

# 4 減衰系に取り付ける並列型二重動吸振器の準最適設計 (二つの動吸振器質量を等置したときの制振性能の悪化率の検討)

## Quasi-optimal design of a parallel-type double-mass dynamic vibration absorber equipped with a damped primary system

### (Examination of deterioration rate of vibration suppression performance when two dynamic absorber masses are equalized)

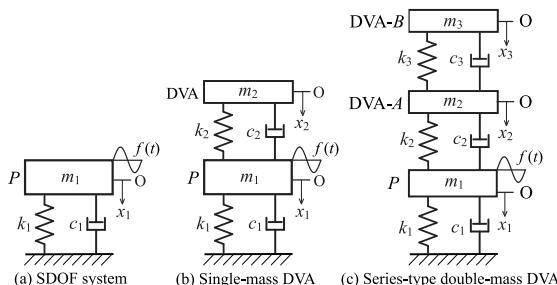
浅見 敏彦(兵庫県立大学)

Toshihiko Asami, University of Hyogo, 2167, Shosha, Himeji, Hyogo 671-2280, Japan

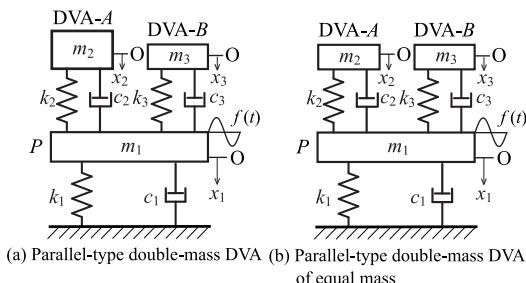
Multiplexing dynamic vibration absorbers (DVAs) provide better vibration control force compared to that obtained with classical single-mass DVAs. In fact, previous studies have shown that the vibration suppression performance of double-mass DVAs is superior to that of the single-mass DVAs. In the optimal design of a parallel-type double-mass DVA, five dimensionless design parameters must be optimized. One of them is the mass ratio of two DVAs arranged in parallel. However, in many cases, especially in the parallel-type, the mass ratio of two DVAs cannot be set to the optimal value, because existing structures and machine parts are sometimes used as DVAs. In this report, I investigated how the optimal values of other design parameters change when the two DVA masses are set equal, and finally, how bad the vibration suppression performance of DVA becomes.

## 1. 緒 言

動吸振器 (Dynamic Vibration Absorber: DVA) とは、制振を必要とする系(以下、主系と呼ぶ)の振動を抑制するために設置される小型の受動型制振装置のことを指す。その歴史は古く、1883年に初めて登場したとされている<sup>(1)</sup>。その後、この動吸振器の最適化の研究が、1928



**Fig. 1** Example of dynamic vibration absorbers (DVAs) mounted to suppress vibration of the primary system  $P$  subject to a disturbance force  $f(t)$ .



**Fig. 2** Parallel-type double-mass dynamic vibration absorber mounted on the primary system  $P$ .

年に発表された ASME の論文から始まった<sup>(2)</sup>。最初に発表された最適化の規範は、最悪の入力に対する主系の最悪の応答(共振)を最小化しようというもので、この規範は今では  $H_\infty$  規範と呼ばれる<sup>(3)</sup>。このときに提案された手法は以下のように要約される。すなわち、動吸振器の減衰を変化させたときに、主系の周波数応答において現れる不動点(2自由度振動系では二つ現れるのでそれらの不動点は  $P$  点と  $Q$  点と呼ばれる)の高さを最小に抑えるように(これらの不動点の高さにはトレード・オフの関係があり、二つの不動点の高さが等しく調整されるときに最小化される)主系と動吸振器の無減衰固有角振動数比を調整し(この条件は主系に対する動吸振器の最適同調比と呼ばれる)、次に、これらの不動点において周波数応答の極大値が生じるように動吸振器の減衰比が調整される(この条件は動吸振器の最適減衰比と呼ばれる)。この方法は定点法と呼ばれているが、一般に周波数応答関数において  $P$  点で曲線が極大値をとる減衰比の値と  $Q$  点で極大値をとる減衰比の値が多少異なるので、この定点法では近似解しか得られないという生来の欠点がある。この定点法に従って、1932年と1946年に Hahnkamm と Brock がそれぞれ最適同調比と最適減衰比の計算式の導出に成功した<sup>(4),(5)</sup>。それらの式は、1956年に出版された Den Hartog の著書「機械振動学」の第4版<sup>(6)</sup>で紹介され、以後の動吸振器の基本的な設計式となった(1947年出版の同書の第3版ではまだ最適同調比の式しか記載されていない)。

こうして、図 1(b) に示された単一質量動吸振器の最適化に対する研究が長らく続けられたが、その後、ロバスト性改善と制振性能向上を目指して動吸振器を複数化する試みが行われるようになった。最初は図 2 のような並列型二重動吸振器について研究され<sup>(7)</sup>、続いて図 1(c) に示す直列型の二重動吸振器が研究された<sup>(8)</sup>。図 1(b) に示された単一質量動吸振器の最適化では、最適化すべきパラメータは上記の二つだけであったが、二重動吸振器ではこれが五つに増えることが動吸振器の最適化を難しくしている。

現時点では、図 2 に示された並列型二重動吸振器の最適化に必要なパラメータの最適値はすべて数値的に求めざるを得ないが、その数値解を観察すると、図 2(a) のように、二つの動吸振器の大きさが違うときに真の最適解がある<sup>(9)</sup>。それは、図 2 の系は三つの共振振動数を有しているが、その最低次の共振振動数(1 次共振点)では大きい方の動吸振器が働いて振動を抑え、より振動数の高い 2 次共振点は小さい方の動吸振器が振動を抑えるというように役割分担されているからである。ところが、最初に並列型二重動吸振器の最適解が報告されたとき<sup>(7)</sup>、二つの動吸振器の質量は図 2(b) のように、最初から等しいと仮定されていた。これは、著者らが建築構造物のような既存の質量を動吸振器として働くかせようとしたことによる。このように、特に並列型の動吸振器については、既存の機械部品を動吸振器として働くかせたいという要望も多いと考え、本記事では、並列に配置された二つの動吸振器の質量を等値した場合に、他の四つのパラメータの最適設計値がどのように変化し、その結果、最終的な評価指標( $H_\infty$  最適化では共振点の高さ)がどの程度悪化するのかということを調査した。

## 2. システムパラメータの無次元化

図 1(c) と図 2(a), (b) は、本記事で取り上げる 3 種類の機械振動系の解析モデルを示している。これらの図において記号  $P$  で表された物体は正弦的外力  $f(t) = f_0 \sin \omega t$  を受けて振動する主系(Primary system)を表し、記号 DVA はその振動を抑制するために取付けられた動吸振器を表している。図 1(c) と図 2(a), (b) では 2 個の動吸振器(DVA-A と-B) がそれぞれ直列と並列に配置されている。これらは線形の振動系であることから、系の周波数応答と時刻歴応答は

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\omega}{\omega_1}, \quad \tau = \omega_1 t, \quad \mu = \frac{m_2 + m_3}{m_1}, \quad \mu_B = \frac{m_3}{m_2}, \quad v = \frac{\omega_2}{\omega_1} \\ v_B &= \frac{\omega_3}{\omega_2}, \quad \zeta_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}, \quad \zeta_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}, \quad \zeta_3 = \frac{c_3}{2m_3\omega_3} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

で定義された 9 個の無次元化パラメータで完全に表現できる。ここで

$$\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{k_2/m_2}, \quad \omega_3 = \sqrt{k_3/m_3} \quad (2)$$

式(1) は図 1(c) と図 2 の振動系を想定して定義されているが、より単純な図 1(b) の振動系に対しても等しく適用できる。式(1)において、 $\lambda$  と  $\tau$  はそれぞれ無次元振動数と無次元時間を表しており、前者は系の周波数応答を、後者は系の時刻歴応答を表示するときに使用されるが、ここでは  $\tau$  を使うことはない。

