ゲーム理論と「量子的」エンタングルメント

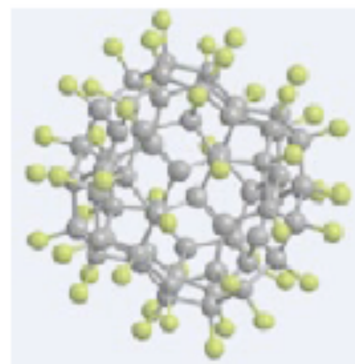
全 卓樹（高知工科大）

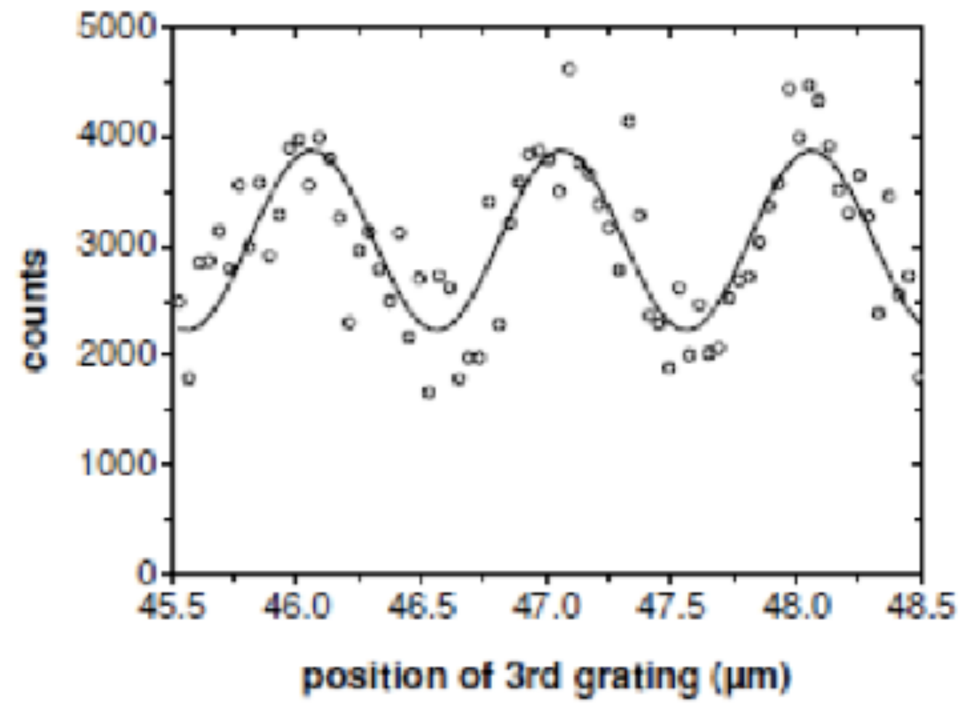
序

- 量子論を人間の意思決定過程の分析に「応用」できるか？
  → 不確実性のもとでの意思決定の量子論
  - 「量子脳」説：神経回路は量子的と考える（現時点では空想的）
  - 「現象論」説：確率理論の拡張としての量子論 ←この話はこっち
- 話の順序
  - 量子論で人間の信念を表現してみる
  - 「当然原理の破れ」と「連言錯誤」について
  - 量子ゲーム理論について

巨大分子での量子的干渉

- 有機分子による二重スリット干渉実験



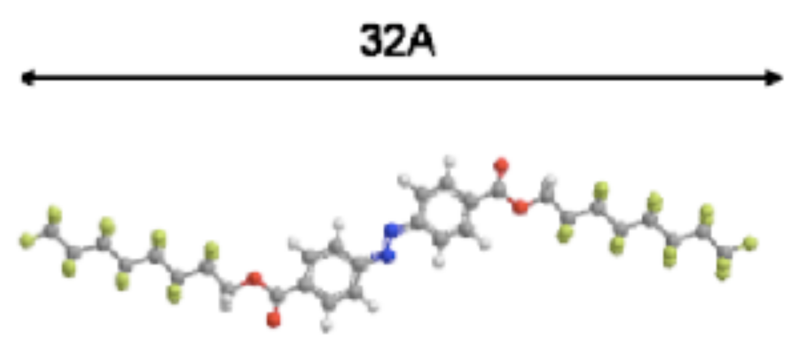


- これまでに最も重いもの:　$C_{60}F_{48}$

  fluorinated fullerene ↑
  (Hackermüller et al. 2003)

- 最大のもの:　azobenzene　→

  (Gerlich et al. 2007)



人間の意思決定に於ける量子的干渉？

- 恋愛当然原理の破れ (Whitchurch, Wilson & Gilbert 2010) [図式的に簡略化]
  - 魅力的な異性と新しく知り合いになって、相手を好きになる確率
    相手の態度によるが...

