，

$$I \circ V(J) = \sqrt{J}$$

の成立を述べる零点定理は，$V(J)$ をイデアル J に対応する理論のモデルの集合と，$I \circ V(J)$ をそれらのモデルの上で真になる論理式の集合と

見れば，既に完全性定理そのものである (古典論理のような冪等な環では $\sqrt{J} = J$)．ストーン双対は完全性の一般化なので，**代数幾何の双対性と論理の双対性の間の対応は、零点定理と完全性の対応の圏論的表現**であると言える。

最後に、ストーン空間（つまりゼロ次元コンパクトハウスドルフ空間）は、集合論的トポロジーにおいても、Pierce 表現と呼ばれる可換環の層表現においても、圏論的ガロア理論においても、さらにその他の色々な分野においても用いられていることを付言しておきます。

6　幾何的論理のストーン双対性

別途配布する、数学セミナーの記事「圏論的双対性の論理」を参照。随伴の概念などもそこで定義されている。

例を解説するスペースが記事中ではなかったが、なじみ深い $\mathbb{R}^n$ に通常のユークリッド位相を入れたものや、$\mathbb{C}^n$ にザリスキー位相をいれたものの二重双対がどうなるかを考えてみると、理解が深まるだろうと思う。

これは、元の空間の各点を、その点を含む開集合全体（これ自体は二重双対の元と見なせる）と対応させる写像（第一義的には経験的に確かな領域の概念があり、点概念は小さくなっていく領域の極限として副次的に生じるというメレオロジー的思想の表現）が、同相写像になるかどうかという問題である。

答えを言えば、前者では二重双対が元の空間に一致するが、後者では元の空間より大きくなる。より詳しく言うと、後者の二重双対は、元の空間に generic points を添加した空間、座標環の素スペクトラムになる。元の空間自体は、座標環の極大スペクトラムである。幾何的論理の通常のストーン双対性では素スペクトラムを用いるが、極大スペクトラムを用いれば、異なる双対性を得る事ができる。**双対性は点概念に相対的**に決まるのである。多くの場合、素イデアルと極大イデアルという二種類の点概念が考えられる。一つの双対性において点概念を取り替えることにより、別の双対性が得られることがある（その際、代数のほうの射の概念は変更を迫られる）。

7　双対性の一般理論

別途配布する、数学セミナーの記事「圏論的双対性の論理」を参照。

一番基本的な例として、二つの圏がともに集合の圏で、二つの圏に住む一つの特別な対象（schizophrenic 対象と通常呼ばれるが、倫理的問題のため記事中ではヤヌス対象と呼んでいる）を $\{0, 1\}$ とした場合を考えてみると

良い。このときの双対随伴は、$f(x)(y)$ という関数を $g(y)(x)$ （$:= f(x)(y)$）というように引数をスワップした関数と見るだけで得られる。直観的に言えば、「論理式 x のモデル y における真理値」という概念は、「モデルが論理式の代数の上に作用して真理値を返す」とも、「論理式がモデルの空間の上に作用して真理値を返す」とも、二通りの仕方で読めるということである（一方が f に他方が g に対応する）。

これは、プログラム意味論における、state transformer semantics（連続関数 $t : X \to \Omega^{\Omega^Y}$ の世界）と predicate transformer semantics（連続関数 $s : \Omega^Y \to \Omega^X$ の世界）の双対性という考えと本質的に同じである（Ω^Y を固定して一つの "Y" と見ると、引数のスワップにより state transformer と predicate transformer の間の対応が得られる）。このような事情から、Klaus Keimel などは、「**双対性とは引数のスワップに他ならない**」と言う。これは勿論冗談なのだが、「双対性」を双対随伴を意味するものと解釈すれば、あながち間違ってはいないし、なるべくシンプルな説明が望まれるときには便利な言い方かもしれない。思想的にはこれは、一つの対象をそれ自体として捉える実体的な見方と、他の対象に作用するものとして捉える関係的な見方の間の双対性の表現とも考えられるだろう。量子論でのブラとケットの双対性も同じ種類のものである。