図 1(b) に示された単一質量動吸振器の場合には、主系と動吸振器の質量比  $\mu$ (ここでは  $m_3 = 0$ ) と主系の減衰比  $\zeta_1$  が与えられたときに、主系と動吸振器の同調比  $v$  と動吸振器の減衰比  $\zeta_2$  の最適値を求めることができ。式(1)において、 $\lambda$  と  $v$  はそれそれぞれ無次元振動数と無次元時間であり、前者は系の周波数応答を、後者は系の時刻歴応答を表示するときに使用されるが、ここでは  $\tau$  を使うことはない。

## 3. 主系のコンプライアンス伝達関数の $H_\infty$ 最適化

最初に図 2 に示された並列型二重動吸振器を備えた系のコンプライアンス伝達関数を  $H_\infty$  規範に基づいて最適設計する。このとき、従来の定点法は用いることができない。それは定点そのものが存在しないからである。そこで、1997 年に西原らによって提案された厳密解法<sup>(12)</sup> を適用して最適解を求めるこにする。最初に、 $H_\infty$  規範における制振の評価指標を示すと

$$h_{\max} = \left| \frac{x_1}{f/k_1} \right|_{\max} \quad (3)$$

この式はコンプライアンス伝達関数の最大値を表している。この  $h_{\max}$  を最小化することがこの設計規範の目標である。次に、図 2 の振動系のコンプライアンス伝達関数を計算すると

$$\left| \frac{x_1}{f/k_1} \right| = \sqrt{\frac{A_1^2 + B_1^2}{C_1^2 + D_1^2}} = \sqrt{\frac{\text{Num1}}{\text{Den1}}} \leq h_{\max} \quad (4)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= (1 + \mu_B)[\lambda^4 - \lambda^2 v^2(1 + 4\zeta_2\zeta_3 v_B + v_B^2) + v^4 v_B^2] \\ B_1 &= 2\lambda(1 + \mu_B)v[\zeta_2(\lambda^2 - v^2 v_B^2) + \zeta_3(\lambda^2 - v^2)v_B] \\ C_1 &= \lambda^6(1 + \mu_B) - \lambda^4\{1 + \mu_B + (1 + \mu)v^2 + v^2 v_B^2 \\ &\quad + \mu_B v^2[1 + (1 + \mu)v_B^2] + 4\zeta_1\zeta_2(1 + \mu_B)v \\ &\quad + 4\zeta_1\zeta_3(1 + \mu_B)v v_B + 4\zeta_2\zeta_3(1 + \mu)(1 + \mu_B)v^2 v_B\} \\ &\quad + \lambda^2(1 + \mu_B)v^2[1 + (1 + v^2 + \mu v^2)v_B^2 + 4\zeta_1\zeta_3 v v_B \\ &\quad + 4\zeta_2 v_B(\zeta_3 + \zeta_1 v v_B)] - (1 + \mu_B)v^4 v_B^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$D_1 = \left. -2\lambda\zeta_1(1+\mu_B)[\lambda^4 - \lambda^2v^2(1+4\zeta_2\zeta_3v_B+v_B^2) + v^4v_B^2] - 2\lambda v\zeta_2\{\lambda^4(1+\mu+\mu_B) - \lambda^2(1+\mu_B)[1+(1+\mu)v^2v_B^2] + (1+\mu_B)v^2v_B^2\} - 2\lambda v\zeta_3\{\lambda^4(1+\mu_B+\mu\mu_B) - \lambda^2(1+\mu_B)[1+(1+\mu)v^2] + (1+\mu_B)v^2\}v_B \right\} \quad (6)$$

このように、コンプライアンス伝達関数の大きさ  $|x_1/(f/k_1)|$  は平方根の中に分数式の形で現われるが、式(4)に示されるように、この分数式の分子を“Num1”，分母を“Den1”と置き、次の関数  $f_n$  を作成する。

$$f_n = \text{Den1} - \frac{\text{Num1}}{h_{\max}^2} \geq 0 \quad (7)$$

この関数はコンプライアンス伝達関数を上下反転した形をしており、その最小値はゼロになる。図2の3自由度振動系に対する関数  $f_n$  は、次のように  $y = \lambda^2$  に関する6次式の形で表される。なお、この関数  $f_n$  には、元のコンプライアンス伝達関数が持っている周波数特性  $A_1, B_1, C_1$ 、および  $D_1$  がすべて含まれているので、この関数は変形されたコンプライアンス伝達関数と呼ぶことができる。関数  $f_n$  は、図3(b)のように、三つの共振点  $h_{\max}$  において最小値ゼロ(重根)をとる。この関数を、 $y$  の最高次の係数を“1”にするために、関数式全体を  $y^6$  の係数で除した形で表現すると

$$f_n = y^6 + a_1y^5 + a_2y^4 + a_3y^3 + a_4y^2 + a_5y + a_6, \quad \left. \begin{aligned} \text{where } y = \lambda^2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -2 - 2v^2(1+\mu+v_B^2) + 4\zeta_1^2 \\ &\quad + 2(1+\mu_B)^{-2}[4\zeta_1\zeta_2\mu v + 2\zeta_2^2(1+\mu)^2v^2 + 2\zeta_3^2v^2v_B^2] \\ &\quad + 2\mu_B(1+\mu_B)^{-2}[\mu v^2(1-v_B^2) + 4\zeta_1(\zeta_2\mu v + \zeta_3\mu vv_B) \\ &\quad + 4\zeta_2\zeta_3\mu^2v^2v_B + 4\zeta_2^2(1+\mu)v^2 + 4\zeta_3^2(1+\mu)v^2v_B^2] \\ &\quad + 2\mu_B^2(1+\mu_B)^{-2}[\mu v^2(1-v_B^2) + 4\zeta_1\zeta_3\mu vv_B + 2\zeta_2^2v^2 \\ &\quad + 2\zeta_3^2(1+\mu)^2v^2v_B^2] \\ a_2 &= r^2 + v^2(4+v^2) + 4v^2v_B^2 + v^4v_B^4 - 8\zeta_1^2(1-2\zeta_2^2)v^2 \\ &\quad - 8\zeta_1^2(1-2\zeta_3^2)v^2v_B^2 - 8\zeta_2^2v^2 \\ &\quad - 8\zeta_3^2(1+v^2+\mu v^2)v^2v_B^2 + 16\zeta_2^2\zeta_3^2(1+\mu)^2v^4v_B^2 \\ &\quad + v^2(1+\mu_B)^{-2}[\mu(2+2v^2+\mu v^2) + 4(1+\mu)v^2v_B^2] \\ &\quad - 16\zeta_1\zeta_2(1-2\zeta_3^2)\mu vv_B^2 - 8\zeta_2^2\mu - 8\zeta_2^2(1+\mu)^2v^2v_B^2 \\ &\quad + 2\mu_Bv^2(1+\mu_B)^{-2}[\mu(1+v^2+v_B^2) + (2+\mu)^2v^2v_B^2] \\ &\quad + \mu v^2v_B^4 - 8\zeta_1(1-2\zeta_2^2)\zeta_3\mu vv_B \\ &\quad - 8\zeta_1\zeta_2(1-2\zeta_3^2)\mu vv_B^2 - 4\zeta_2^2\mu \\ &\quad - 4\zeta_2^2(1+\mu)(2+\mu)v^2v_B^2 \\ &\quad - 4\zeta_3^2\mu(1+v^2+\mu v^2)v_B^2 + \mu_B^2v^2(1+\mu_B)^{-2}[2(\mu \\ &\quad + 2v^2+2\mu v^2)v_B^2 + \mu(2+\mu)v^2v_B^4] \\ &\quad - 16\zeta_1(1-2\zeta_2^2)\zeta_3\mu vv_B - 8\zeta_2^2(1+\mu)v^2v_B^2 \\ &\quad - 8\zeta_3^2\mu(1+v^2+\mu v^2)v_B^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= -2r^2v^2[1-2\zeta_2^2 + (1-2\zeta_3^2)v_B^2] \\ &\quad + 4\zeta_1^2v^4[1+4(1-2\zeta_2^2)(1-2\zeta_3^2)v_B^2 + v_B^4] \\ &\quad - 2v^4\{1+(1-2\zeta_3^2)(4-8\zeta_2^2+v^2)v_B^2 \\ &\quad + [1+(1-2\zeta_2^2)v^2]v_B^4\} + 4\mu^2\zeta_3^2v^6v_B^2 \\ &\quad + 4\mu^2\zeta_2^2v^6v_B^4 - 2\mu^2v^6v_B^2(1+\mu_B)^{-1}(1+\mu_Bv_B^2) \\ &\quad - 4\mu v^4v_B^2 + 8\zeta_2^2\mu v^4v_B^2(1+v^2v_B^2) \\ &\quad - 32\zeta_2^2\zeta_3^2\mu v^4v_B^2 + 8\zeta_3^2\mu v^4(1+v^2)v_B^2 \\ &\quad - 2\mu v^4(1+\mu_B)^{-1}\{1+[(2+\mu_B)v^2 - 4(\zeta_2^2 + \zeta_3^2\mu_B)]v_B^2 \\ &\quad + [\mu_B + (1+2\mu_B)v^2]v_B^4 - 4\zeta_1vv_B(\zeta_3\mu_B + \zeta_2v_B^3)\} \\ a_4 &= r^2v^4[1+4(1-2\zeta_2^2)(1-2\zeta_3^2)v_B^2 + v_B^4] \\ &\quad + v^6v_B^2\{4+\mu^2v^2v_B^2 + (4+v^2)v_B^2 \\ &\quad - 8\zeta_1^2[1-2\zeta_3^2 + (1-2\zeta_2^2)v_B^2] - 8\zeta_2^2(1+\mu)v^2 \\ &\quad - 8\zeta_3^2(1+\mu)\} + 2\mu v^6v_B^2(1+\mu_B)^{-1}[2+\mu_B \\ &\quad + (1+v^2)v_B^2 + \mu_B(2+v^2)v_B^2] \\ a_5 &= -2v^6v_B^2\{r^2[1-2\zeta_3^2 + (1-2\zeta_2^2)v_B^2] \\ &\quad + (1-2\zeta_1^2+\mu)v^2v_B^2\} \\ a_6 &= r^2v^8v_B^4 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