向こうに好意有り	：	恋に落ちる	30 %	別に何とも	70 %
向こうは無関心	：	恋に落ちる	10 %	別に何とも	90 %
向こうの態度不明	：	恋に落ちる	45 %	別に何とも	55 %

オリジナル breaking of sure-thing principle by Tversky & Shafir 1985

- Quantum decision theory interference in 2 qubits -> **entanglement**

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|LV)\left(\sqrt{0.3}\,|lv\rangle + \sqrt{0.7}\,|no\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|NO)\left(\sqrt{0.1}e^{i\theta}\,|lv\rangle + \sqrt{0.9}e^{i\phi}\,|no\rangle\right)$$

$$P(lv|Unk) \approx \frac{0.3+0.1}{2} + 2\sqrt{0.3\times 0.1}\cos\theta$$

(Cheon, Takahashi 2010)

量子状態の観測による変化

- von Neumann-Lüders射影公準　$|\alpha\rangle = \sqrt{(p_0)}\, |0\rangle + \sqrt{(p_1)}\, e^{i\phi}\, |1\rangle$ を観測すると

  確率 $|\langle 0|\alpha\rangle|^2$ で　$|\alpha\rangle \rightarrow \kappa_0\, |\alpha\rangle = |0\rangle$　に変化

  確率 $|\langle 1|\alpha\rangle|^2$ で　$|\alpha\rangle \rightarrow \kappa_1\, |\alpha\rangle = e^{i\phi}\, |1\rangle$　に変化

  射影演算子　$\mathcal{K}_0 = \frac{|0\rangle\langle 0|}{\sqrt{\langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle}}$　$\mathcal{K}_1 = \frac{|1\rangle\langle 1|}{\sqrt{\langle\alpha|1\rangle\langle 1|\alpha\rangle}}$

  - 一般には $|\alpha\rangle$ を観測して事象 $|\beta\rangle$ に変化する過程は

    確率 $|\langle\beta|\alpha\rangle|^2$ で、状態は　$|\alpha\rangle \rightarrow \kappa_\beta\, |\alpha\rangle = e^{i\,(\text{位相})}\, |\beta\rangle$ に変化

    射影演算子　$\mathcal{K}_\beta = \frac{|\beta\rangle\langle\beta|}{\sqrt{\langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle}}$

- 例　$|\alpha\rangle = 1/\sqrt{2}\, |0\rangle + 1/\sqrt{2}\, |1\rangle$、　$|\beta\rangle = 1/\sqrt{2}\, |0\rangle + 1/\sqrt{2}\, \mathbf{i}\, |1\rangle$

  射影観測により確率 1/2 で　$|\alpha\rangle \rightarrow K_\beta\, |\alpha\rangle = (1+\mathbf{i})/\sqrt{2}\, |\beta\rangle = e^{\mathbf{i}\,\pi/4}\, |\beta\rangle$

心理状態を量子波動関数で表してみる

- 山登りするかしないか

    確率的な事象 / 相反して一方しか起こらない事象

    山登らぬ or 登る： 量子状態 $|0\rangle$ or $|1\rangle$ と考えてみる

- 心が決まってない状態

    - 波動関数 $|\alpha\rangle = \sqrt{q_0}\,|0\rangle + \sqrt{q_1}\,e^{i\phi}\,|1\rangle$ 登山選好性

    - $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$ （正規性） $\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$ （直交性）

- 登らない確率 $|\langle 0|\alpha\rangle|^2 = q_0$、 登る確率 $|\langle 1|\alpha\rangle|^2 = q_1$

    全確率 $|\langle\alpha|\alpha\rangle|^2 = q_0 + q_1 = 1$

→ 新しい事項なにも無し！

心理状態を量子波動関数で表してみる（再挑戦）

- 天気に応じて山登り（二つの連結事象）

降雨についての信念

  - 天気は雨 or 晴れ（与件）： $|0)$ or $|1)$ ； $|K) = \sqrt{p_0}\,|0) + \sqrt{p_1}\,e^{i\kappa}\,|1)$
  - 山登らぬ or 登る（選択）： $|0\rangle$ or $|1\rangle$ ； $|\alpha\rangle = \sqrt{q_0}\,|0\rangle + \sqrt{q_1}\,e^{i\Phi}\,|1\rangle$

登山選好性

- 雨降ったら q_{00} / q_{10} の確率で登らぬ／登る
  晴れたら q_{01} / q_{11} の確率で登らぬ／登るという選好性は

$$||\Psi\rangle) = 1/\sqrt{2}\,\{\sqrt{q_{00}}\,|0\rangle + \sqrt{q_{10}}\,e^{i\Phi_0}\,|1\rangle\}\,|0) + 1/\sqrt{2}\,\{\sqrt{q_{01}}\,|0\rangle + \sqrt{q_{11}}\,e^{i\Phi_1}\,|1\rangle\}\,|1)$$

エンタングル状態

- 降雨についての信念 $|K)$ の時、選好性を記述する状態は

Lüders 射影で作れる $||\Psi\rangle) \rightarrow ||\Psi'\rangle) = \mathcal{K}\,||\Psi\rangle)$ ； $\mathcal{K} = \dfrac{|K)\,(K|}{\sqrt{(\langle\Psi||K)\,(K||\Psi\rangle)}}$

中間的与件での行動

- 最初の心理状態

  $||\Psi>) = 1/\sqrt{2}\ \{\sqrt{q_{00}}\ |0> + \sqrt{q_{10}}\ e^{i\Phi_0}\ |1>\}\ |0) + 1/\sqrt{2}\ \{\sqrt{q_{01}}\ |0> + \sqrt{q_{11}}\ e^{i\Phi_1}\ |1>\}\ |1)$

  - 降雨についての信念　$|K) = \sqrt{p_0}\ |0) + \sqrt{p_1}\ e^{i\kappa}\ |1)$

$\mathcal{K} = 2\ |0)(0|$

$\mathcal{K} = 2\ |1)(1|$

- 状況 |K) を確信で登る（ |1>）; $Q_{1K} = \ |\ (K|<1|\ \mathcal{K}||\Psi>)\ |^2$

  雨を確信 $|K) = |0)$ で登る　；$Q_{10} = 2|\ (0|<1||\Psi>)\ |^2 = |\sqrt{q_{10}}\ e^{i\Phi_0}\ |^2 = q_{10}$