この最も単純な、集合の圏の間の $\{0, 1\}$（あるいは任意の集合 Ω）により誘導される反変随伴（ちなみにこれのモナドの代数は完備原子的ブール代数）の場合と、幾何的論理のストーン双対性における反変随伴とを比べてみると、プレーンな集合の圏を構造の入った集合の圏に置き換えたときに何が問題となるのか、よく理解できる。最も非自明なのは、Hom 集合に適切な構造を入れるところであり、この「適切さ」の内実を記述したのが記事中のリフト条件と呼ばれるものである。

8 Three Features of Category Theory

準備時間の都合上、本節は筆者の別の発表のスライドから引用する。CT は Category Theory の略。

- It is said CT is about abstraction and generalisation, thereby exposing connections between different disciplines.
- But CT is more than mere abstraction and generalisation, I would say.
- CT's abstraction and generalisation seem to have three distinctive features: Universal Normativity, Understanding Conferrability (as opposed to explanation; Dilthey), and Ontological Picturalism.

    - The three features are intertwined, of course.

- Broadly speaking, they are concerned with Definition, Theorem, and Proof respectively.
- Normativity: CT affects our very way of thinking (esp., doing math), and prescribes our conception of those universal forms that mathematical concepts should have.
    - What is duality? What is implication $\to$ (or a logical const.)? CT prescribes generic architectures of them, or what such concepts should be. Cf. "Analogies should be functorial."
- Understanding (a.o.t. explanation; cf. Dilthey): CT tells us why a theorem holds at all, by articulating the structure of it within a tailor-made framework, or perspective, or bias.
    - Why Gelfand Duality holds? Why Stone Duality holds? The framework of duality induced by a schizophrenic object (Johnstone, Porst-Tholen) confers an understanding.
- Ontological Picturalism: CT supports diagrammatic reasoning via the graphical play of arrows. It is qualitative, but can also express quantities in certain cases. Picturalism yields an ontology of math (e.g., graphical conception of sets).

メッセージは、圏論は単なる一般化や抽象化の枠組みであるに留まらず、それ以上のものを提供できるということである。特に、色々な数学的概念の在り方あるいは在るべき姿を普遍的な仕方で規定する、圏論の universal normativity という側面を特に強調しておきたい。**定理（やその証明）だけが数学の結果ではなく、定義もまた数学の結果**である。様々な数学的概念の一般形式の定義を可能にするというのは、圏論の顕著な特徴に数えられてしかるべきである。

理論構築というのは基本的に定義の学としての側面が強い。**意味という一般概念の導入が人類の思考形態に大きく寄与してきたのと同様、圏論による一般概念の導入は数学的思考の在り方に大きく寄与する**と言って良い。実際、意味という概念が重要すぎてその重要性が普段意識されないのと同様、双対性の圏論的定式化も今や空気のような存在となり、静かに、しかしはっきりと、双対性理論の世界に根を下ろしている[12]。

[12] とはいえ、既に述べたように、これが本当に良いことか、というのはまた別の問題として考える必要がある。それは丁度、意味という概念を我々は維持すべきか、というポストモダニストの問いと同種のものである。

参考文献

[1] J. Adámek, H. Herrlich, and G. E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley and Sons, Inc., 1990.

[2] M. Barr, J. F. Kennison and R. Raphael, Isbell duality, *Theory and Applications of Categories* 20 (2008) 504-542.

[3] F. Borceux and G. Janelidze, *Galois Theories*, Cambridge Studies in Adv. Math. 72, 2001.

[4] S. Burris and H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, Springer-Verlag, 1981.

[5] D. M. Clark and B. A. Davey, *Natural Dualities for the Working Algebraist*, CUP, 1998. *Ann. Math. Artif. Intell.* 56 (2009) 339-360.

[6] B. A. Davey and H. A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order*, CUP, 2002.

[7] G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. W. Mislove, and D. S. Scott, *Continuous Lattices and Domains*, CUP, 2003.

[8] P. T. Johnstone, *Stone Spaces*, CUP, 1986.

[9] E. G. Manes, *Algebraic Theories*, Springer, 1976.

[10] H.-E. Porst and W. Tholen, Concrete dualities, *Category Theory at Work* (1991) 111-136.