と表される。このとき、式中に分数式が現れるのを避けるために、共振点高さ  $h_{\max}$  はこの式では

$$r = \sqrt{1 - (1/h_{\max}^2)} \quad (11)$$

に従って、 $r$  に置き換えられている。このパラメータ変換により、 $h_{\max}$  を最小化する  $H_\infty$  最適化問題は  $r$  を最小化する問題に置き換えられる。今後、 $h_{\max}$  の最小値は  $h_{\min}$ 、 $r$  の最小値は  $r_{\min}$  と表記される。

次に、西原の方法を用いて、この関数  $f_n$  から  $H_\infty$  規範に基づく最適解を導出する方法について紹介する。その方法は次の二つのステップに分かれて実施される。最初のステップでは複数個存在する系の共振点がその高さを等しく調整され、次のステップではそれらの共振点の高さが最小値をとるように調整される。

この西原の方法により導出された最適値を有する質量比  $\mu = 0.1$  の並列型二重動吸振器が装備された主系のコンプライアンス伝達関数を図3(a)に示す。このとき、主系の減衰比  $\zeta_1$  の値はゼロから 0.6 まで変化させているが、 $\zeta_1$  の値が大きくなるほど共振点高さ  $h_{\max}$  の値が低く抑えられていることが分かる。さらに、同図(b)は、同じ条件で計算された関数  $f_n$  を示している。関数  $f_n$  は振動系の共振点  $h_{\max}$  において最小値ゼロをとる。このことから、関数式  $f_n = 0$  は三つの共振振動数の二乗値  $y_a, y_b, y_c$  においていずれも重根をとることが分かる。よって、この関数  $f_n$  は、共振点において以下のように因数分解できるはずである。

$$f_n = (y-y_a)^2(y-y_b)^2(y-y_c)^2 \quad (12)$$

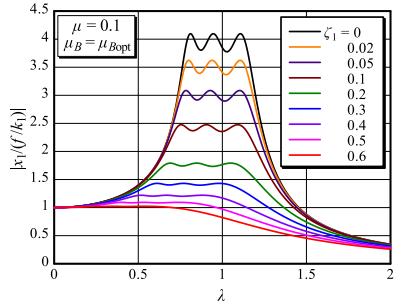
式(12)を展開し、 $y$ の降べき順に整理して式(8)の係数と比較すると6個の恒等式が得られる。それらの恒等式から三つのパラメータ $y_a, y_b, y_c$ を消去すると、独立した恒等式は次の3個になる。

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = (2a_2 - a_1^2)\sqrt{a_6} + 4a_5 = 0 \\ f_2 = a_1a_5 + 4a_6 + 2a_3\sqrt{a_6} = 0 \\ f_3 = 4a_6(a_1\sqrt{a_6} + a_4) - a_5^2 = 0 \end{array} \right\} \quad (13)$$

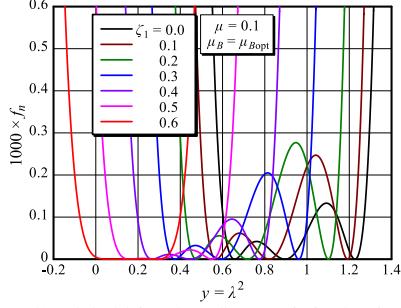
この式(13)の $a_1$ から $a_6$ に式(9)と(10)を代入すると

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = -r + r^3 + \ll 523 \text{ terms} \gg -4r\zeta_3^4\mu^4\mu_B^4v^4v_B^4 = 0 \\ f_2 = r^2 - r^3 + \ll 448 \text{ terms} \gg -2\zeta_3^2\mu^3\mu_B^2v^2v_B^4 = 0 \\ f_3 = 4r^4\zeta_3^2 + \ll 168 \text{ terms} \gg +r^2\mu^2\mu_B^2v^4v_B^4 = 0 \end{array} \right\} \quad (14)$$

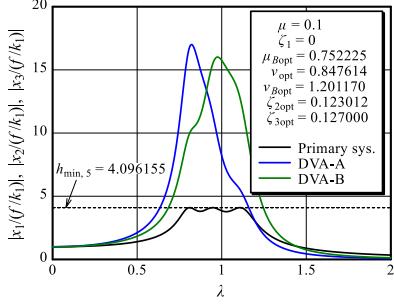
こうして3個の代数方程式で構成される連立方程式が得られたが、この最適化規範において決定すべき未知数の数は6個(動吸振器の設計パラメータ $\mu_B, v, v_B, \zeta_2$ および $\zeta_3$ の5個に加えて主系の共振点高さ $r$ )である。不足している三つの式は、式(14)によって等しく調整



(a) Optimized compliance transfer function of the primary system under the condition of  $\mu_B = \mu_{B\text{opt}}$



(b) Optimized deformed compliance transfer function of the primary system under the condition of  $\mu_B = \mu_{B\text{opt}}$

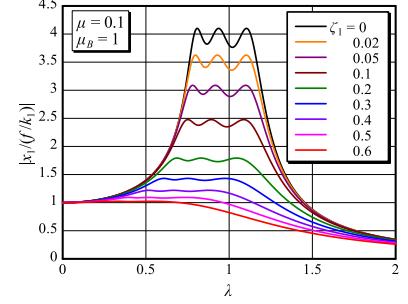


(c) Optimized compliance transfer functions for the primary system and two DVAs under the condition of  $\mu_B = \mu_{B\text{opt}}$

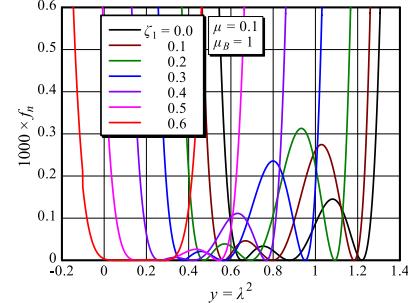
**Fig. 3** Compliance transfer function and a function  $f_n$  of the primary system with parallel-type double-mass DVA based on  $H_\infty$  criterion under the condition of  $\mu_B = \mu_{B\text{opt}}$ .