  晴れ確信 $|K) = |1)$ で登る　；$Q_{11} = 2|\ (1|<1||\Psi>)\ |^2 = |\ e^{-i\kappa}\sqrt{q_{11}}\ e^{i\Phi_1}\ |^2 = q_{11}$

- 一般の|K) での行動

$$Q_{jK} = \frac{\left|\sqrt{q_{j0}p_0} + \sqrt{q_{j1}p_1}e^{i\theta_j}\right|^2}{\left|\sqrt{q_{00}p_0} + \sqrt{q_{01}p_1}e^{i\theta_0}\right|^2 + \left|\sqrt{q_{10}p_0} + \sqrt{q_{11}p_1}e^{i\theta_1}\right|^2}$$

Cheon & Takahashi, 2010

$$\theta_0 = \kappa, \quad \theta_1 = \kappa + \varphi_0 - \varphi_1$$

算術平均、幾何平均、量子平均

- 与件が |0) と |1) の中間状態 |K) での行動（|0> or |1>）選択確率

$$Q_{0K} = \frac{q_{00}p_0 + q_{01}p_1 + 2\sqrt{q_{00}p_0q_{01}p_1}\cos\theta_0}{1 + 2\sqrt{p_0p_1}(\sqrt{q_{00}q_{01}}\cos\theta_0 + \sqrt{q_{10}q_{11}}\cos\theta_1)}$$

$$Q_{1K} = \frac{q_{10}p_0 + q_{11}p_1 + 2\sqrt{q_{10}p_0q_{11}p_1}\cos\theta_1}{1 + 2\sqrt{p_0p_1}(\sqrt{q_{00}q_{01}}\cos\theta_0 + \sqrt{q_{10}q_{11}}\cos\theta_1)}$$

- 「古典的」結果は算術平均

  $Q_{jK} = q_{j0}\, p_0 + q_{j1}\, p_1$　　上式で $\cos\theta_j = 0$ と置くと出る

- 第二項は幾何平均の出てくる干渉項

  $2\sqrt{(q_{j0}\, p_0\, q_{j1}\, p_1)}$　　強度のlogで行なわれる「基層」認識での平均

- 分母は $Q_{0K}+Q_{1K}=1$を保証する「規格化因子」

幾何平均的推論の例

- あなたならば次のルールの籤をいくらなら買う？

  1/2 の確率で 100,000 円

  1/2 の確率で　　　10 円

- 繰り返し買って損しないためには ->

  算術平均

  P_{am} = (100,000+10)/2 ≈ 50,000 [yen]

- 実際に人々にアンケート取ると次の値に近い

  幾何平均

  P_{gm} = √(100,000 x 10) = 1,000 [yen]

- 売り買い逆に聞くと 90,000 円あたりとの解答多い； “支出の幾何平均”

量子的不等式

- 「量子的」確率は古典的にあり得ない値をとるが、それでも制限あり

$$Q_{jK} = \frac{\left|\sqrt{q_{j0}p_0} + \sqrt{q_{j1}p_1}e^{i\theta_j}\right|^2}{\left|\sqrt{q_{00}p_0} + \sqrt{q_{01}p_1}e^{i\theta_0}\right|^2 + \left|\sqrt{q_{10}p_0} + \sqrt{q_{11}p_1}e^{i\theta_1}\right|^2}$$

- 量子連結確率の不等式

Cheon & Takahashi, 2010

$$\frac{\left(\sqrt{q_{j0}p_0} + \sqrt{q_{j1}p_1}\right)^2}{1+f_j} \geq Q_{jK} \geq \frac{\left(\sqrt{q_{j0}p_0} - \sqrt{q_{j1}p_1}\right)^2}{1-f_j}$$

ただし $f_j = 2\sqrt{p_0p_1}\left(\sqrt{q_{j0}q_{j1}} - \sqrt{q_{\bar{j}0}q_{\bar{j}1}}\right)$

- ０以上１以下の広い範囲取れる：（）内は０から二倍になる

「当然原理」の破れ

- 二段階囚人ディレンマ型ゲーム

被験者 \ 相手	裏切	協力
裏切	**1 \ 1**	**5 \ 0**
協力	**0 \ 5**	**3 \ 3**

- Tversky & Shafir の実験 (1992)　“Breaking of sure-thing principle”

  * 相手は 裏切った　　裏切る 97%，協力する　3%

  * 相手は 協力した　　裏切る 84%，協力する 16%

  * 相手は 行動不明　　裏切る **63%**，協力する 37%

  中間の値の筈が？

- 細部以前に、古典確率事象では絶対にあり得ない　→　「当然原理」の破れ

連言錯誤

- 東大の上野千鶴子先生のお弟子凜子さん、みずほ銀の制服らしきもの着てた

[名称はすべて架空（空似）でデータは図式的単純化]