された三つの共振点高さが最小化されるという条件を加えることによって導出できる。

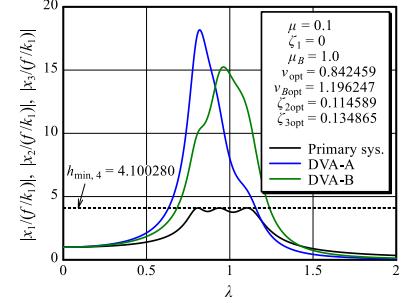
共振点高さ(ここでは $r$ の値)を小さく設定し過ぎると、式(14)は実根を持たない。実根を持つ極限の高さ( $r$ の最小値)においては、 $r$ に関する次の全微分式がゼロにならなければならない<sup>(10)</sup>。



(a) Optimized compliance transfer function of the primary system under the condition of  $\mu_B = 1$

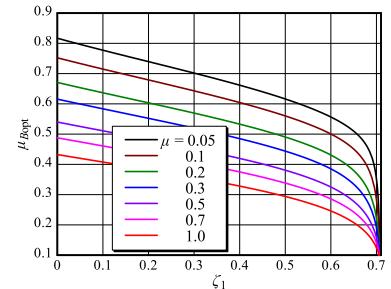


(b) Optimized deformed compliance transfer function of the primary system under the condition of  $\mu_B = 1$

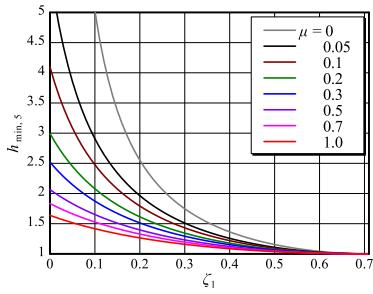


(c) Optimized compliance transfer functions for the primary system and two DVAs under the condition of  $\mu_B = 1$

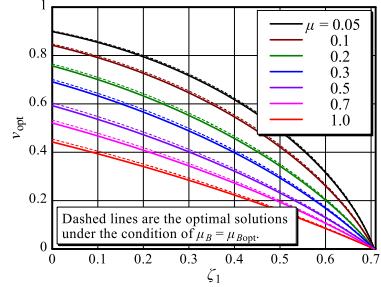
**Fig. 4** Compliance transfer function and a function  $f_n$  of the primary system with parallel-type double-mass DVA based on  $H_\infty$  criterion under the condition of  $\mu_B = 1$ .



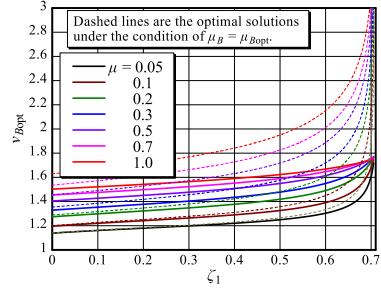
**Fig. 5** Optimal mass ratio  $\mu_{B\text{opt}}$  of two dynamic vibration absorbers arranged in parallel based on the  $H_\infty$  criterion.



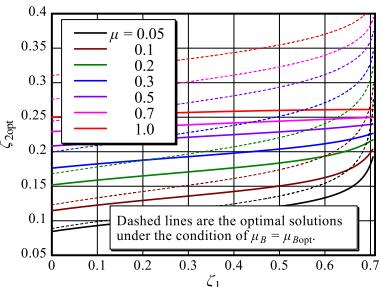
**Fig. 6** Resonance amplitude of the compliance transfer function of the system with optimized parallel-type double-mass DVA based on the  $H_\infty$  criterion.



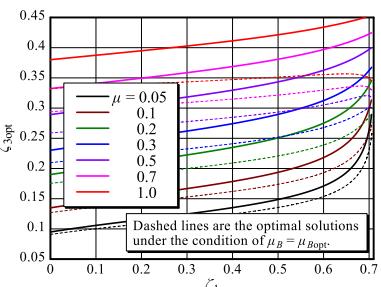
(a) Optimal tuning ratio  $v_{\text{opt}}$  under the condition of  $\mu_B = 1$



(b) Optimal tuning ratio  $v_{B\text{opt}}$  under the condition of  $\mu_B = 1$



(c) Optimal damping ratio  $\zeta_{2\text{opt}}$  under the condition of  $\mu_B = 1$



(d) Optimal damping ratio  $\zeta_{3\text{opt}}$  under the condition of  $\mu_B = 1$

**Fig. 7** Optimal solution of a parallel-type double-mass dynamic vibration absorber based on the  $H_\infty$  criterion under the condition of  $\mu_B = 1$ .

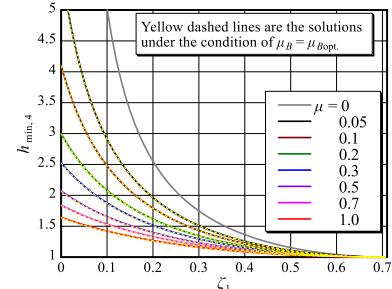
$$dr = \frac{\partial r}{\partial \mu_B} d\mu_B + \frac{\partial r}{\partial v} dv + \frac{\partial r}{\partial v_B} dv_B + \frac{\partial r}{\partial \zeta_2} d\zeta_2 + \frac{\partial r}{\partial \zeta_3} d\zeta_3 = 0 \quad (15)$$

パラメータ  $r$  は三つの関数  $f_1, f_2, f_3$  の中に含まれているので、式(15)は次のように書き換えることができる。

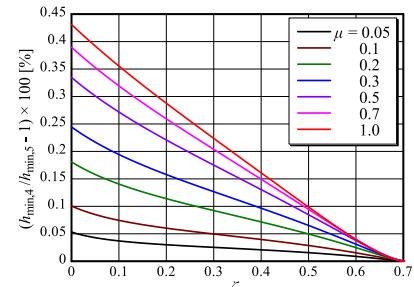
$$\begin{bmatrix} dr \\ dr \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial f_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial r}{\partial f_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial r}{\partial f_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mu_B} \frac{\partial f_1}{\partial v} \frac{\partial f_1}{\partial v_B} \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2} \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mu_B} \frac{\partial f_2}{\partial v} \frac{\partial f_2}{\partial v_B} \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2} \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \mu_B} \frac{\partial f_3}{\partial v} \frac{\partial f_3}{\partial v_B} \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_2} \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mu_B \\ dv \\ dv_B \\ d\zeta_2 \\ d\zeta_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (16)$$

式(16)に含まれる  $3 \times 5$  マトリックスはヤコビ行列と呼ばれる。式(16)中のすべてのパラメータの値に対してこの式が常にゼロとなるためには、このヤコビ行列がランク落ちしていかなければならない。すなわち、この3行5列のヤコビ行列のランクが2以下であることから、これから抽出された任意の  $3 \times 3$  の正方行列式がすべてゼロにならなければならぬ<sup>(12)</sup>。例えば

$$f_4 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mu_B} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial v_B} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mu_B} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v_B} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \mu_B} & \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v_B} \end{vmatrix} = 0, \quad f_5 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial v_B} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v_B} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v_B} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_2} \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$