  - まず「凜子さんてフェミニスト？」

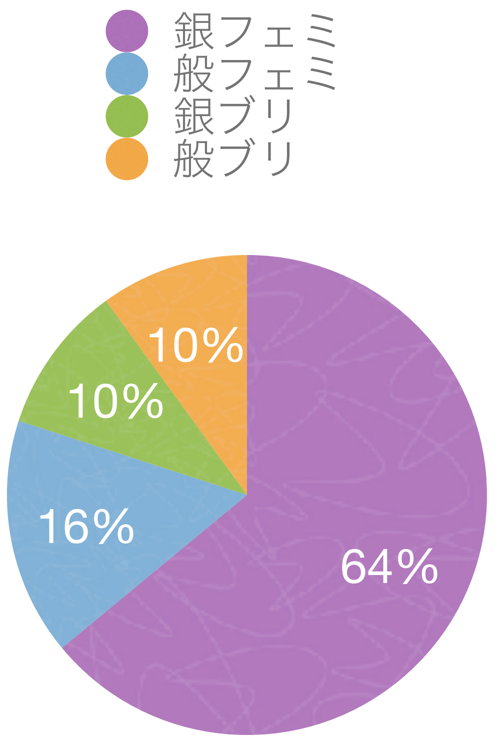
    そして「凜子さんが銀行員の確率は？」と質問

    凜子はフェミニスト（80%）：銀行員 80%　ちがう 20%

    そうとは限らない（20%）（銀行員 50%　ちがう 50%）

  - 生活哲学の話し抜きに「凜子さんは銀行員か？」と質問

    銀行員 60%　ちがう 40%



- 「銀行員だ」60 %　<　「フェミニストで 銀行員だ」64 %

  →連結事象の 連言錯誤　(conjunction fallacy)　：論理的包含関係が破綻！

オリジナル conjunction fallacy on LINDA　by Tversky & Kahneman 1983

当然原理の破れと連言錯誤の関係

- 欧州二都市での発電所建設計画への賛否　[例示用仮想的データ]　*Cheon & Takahashi, 2011*
  - 発電所の種類指定（半々の被験者で）--両都市でほぼ同じ値

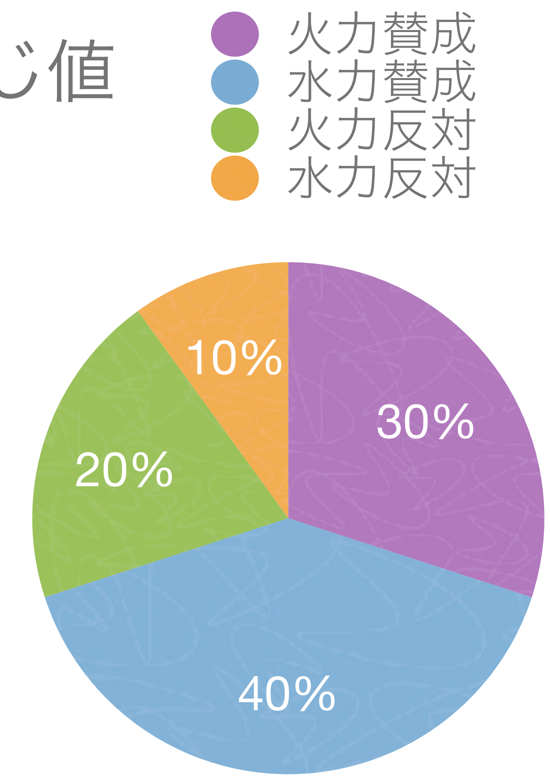
    水力発電所（50%）　:　賛成　80 %　　反対　20 %

    火力発電所（50%）　:　賛成　60 %　　反対　40 %

  - 発電所の種類不明（全被験者に半々くらいと告げる）

ナポリ　:　賛成　50 %　　反対　50 %

オスロ　:　賛成　25 %　　反対　75 %



- ナポリ：　賛成 50% < 火力なら賛成 60%　→　当然原理のみ破れてる
- オスロ：　賛成 25% < 火力に賛成 30%　→　連言錯誤も起きてる

注：連言錯誤のみ起こる例もあり得る

当然原理の破れと連言錯誤

- 古典的な算術平均の連結確率

  $Q_1 = q_{10}\, p_0 + q_{11}\, p_1$ で

Cheon & Takahashi, 2011

  - $p_0 \geq 0$、 $p_1 \geq 0$から

    $\max[q_{10}, q_{11}] \geq Q_1 \geq \min[q_{10}, q_{11}]$ ...... 当然原理　Sure-thing principle

  - $q_{10}\, p_0 \geq 0$、 $q_{11}\, p_1 \geq 0$ から

    $Q_1 \geq q_{11}\, p_1$、 $Q_1 \geq q_{10}\, p_0$ ...... 連言包含性 Conjunctionality

- 幾何平均の干渉項（＆規格化項）のある「量子平均」

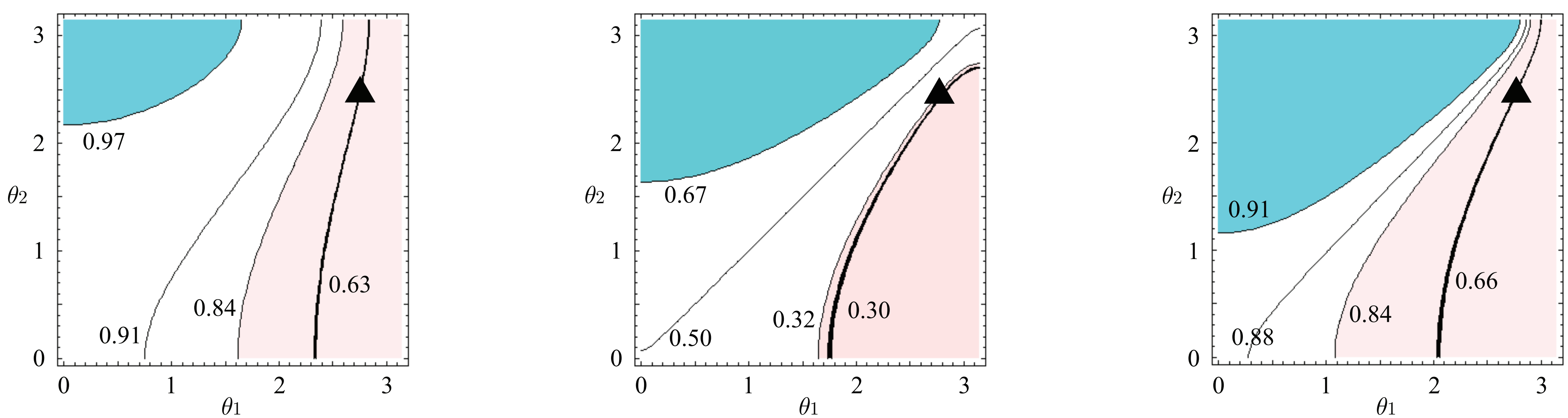
  $Q_1 = [\, q_{10}\, p_0 + q_{11}\, p_1 + 2\sqrt{(q_{10}\, p_0\, q_{11}\, p_1)} \cos\theta_1 \,] \,/\, [\, 1 + f_1(\theta_1) \,]$

  は心理学的錯覚のどちらか一方、または両方の破れを記述する事が可能

実験的検証の一例

- **B**usemeyer & Pothos, 2009
  Khrennikov & Haven, 2009
  Cheon & Takahashi, 2010
  Asano, Ohya, Tanaka,
  Basieva & Khrennikov, 2011

Authors / Year	$p^{(0)}$	$p^{(1)}$	P^{K}_{exp}
Shafir &Tversky / 1992 [4]	0.97	0.84	0.63
Croson / 1999 [11]	0.67	0.32	0.30
Busemeyer *et al*. / 2006 [13]	0.91	0.84	0.66



- p_i、q_{ji}を与えてθ_0、θ_1の関数としてQ_{jK}を等高線プロット、実験値との交線
- とりあえずの結論：量子意思決定論は有効な作業仮説

連言錯誤と量子的意思決定論

- 当然原理の破れ、連言錯誤は量子論の不等式では排除されていない
  - 「何故あるか」は別の話（危険回避的性向の進化的優位性 etc.）
- 自由になるパラメータが入った事に注意（オッカムの刃に注意）
- 組織的な実験の解析が欠かせない
- 現象論的成功があれば
  - 「数個のパラメータ」を心理学的特性分類に使えるかも（楽観論）
  - もう一つ反証しづらい「量子」学説が増える（悲観論）
- 推論の神経回路モデルを作る際の参考になるとよい（穏当な推測）

囚人のディレンマと協力行為

- 囚人のディレンマの利得表 A_{ij} \ B_{ij}

あなた \ **相手**	裏切り	協力
裏切り	**1 \ 1**	**5 \ 0**
協力	**0 \ 5**	**3 \ 3**

Nash equilibrium

Mirror neuron at work?

- 合理的（利己的）プレイヤー「悪い」ナッシュ均衡に陥る

  現実の人間は想定と異なり「不合理」に利他的 : 裏切 63%　協力 37%

- 利他的行為は他人も利他的に振る舞うとき（に限って）有効
  - フリーライダーをどうやって防ぐ？：社会科学の主問題の一つ
  - 通常のゲーム理論の「利己利得極大」を越えて

-> 実はゲーム理論の量子化版がそのような内実を含む構造になっている

量子ゲーム理論

- ゲーム理論の利得関数

$$\Pi_A = \Sigma_i \Sigma_j A_{ij} P_{ij}$$
$$\Pi_B = \Sigma_i \Sigma_j B_{ij} P_{ij}$$

A_{ij}	j=0	j=1
i=0	1	5
i=1	0	3

B_{ij}	j=0	j=1
i=0	1	0
i=1	5	3

- 戦略 $P_{ij} = |\langle i\, j | J(\gamma) | \psi_A\, \psi_B \rangle|^2$: Hilbertベクトルで作った連結確率

  $|\psi_A\rangle = \psi_{A0}|0\rangle + \psi_{A1}|1\rangle$: A の戦略

  $|\psi_B\rangle = \psi_{B0}|0\rangle + \psi_{B1}|1\rangle$: B の戦略 (Eisert et al. 1999)

量子相関 $J(\gamma) = \exp(i\gamma_1 S/2)\cdot\exp(i\gamma_2 C/2)$; S: プレーヤー交換 C: 戦略交換

- 与えられた {γ}ごとにナッシュ均衡 $\{\psi_A^*, \psi_B^*\}$ が求まる

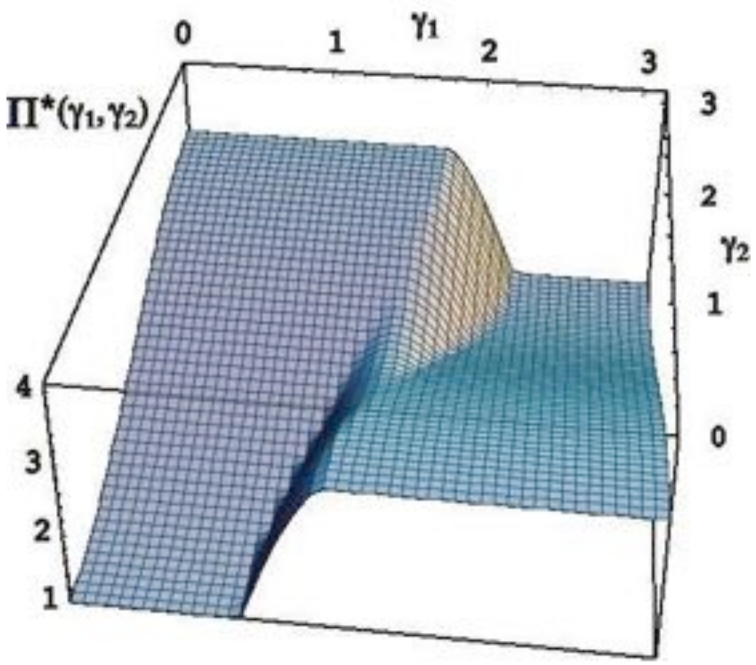
$$\partial_{\psi_A}\Pi_A(\psi_A, \psi_B^*)\,|_{\psi_A=\psi_A^*} = 0\,, \quad \partial_{\psi_B}\Pi_B(\psi_A^*, \psi_B)\,|_{\psi_B=\psi_B^*} = 0$$