(a) Minimized resonance amplitude  $h_{\min,4}$  under the condition of  $\mu_B = 1$



(b) Performance degradation rate of  $h_{\min,4}$  from exact value  $h_{\min,5}$

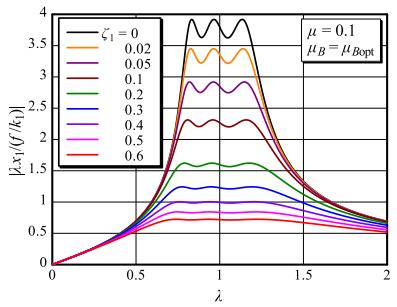
**Fig. 8** Resonance amplitude of the compliance transfer function of the system with quasi-optimized parallel-type double-mass DVA under the condition of  $\mu_B = 1$ .

$$f_6 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial v_B} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v_B} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v_B} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_3} \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

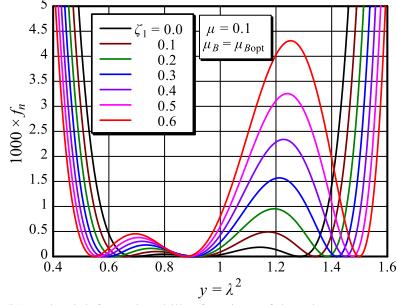
これらの行列式を展開すると、不足していた次の三つの方程式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} f_4 &= 8r^6\zeta_1\zeta_3^3\mu\mu_Bv^2 + \ll 278676 \text{ terms} \gg \\ &\quad - 8r^4\zeta_1\zeta_2\zeta_3^4\mu^7\mu_B^8v^{10}v_B^{11} = 0 \\ f_5 &= 2r^7\zeta_1\zeta_2^2\mu + \ll 183412 \text{ terms} \gg \\ &\quad + 8r^5\zeta_2\zeta_3^6\mu^8\mu_B^8v^9v_B^{10} = 0 \\ f_6 &= 2r^6\zeta_1\zeta_3^2\mu\mu_Bv^2 + \ll 191971 \text{ terms} \gg \\ &\quad + 4r^4\zeta_1\zeta_2\zeta_3^3\mu^7\mu_B^7v^{10}v_B^{11} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

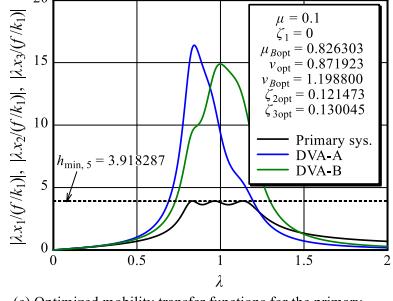
これで最適化に必要な式はすべて揃ったが、残念ながら式(14)と(19)で構成される六元連立方程式は代数



(a) Optimized mobility transfer function of the primary system with a parallel-type DVA under the condition of  $\mu_B = \mu_{B\text{opt}}$



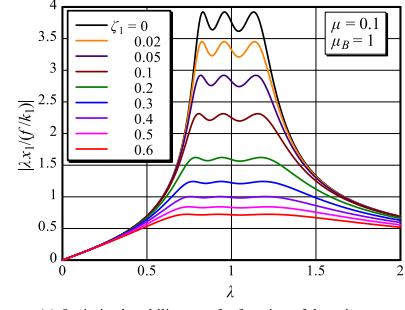
(b) Optimal deformed mobility functions of the primary system with a parallel-type DVA under the condition of  $\mu_B = \mu_{B\text{opt}}$



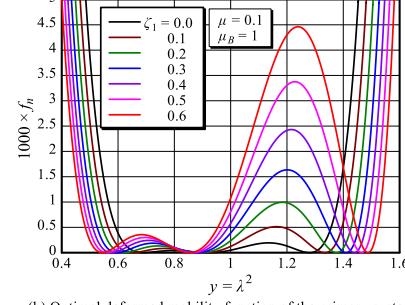
(c) Optimized mobility transfer functions for the primary system and two DVAs under the condition of  $\mu_B = \mu_{B\text{opt}}$

**Fig. 9** Mobility transfer function and a function  $f_n$  of the primary system with parallel-type double-mass DVA based on  $H_\infty$  criterion under the condition of  $\mu_B = \mu_{B\text{opt}}$ .

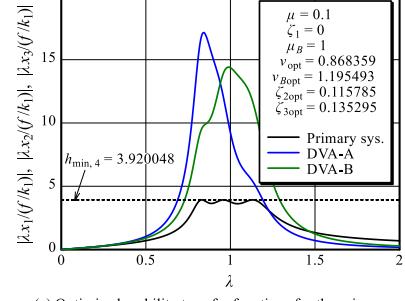
的な四則演算では解けない。そこで、ニュートン・ラフソン法(Mathematica のコマンド “FindRoot”)によって数値的に解き、その結果の一つを主系の減衰比の値を横軸にとって図 5 に示している。他の四つのパラメータの最適値は後述の図 7 で破線で示されている。図 6 は同時に得られた  $r_{\min}$  の値から導かれる  $h_{\min}$  の値である。これは動吸振器の五つのパラメータを最適化することによって達成された最小値であることから、 $h_{\min,5}$  と表現されている。参考までに、この図には動吸振器を持たない図 1(a)の振動系の共振点高さも示されている ( $\mu = 0$  のグレーの線)。図 1(a)に示された 1 自由度振動系のコンプライアンス伝達関数は、振動系の減衰比が  $\zeta_1 = 1/\sqrt{2} = 0.707$  に達すると、共振が消滅し、伝達関数は励振振動数比  $\lambda$  の増加と共に 1 から 0 に向かって単調に減少していくことが知られている。そのため、図 5 と 7 に示された動吸振器の最適解も  $\zeta_1 = 0.707$  までしか存在しない。



(a) Optimized mobility transfer function of the primary system under the condition of  $\mu_B = 1$

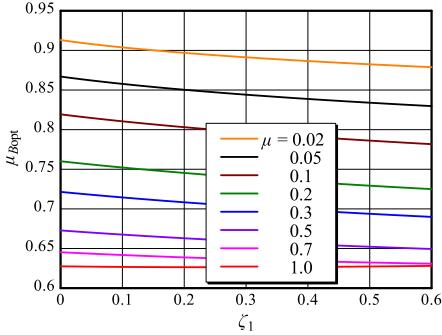


(b) Optimal deformed mobility function of the primary system with a parallel-type DVA under the condition of  $\mu_B = 1$



(c) Optimized mobility transfer functions for the primary system and two DVAs under the condition of  $\mu_B = 1$

**Fig. 10** Mobility transfer function and a function  $f_n$  of the primary system with parallel-type double-mass DVA based on  $H_\infty$  criterion under the condition of  $\mu_B = 1$ .

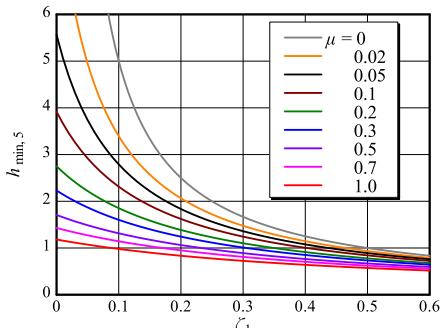


**Fig. 11** Optimal mass ratio  $\mu_{B\text{opt}}$  of two dynamic vibration absorbers arranged in parallel based on the  $H_\infty$  criterion.

図 5 から明らかなように、主系と動吸振器の質量比  $\mu$  と主系の減衰比  $\zeta_1$  が大きくなるに従って、二つの動吸振器の質量比  $\mu_B$  の最適値はゼロに向かって小さくなるが、ここで既存の質量を動吸振器として活用することを考慮して、以下では全領域において  $\mu_B = 1$  で固定した場合の動吸振器の制振効果の悪化について調査する。このときの最適化問題では未知数の数は 5 個に減じる。このことは、連立方程式を構成する方程式も次の五つだけになることを意味する。

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = 4r + \ll 133 \text{ terms} \gg + r\zeta_3^4 \mu^4 v^4 v_B^4 = 0 \\ f_2 = 2r^2 + \ll 185 \text{ terms} \gg - \zeta_3^2 \mu^3 v^4 v_B^4 = 0 \\ f_3 = 2r^4 \zeta_3^2 + \ll 58 \text{ terms} \gg + r^2 \mu^2 v^4 v_B^4 = 0 \\ f_4 = 32r^7 \zeta_1 \zeta_2 \mu + \ll 25700 \text{ terms} \gg \\ \quad + 4r^5 \zeta_2 \zeta_3^6 \mu^8 v^9 v_B^{10} = 0 \\ f_5 = 32r^6 \zeta_1 \zeta_3^2 \mu v^2 + \ll 27279 \text{ terms} \gg \\ \quad + 4r^4 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3^3 \mu^7 v^{10} v_B^{11} = 0 \end{array} \right\} \quad (20)$$

この式もまた、“Mathematica”に内蔵されたニュートン・ラフソン法により数値的に解くことができる。図 7(a)-(d) は、最適化すべき動吸振器の五つのパラメータのうち、二つの動吸振器の質量比を等置した場合（すなわち、 $\mu_B = 1$  と置いた場合）の残り四つのパラメータの最適値を示している。図中の破線は、 $\mu_B = \mu_{B\text{opt}}$  のとき



**Fig. 12** Resonance amplitude of the mobility transfer function of the system with optimized parallel-type double-mass DVA based on the  $H_\infty$  criterion.

の真の最適解である。実線と破線を比較すると、最適同調比  $v_{\text{opt}}$  はわずかしか変わらないが、二つの動吸振器の最適同調比  $v_{B\text{opt}}$  と各動吸振器の減衰比  $\zeta_{2\text{opt}}$ ,  $\zeta_{3\text{opt}}$  はかなり変化する。このような制約条件の下で得られた主系の共振点高さは、四つのパラメータを最適値に設定することによって得られた値であることから  $h_{\min,4}$  と表現する [図 8(a)]。 $h_{\min,4}$  の値は図 6 に示された  $h_{\min,5}$  の値よりも大きくなっているが、図 8(a) の図中に破線で再表示された  $h_{\min,5}$  の値と比較しても、ほとんど差がないよう見える。そこで、計算式  $[(h_{\min,4} - h_{\min,5})/h_{\min,5}] \times 100$  に従って性能の悪化率を百分率で計算した結果を図 8(b) に示している。この図は、図 5において、 $\mu = 0.1$ ,  $\zeta_1 = 0$  のときに  $\mu_{B\text{opt}} = 0.752$  となるべきところ、これを強引に  $\mu_B = 1.0$  と置いて  $H_\infty$  最適化を行った結果、主系の共振振幅比はわずかに 0.1% しか上昇しないことを意味している。しかもこの性能悪化率は、主系の減衰比が大きくなるほど減少していく。計算した全範囲 ( $\mu = 0.05 \sim 1.0$ ,  $\zeta_1 = 0 \sim 0.7$ ) において、生じ得る最大の悪化率は 0.43% 以下に収まっていることが確認された。こうして、二つの動吸振器の質量比  $\mu_B$  の値が図 5 に示された最適値から大きく離れていても、他のパラメータの値を微調整することにより、動吸振器の制振効果には大きな悪影響が現われないことが明らかになった。

#### 4. 主系のモビリティ伝達関数の $H_\infty$ 最適化

次に、この並列型二重動吸振器によって、主系のモビリティ伝達関数を  $H_\infty$  規範に基づいて最適設計する。この伝達関数は、機械構造物から発せられる騒音を低減するのに適している<sup>(10)</sup>。この場合の評価指標は

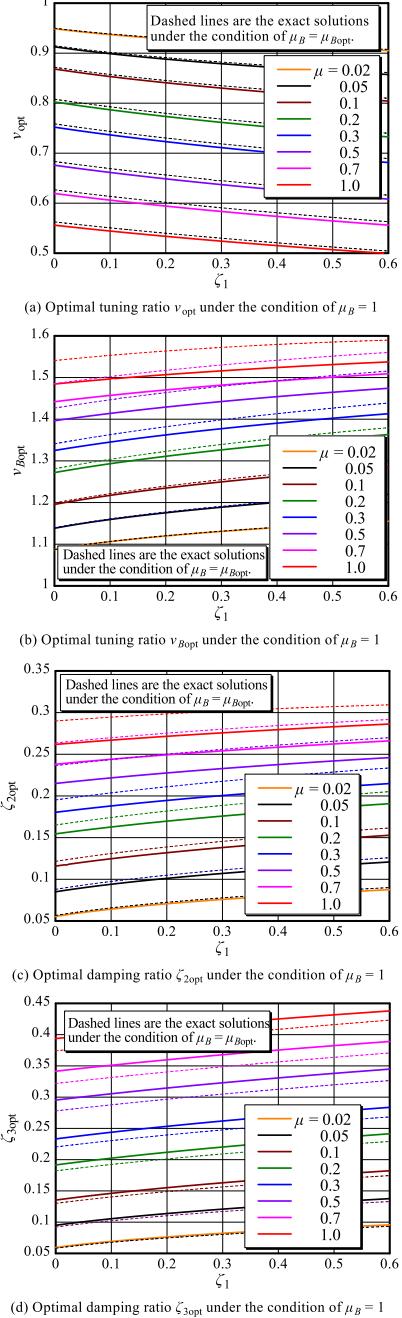
$$h_{\max} = \left| \frac{\dot{x}_1}{\omega_1 f / k_1} \right|_{\max} = \left| \frac{\lambda x_1}{f / k_1} \right|_{\max} \quad (21)$$

この式はモビリティ伝達関数の最大値を表しており、この  $h_{\max}$  を最小化することがこの場合の  $H_\infty$  規範の目標である。このモビリティ伝達関数の式 (21) から関数  $f_n$  を計算すると、ここでも式 (8) のように  $y = \lambda^2$  の 6 次式の形で関数  $f_n$  を表現できる。その係数  $a_i$  ( $i = 1 \sim 6$ ) については、ここでは表示しないが、その長さは式 (9), (10) とほとんど変わらない。ここで、最適化されたモビリティ伝達関数とそれに対応する関数  $f_n$  の形を表示すると図 9 のようになる。

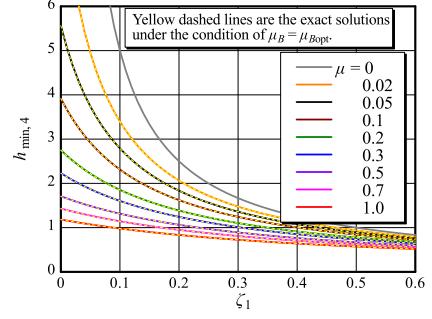
この図 9 を図 3 と比較すると、主系減衰  $\zeta_1$  の増加に伴う共振振動数の低下がモビリティ伝達関数の方が少なく、実際、モビリティ伝達関数では、第一、第二共振点は低振動数側に移動しているが、第三共振点は逆に高振動数側に移動している。また、モビリティ伝達関数は振動数ゼロにおいて高さゼロから出発すること

から共振点の高さも低くなっている。

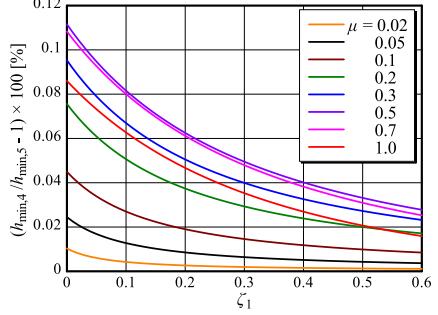
二つの動吸振器の最適化された質量比の値を示す図 11 をコンプライアンス伝達関数に対して得られた最適解の図 5 と比較すると、以下のことが分かる。コンプライアンス伝達関数では動吸振器の最適解は  $\zeta_1 = 0.707$  までしか存在しないが、モビリティ伝達関数の最適解は  $\zeta_1$  が無限大まで存在する。そのことにより、主系減衰の変化に伴う最適解の値の変動が極めて小さいことが特徴的である。他に特徴的なことは、 $\mu_{B\text{opt}}$  の値は、



**Fig. 13** Optimal solution of a parallel-type double-mass dynamic vibration absorber based on the  $H_\infty$  criterion for the mobility transfer function under the condition of  $\mu_B = 1$ .