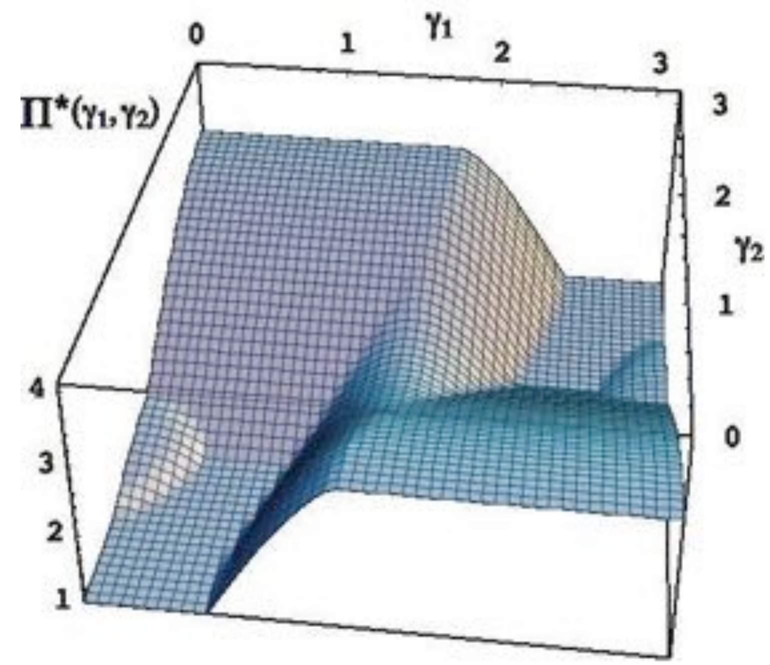
古典的確率戦略

- 相関無いと $J(\gamma)=1$ → 古典的（普通の）ゲーム； $P_{ij} = p_{Ai}\cdot p_{Bj} = |\psi_{Ai}|^2\cdot|\psi_{Bj}|^2$

量子利得

- 相関パラメータ (γ_1, γ_2) の関数としての量子ナッシュ均衡での利得





A_{ij}	$j=0$	$j=1$
$i=0$	**1**	**5**
$i=1$	**0**	**3**

A_{ij}	$j=0$	$j=1$
$i=0$	**1**	**5**
$i=1$	**0.2**	**3**

- 量子戦略によってプレーヤーは 非パレートなナッシュ均衡を免れうる

量子戦略の内実

- 利得関数は (簡単のため $\gamma_2=0$, $\gamma_1=\gamma$ と置いて) 次の形に書ける

$$\Pi_A(\psi_A, \psi_B, \gamma) = \sum_{ij} A_{ij}^{PC}(\gamma)\, p_{Ai}\, p_{Bj} + \Pi_A^Q(\psi_A, \psi_B, \gamma)$$

$$\Pi_B(\psi_A, \psi_B, \gamma) = \sum_{ij} B_{ij}^{PC}(\gamma)\, p_{Ai}\, p_{Bj} + \Pi_B^Q(\psi_A, \psi_B, \gamma)$$

- 擬古典項

前頁の図の主要部

$$A_{ij}^{PC}(\gamma) = \cos^2(\gamma/2)\, A_{ij} + \sin^2(\gamma/2)\, A_{ji}$$

$$B_{ij}^{PC}(\gamma) = \cos^2(\gamma/2)\, B_{ij} + \sin^2(\gamma/2)\, B_{ji}$$

- 量子干渉項

前頁の図の小さな丸い出っ張り

$$\Pi_A^Q(\psi_A, \psi_B, \gamma) = (A_{11} - A_{00}) \sqrt{(p_{A0}\, p_{B0}\, p_{A1}\, p_{B1})} \sin\gamma_1 \sin(\theta_{A1}+\theta_{B1}-\theta_{A0}-\theta_{A0})$$

$$\Pi_B^Q(\psi_A, \psi_B, \gamma) = (B_{11} - B_{00}) \sqrt{(p_{A0}\, p_{B0}\, p_{A1}\, p_{B1})} \sin\gamma_1 \sin(\theta_{A1}+\theta_{B1}-\theta_{A0}-\theta_{A0})$$

- 量子干渉項を別にすれば 量子戦略 = パラメータで歪めた一群のゲーム族

利他性

- 両者対称なゲーム $A_{ij} = B_{ji}$ では、量子的利得は

$$\Pi_A(\psi_A, \psi_B, \gamma) = \Sigma_{ij}\ [\cos^2(\gamma/2)\, A_{ij} + \sin^2(\gamma/2)\, B_{ij}]\ p_{Ai}\, p_{Bj}$$
$$\Pi_B(\psi_A, \psi_B, \gamma) = \Sigma_{ij}\ [\cos^2(\gamma/2)\, B_{ij} + \sin^2(\gamma/2)\, A_{ij}]\ p_{Ai}\, p_{Bj}$$