(a) Minimized resonance amplitude under the condition of  $\mu_B = 1$



(b) Performance degradation rate of  $h_{\min,4}$  from exact value  $h_{\min,5}$

**Fig. 14** Resonance amplitude of the mobility transfer function of the system with quasi-optimized parallel-type double-mass DVA under the condition of  $\mu_B = 1$ .

動吸振器と主系質量比  $\mu$  が大きいほど、また主系の減衰比  $\zeta_1$  が大きいほど小さくなるのが一般的であるが、図 11 に示されたモビリティ伝達関数の  $\mu_{B\text{opt}}$  の値は  $\mu$  が 0.5 よりも大きくなるとその減少傾向が小さくなり、 $\mu = 1$  のときには  $\zeta_1$  が大きいほど増加していく。ここでも  $\mu_B = 1$  という制約条件を設けて  $H_\infty$  最適化を行うことができ、その結果を図 13 に示している。この図には破線で  $\mu_B = \mu_{B\text{opt}}$  のときの厳密解も併記している。図 7 と同じように二つの動吸振器の最適同調比  $v_{B\text{opt}}$  と最適減衰比  $\zeta_{2\text{opt}}, \zeta_{3\text{opt}}$  に関しては、厳密解と近似解で大きな差が生じている。その結果、達成された共振振幅比の最小値  $|\lambda x_1 / (\omega f / k_1)|_{\min} = h_{\min,4}$  を図 14(a) に示しているが、この図には、動吸振器の五つの設計パラメータを最適値に調整して得られるはずの厳密な最小値  $h_{\min,5}$  も黄色の破線で示されている。図 14(a) では厳密解と近似解の差は明確ではないので、図 14(b)においてその性能悪化百分率を示している。この図を図 8(b) と比較すると、モビリティ伝達関数の方がコンプライアンスよりも性能悪化率が低く、共振点の上昇は同じ計算範囲において 0.11% 以下に抑えられている。

## 5. 直列型二重動吸振器を備えた主系のモビリティ伝達関数の $H_\infty$ 最適化

最後に、図 1(c) に示された直列型二重動吸振器を備えた主系のモビリティ伝達関数を  $H_\infty$  規範に基づいて最適設計した場合について紹介する。この場合の関数

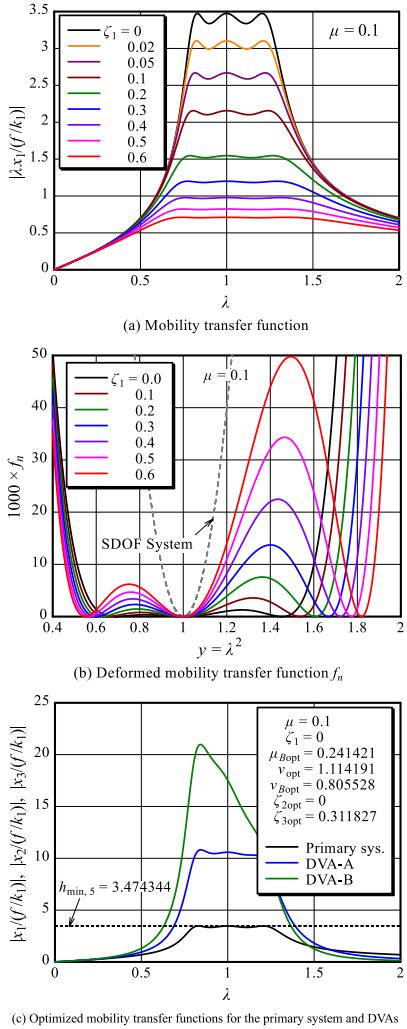
$f_n$  は以下のように計算される<sup>(13)</sup>.

$$\left. \begin{aligned} f_n &= a_0 y^6 + a_1 y^5 + a_2 y^4 + a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0 \\ a_0 &= 1, \quad a_1 = -5 + r^2 - 2\mu - 2v^2 + 4(\zeta_1^2 + \zeta_3^2 v^2) \\ a_2 &= 10 + 6\mu + \mu^2 + 2(4 + \mu)v^2 + v^4 \\ &\quad - 4\zeta_3^2(5 + 2\mu)v^2 - 2(r^2 + 4\zeta_1^2)[1 + (1 - 2\zeta_3^2)v^2] \\ a_3 &= -13 - 8\mu - 2\mu^2 - 2(5 + 2\mu)v^2 - 3v^4 \\ &\quad + 4\zeta_3^2(8 + 4\mu + \mu^2)v^2 - 8\zeta_1\zeta_3\mu v(1 - v^2) \\ &\quad + (r^2 + 4\zeta_1^2)[3 + 2(1 - 4\zeta_3^2)v^2 + v^4] \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

このように、関数  $f_n$  は  $y$  の係数が対称形に配置される。この性質は相反性と呼ばれる。実は、この種の直列型の 3 自由度振動系には以下の等式が成立し、そのことによって関数  $f_n$  に相反性が付与される<sup>(13)</sup>.

$$v_B = 1/v^2, \quad \mu_B = v^2 - 1 \quad (23)$$

直列の二重動吸振器では、動吸振器  $A$  の最適減衰比  $\zeta_{2\text{opt}}$  はゼロになることから、式(22)からは  $\zeta_2$ 、および



**Fig. 15** Mobility transfer function and a function  $f_n$  of the primary system with series-type double-mass DVA based on  $H_\infty$  criterion.

式(23)の関係式により  $v_B$  と  $\mu_B$  も省かれている。こうして、直列型二重動吸振器の最適化では、最適化すべき無次元パラメータの数が並列型の 5 個から 2 個に減じる。その結果、相反性を有する関数  $f_n$  はさらに

$$\left. \begin{aligned} f_n &= (y - 1)^2(b_0 y^4 + b_1 y^3 + b_2 y^2 + b_1 y + b_0) \\ b_0 &= 1, \quad b_1 = -5 + r^2 - 2\mu - 2v^2 + 4(\zeta_1^2 + \zeta_3^2 v^2) \\ b_2 &= 10 + 6\mu + \mu^2 + 2(4 + \mu)v^2 + v^4 \\ &\quad - 4\zeta_3^2(5 + 2\mu)v^2 - 2(r^2 + 4\zeta_1^2)[1 + (1 - 2\zeta_3^2)v^2] \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

のように因数分解できる。

この直列型二重動吸振器のモビリティ伝達関数の  $H_\infty$  最適化においては、 $\zeta_2$  の最適値はゼロになり、パラメータ間にすでに式(23)に示された関係式が成立していることにより、最終的には  $v^2$  に関する次の 4 次方程式を解く問題に帰着する<sup>(13)</sup>.

$$\left. \begin{aligned} f_v &= v^8 + b_1 v^6 + b_2 v^4 + b_3 v^2 + b_4 = 0 \\ b_1 &= -4(1 + \mu), \quad b_2 = 2(3 + 6\mu + \mu^2) \\ b_3 &= -4[1 + 3\mu + (1 + 2\zeta_1^2)\mu^2 - \mu^3] \\ b_4 &= 1 + 4\mu + 2(1 + 4\zeta_1^2)\mu^2 - 4\mu^3 + \mu^4 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