γ=π/2
(half&half)

あなたの本来の利得に相手の利得を混合して極大化

$\alpha = \sin^2(\gamma/2)$; $0 \le \alpha \le 1$: 利他性パラメータ

M_{Aij}	j=0	j=1
i=0	1	$5\cos^2(\gamma/2)$ 2.5
i=1	$5\sin^2(\gamma/2)$ 2.5	3

M_{Bij}	j=0	j=1
i=0	1	$5\cos^2(\gamma/2)$ 2.5
i=1	$5\sin^2(\gamma/2)$ 2.5	3

- 囚人ディレンマ

A_{ij}	j=0	j=1
i=0	1	5
i=1	0	3

B_{ij}	j=0	j=1
i=0	1	0
i=1	5	3

- 十分に大きなある γ の値で
  パレート最適なナッシュ均衡 実現される

最適な利他性と双対性

- ゲームルールの利他的修正 （量子的起源であれ何であれ）
  - Player A の実効利得 $\Pi_A(p_A, p_B, \alpha) = \Sigma_{ij}\ [\,(1\text{-}\alpha)\,A_{ij} + \alpha\,B_{ij}\,]\ p_{Ai}\,p_{Bj}$
  - Player B の実効利得 $\Pi_B(p_A, p_B, \alpha) = \Sigma_{ij}\ [\,(1\text{-}\alpha)\,B_{ij} + \alpha\,A_{ij}\,]\ p_{Ai}\,p_{Bj}$
- 利己極限 : α = 0, 利他極限 : α = 1, ... 最適値は？
  - $B_{ij} = A_{ij} \ \rightarrow\ \Pi_A(p_A, p_B, \alpha) = \Pi_B(p_B, p_A, 1\text{-}\alpha)$

- 対称ゲームのナッシュ均衡の「鏡映対称性」 利他利己双対性
  - $\Pi_A(p^*, p^*, \alpha) = \Pi_A(p^*, p^*, 1\text{-}\alpha) = \Pi_B(p^*, p^*, \alpha) = \Pi_B(p^*, p^*, 1\text{-}\alpha)$
- 最大値 $\Pi^* = \Pi_A(p^*, p^*, \alpha^*) = \Pi_B(p^*, p^*, \alpha^*)$ は $\alpha^*=1/2$ で 最大多数の最大幸福 J.S. Mill 均衡

ハーサニィの不完備情報ゲーム

- Altruism emerges only with social enforcement and/or education

  A game with Incomplete information on player types

Table A_{ij}

	i \ j	b=0 90%		b=1 10%	
		0	1	0	1
a=0 90%	0	1	5	-20	-25
	1	0	3	0	3
a=1 10%	0	-1	0	0	-5
	1	0	0	0	0

Undercover Punisher [Type 1]

- players come in 2 types; which shows up as opponent is unknown
- Bayesian update of strategy based on opponent type/strategy assumption

  -> Bayesian Nash Equilibrium (Harsanyi's Theory)

ハーサニィとベル

- Quantum strategy
  ≈ classical strategy with perverse modification + purely quantum interference
- First term offers *mathematical framework* for *effective theory of altruism* etc.
- Second term offers *real advantage of quantum strategy*
  -> realized with control of quantum systems ; “game with spin flip”
- Is there anyway to extract purely quantum second term?
  -> striking similarity of Harsanyi game and Bell Gedanken experiment
  player type <--> measurement setup
  strategy choice <--> spin direction
- *Possible to tailor quantum Harsanyi game interpretable as Bell experiment*

セレセーダ型ゲーム

- A multi-type incomplete information version of Battle of Sexes Game

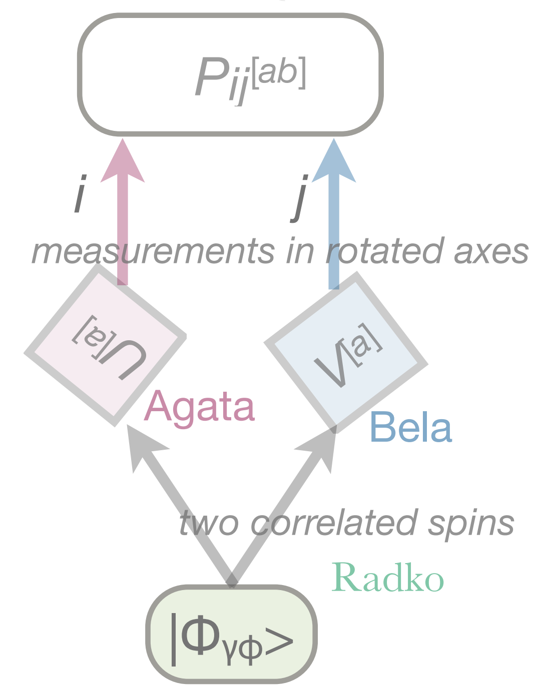
$A_{ij}^{[a]} \backslash B_{ij}^{[b]}$		b=0 50%		b=1 50%	
	i \ j	j=0	j=1	j=0	j=1
a=0 50%	i=0	1 \ 3	0	-1 \ -3	0
	i=1	0	3 \ 1	0	-3 \ -1
a=1 50%	i=0	-1 \ -3	0	-3 \ -1	0
	i=1	0	-3 \ -1	0	-1 \ -3