この 4 次方程式はカルダノの方法によって解くことができ、以下の解が導かれている<sup>(10)</sup>.

$$\left. \begin{aligned} v_{\text{opt}} &= \sqrt{1 + \mu + q_1 + \sqrt{3(1 + \mu)^2 - p_0 - q_1^2 + \frac{2\zeta_1^2\mu^2}{q_1}}} \\ q_1 &= \sqrt{(1 + \mu)^2 - \frac{p_0}{3} + \frac{\mu q_0^{1/3}}{3} - \frac{2p_1\mu^2}{3q_0^{1/3}}} \\ p_0 &= 3 + 6\mu + \mu^2, \quad p_1 = 3\zeta_1^2 - 2\mu \\ q_0 &= \frac{1}{2}\mu(27\zeta_1^4 - 36\zeta_1^2\mu + 16\mu^2) \\ &\quad + \frac{3}{2}\zeta_1^2\mu\sqrt{3(27\zeta_1^4 - 40\zeta_1^2\mu + 16\mu^2)} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

他のパラメータの最適解は、式(26)で計算された  $v_{\text{opt}}$  を用いて以下の式により計算される。

$$\left. \begin{aligned} \mu_{B\text{opt}} &= v_{\text{opt}}^2 - 1, \quad v_{B\text{opt}} = \frac{1}{v_{\text{opt}}^2}, \quad \zeta_{3\text{opt}} = \frac{1}{v_{\text{opt}}}\sqrt{\frac{v_{\text{opt}}^2 - 1}{2}} \\ \zeta_{2\text{opt}} &= 0, \quad h_{\min} = \sqrt{\frac{1}{2(v_{\text{opt}}^2 - 1 + 2\zeta_1^2 - 2\mu)}} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

最後に、 $\zeta_1 = 0$  の特別な場合には、式(26)と(27)は次のように簡単化される。

$$\left. \begin{aligned} \mu_{B\text{opt}} &= (1 + \sqrt{2})\mu, \quad v_{\text{opt}} = \sqrt{1 + (1 + \sqrt{2})\mu} \\ v_{B\text{opt}} &= \frac{1}{1 + (1 + \sqrt{2})\mu}, \quad \zeta_{2\text{opt}} = 0 \\ \zeta_{3\text{opt}} &= \sqrt{\frac{1}{2}\frac{(1 + \sqrt{2})\mu}{1 + (1 + \sqrt{2})\mu}}, \quad h_{\min} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2\mu}} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

図 15 は、これらの式によって最適に調整された直列型二重動吸振器 ( $\mu = 0.1$ ) を備えた主系のモビリティ伝達関数とその変形関数  $f_n$ 、および  $\zeta_1 = 0$  における主系と二つの動吸振器のモビリティ伝達関数を示している。同図 (b) に示された破線は、図 1(a) の 1 自由度振動系に対するモビリティ伝達関数から計算される関数  $f_n$  である。1 自由度振動系では  $f_n = y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2$  となり、振動系の減衰比の値に関係なく、1 本の放物線で表される。この関数は主系減衰の値に関係なく、常に  $y = \lambda^2 = 1$  において重根をとるが、直列型二重動吸振器を備えた 3 自由度振動系においてもその性質が保持されている。同じ 3 自由度系でも並列型の二重動吸振器を備えた系ではその性質が失われ、それが数式処理によって最適解を導くことができない原因になっている。図 15(c) と図 9(c) を比較すると、直列型二重動吸振器を備えた振動系の方が、並列型二重動吸振器を備えた系よりも振動が低く抑えられていることが分かる。それは直列型では動吸振器  $B$  の振動振幅が並列型よりもはるかに大きくなり、そこで大きな制振力が得られるからである。

## 6. 結 言

本記事では、並列型二重動吸振器で用いられる二つの動吸振器の質量を等値した場合に、動吸振器の制振性能がどれほど悪化するのかということを検討した。その結果、主系と動吸振器の質量比が 1 までの範囲において、コンプライアンス伝達関数の  $H_\infty$  最適化の場合には 0.43% 以下であり、モビリティ伝達関数では 0.11% 以下であった。この悪化率の最大値は主系に減衰がないときに生じる。また、この記事では説明を省いているが、 $H_2$  規範で主系のコンプライアンス伝達関数を最適化した場合には、制振性能悪化率は最大 0.09% であった<sup>(14)</sup>。このように  $H_\infty$  規範と  $H_2$  規範に従って並列型二重動吸振器を設計する場合には、二つの動吸振器の質量を等しいと仮定しても動吸振器の性能悪化は問題にならないと言える。さらに、直列型二重動吸振器の最適化では動吸振器の設計式が簡便な数式の形で導出できるのに対して、並列型ではそのような代数的処理ができないのは、変形伝達関数  $f_n$  における相反性の有無が決定的な役割を果たしていることを再確認した。

## References

- (1) Watts, P., On a Method of Reducing the Rolling of Ship at Sea, Transactions of the Institution of Naval Architects, Vol.24 (1883), pp.165-190.
- (2) Ormondroyd, J., and Den Hartog, J. P., The Theory of the Dynamic Vibration Absorber, ASME Journal of

Applied Mechanics, Vol.50, No.7 (1928), pp.9-22.

- (3) Asami, T., Nishihara, O., and Baz, A. M., Analytical Solutions to  $H_\infty$  and  $H_2$  Optimization of Dynamic Vibration Absorbers Attached to Damped Linear Systems, ASME J. Vib. Acoust., Vol.124, No.2 (2002), pp.284-295, DOI: 10.1115/1.1456458.
- (4) Hahnkamm, E., Die Dämpfung von Fundamentalschwingungen bei veränderlicher Erregerfrequenz, Ingenieur Archiv., Vol.4, (1932), pp.192-201.
- (5) Brock, J. E., A Note on the Damped Vibration Absorber, ASME J. Applied Mech., Vol.13, No.4 (1946), p.A-284.
- (6) Den Hartog, J. P., Mechanical Vibrations, 4th ed., (1956), McGraw-Hill, pp.87-106.
- (7) 岩浪孝一, 背戸一登, 2 個の複合動的吸振器の最適設計法とその効果, 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.50, No.449 (1984), pp.44-52, DOI: 10.1299/kikaic.50.44.
- (8) 安田正志, 潘 公宇, 直列二重動吸振器の最適設計と制振効果, 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.69, No.688 (2003), pp.3175-3182, DOI: 10.1299/kikaic.69.3175.
- (9) Asami, T., Optimal Design of Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Arranged in Series or in Parallel, ASME J. Vib. Acoust., Vol.139, No.1 (2017), DOI: 10.1115/1.4034776.
- (10) Asami, T., Mizukawa, Y., and Ise, T., Optimal Design of Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Minimizing the Mobility Transfer Function, ASME J. Vib. Acoust., Vol.140, No.6 (2018), DOI: 10.1115/1.4040229.
- (11) Asami, T., Calculation of the  $H_\infty$  Optimized Design of a Single-Mass Dynamic Vibration Absorber Attached to a Damped Primary System, JSME Mech. Eng. Jour., Vol.7, No.5 (2020), DOI: 10.1299/mej.20-00250.
- (12) 西原 修, 松久 寛, 動吸振器の最大振幅倍率最小化設計(代数的な厳密解の導出), 日本機械学会論文集, (C 編), Vol.63, No.614 (1997), pp.3438-3445, DOI: 10.1299/kikaic.63.3438.
- (13) 浅見敏彦, 機械振動系に対する伝達関数の相反性と動吸振器の最適設計式との関係, ばね論文集, 第 67 号 (2022), pp.43-52.
- (14) 浅見敏彦, 減衰系に取り付ける並列型二重動吸振器の準最適設計(続報: 二つの動吸振器質量を等値したときの  $H_2$  最適解の精度), 日本機械学会 2022 年度年次大会講演会, No.22-1, J101-05, (2022).