- Maximize payoffs $\Pi_A = \Sigma_{ab}\, \Sigma_{ij}\, s^{[a]}\, s^{[b]}\, A_{ij}^{[ab]}\, P_{ij}^{[ab]}$

  $\Pi_B = \Sigma_{ab}\, \Sigma_{ij}\, s^{[a]}\, s^{[b]}\, B_{ij}^{[ab]}\, P_{ij}^{[ab]}$

  $s^{[c]}$: type ratio

  with **local unitary operations** $U^{[a]}$ & $V^{[b]}$ through



- Joint probability $P_{ij}^{[ab]} = |<i\, j\, |\, U^{[a]}\, V^{[b]}\, |\, \Phi_{\gamma\phi}>|^2$

  with **two spin$^1/_2$** $|\Phi_{\gamma\phi}> = \cos(\gamma/2)\, |00> + e^{i\phi}\cos(\gamma/2)\, |11>$

古典的／量子的ベイズ＝ナッシュ均衡

- Strategies with classical probability

  $P_{ij}^{[ab]} = P_i^{[a]}\ P_j^{[b]}$

  nonpositive payoff

  Classical Nash : $\Pi_A^* = \Pi_B^* = 0$ eg. ->

1	0	1	0
0	0	0	0
0	0	0	0
1	0	1	0

0	1	0	1
0	0	0	0
0	1	0	1
0	0	0	0

  Inequitable Split in BoS sector

$P_{ij}^{[ab]}$ *table*

- Quantum strategy $P_{ij}^{[ab]} = |<i\ j\,|\,U^{[a]}\ V^{[b]}\,|\,\Phi_{\gamma\phi}>|^2$

  $\neq P_i^{[a]}\ P_j^{[b]}$

  $\gamma=\pi/2$ (*max. correlation*)

  eg. $U^{[0]}$={ {1,0}, {0,1} }
  $U^{[1]}$={ {cos(π/8),sin(π/8)}, {-sin(π/8),cos(π/8)} }
  $V^{[0]}$= { {cos(3π/8),sin(3π/8)}, {-sin(3π/8),cos(3π/8)} }
  $V^{[1]}$={ {cos(-5π/8),sin(-5π/8)}, {-sin(-5π/8),cos(-π/8)} }

τ	σ	σ	τ
σ	τ	τ	σ
σ	τ	σ	τ
τ	σ	τ	σ

Quantum Bayesian Nash : $\Pi_A^* = \Pi_B^* = 4\sigma/\sqrt{2} \approx 1.2$

$\tau = 1/2\ \cos^2(\pi/8)$
$\sigma = 1/2\ \sin^2(\pi/8)$

量子利得とベル不等式

- Quantum Payoff of Cereceda-Bell Game is given

$$\Pi_A = 1/4(\,P_{00}^{[00]} - P_{00}^{[10]} - P_{00}^{[01]} - P_{11}^{[11]}) + 3/4(\,P_{11}^{[00]} - P_{11}^{[10]} - P_{11}^{[01]} - P_{00}^{[11]})$$
$$\Pi_B = 3/4(\,P_{00}^{[00]} - P_{00}^{[10]} - P_{00}^{[01]} - P_{11}^{[11]}) + 1/4(\,P_{11}^{[00]} - P_{11}^{[10]} - P_{11}^{[01]} - P_{00}^{[11]})$$

- Gedanken experiment on dichotomic 2 x 2 system
  identify type a=0,1 with player A's two setups
  type b=0,1 with player B's (Cleve et al. 2004)

1		-1	
-1			
			-1

- Cereceda Bell inequality (one quater of CHSH inequality)

$$P_{00}^{[00]} - P_{00}^{[10]} - P_{00}^{[01]} - P_{11}^{[11]} \leq 0$$
$$P_{11}^{[00]} - P_{11}^{[10]} - P_{11}^{[01]} - P_{00}^{[11]} \leq 0$$

- Positive payoffs are result of nonlocal strategy

結論

- 人間の心理過程に量子確率を適用する試みを探った
  - 量子的干渉で算術平均に幾何平均の寄与加わる
- 量子意思決定論
  - 通常では説明不能な背理現象へのとりあえず有効な作業仮説
  - 現象論から神経回路モデルへの架け橋になりうるか
- 量子ゲーム理論
  - 利他的行動を取り入れたゲーム理論を導く
  - 量子情報、量子通信への応用
  - 生命の量子的側面へのアプローチに寄与可能か

文献

- Our Textbook
  伊丹哲郎, 松井伸之, 乾徳夫, 全卓樹
  「量子力学的手法によるシステムと制御」
  （コロナ社　2017年12月）

- Selected papers on game theory and decision theory by us

  T. Cheon & T. Takahashi, *J. Phys. Soc. Jpn.* 81 (2012) 104801.
  T. Cheon & T. Takahashi, *Phys. Lett. A375* (2010) 100.
  T. Cheon & A. Iqbal, *J. Phys. Soc. Jpn.* 77 (2008) 024801.
  A. Iqbal & T. Cheon, *Phys. Rev. E* 76 (2007) 061122.
  T. Cheon & I. Tsutsui, *Phys. Lett. A* 348 (2006) 147.
  T. Cheon, *Europhys. Lett.* 69 (2005) 149.
  T. Cheon, *Phys. Lett. A* 318 (2003) 327.
  T. Cheon, *Phys. Rev. Lett.* 90 (2003) 258105.