

On crosscap numbers of alternating knots
伊藤昇(東大数理)

瀧村祐介氏(学習院中等科)との
共同研究

結び目の数理II, 2019/12/19, 日本大学

crosscap number $C(K)$

$$C(K) = \min \{ 1 - \chi(\Sigma) \mid \Sigma : \text{non-ori. surface in } \mathbb{R}^3, \partial(\Sigma) = K \}$$

(ただし $\chi(\Sigma)$: オイラー数)

クロスキャップ数 (non-orientable genus) という。

例外的に unknot U は $C(U)=0$ と設定する。

non-orientable genus ともよばれる。

crosscap numberの歴史の概略 (敬称略)

Clark (1978) 定義の導入と $C(K)=1$ の決定

村上斉-安原 (1995) 加法性が成立する必要十分条件

別所 (1994, 修士論文) 村上斉-安原の結果の一部を拡張

寺垣内 (2004) torus knot のcrosscap number

寺垣内-平澤 (2006) 2-bridge knotのcrosscap number

市原-水嶋 (2006) pretzel knot のcrosscap number

小沢 (2011) “Essential state surfaces for knots and links”

Adams-Kindred (2013) alternating knotのcrosscap number

の理論的な決定

Kalfagianni-Lee (2016) (colored) Jones polynomialとの関係

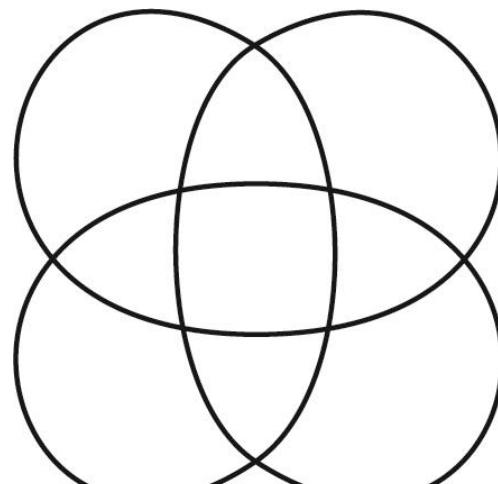
我々 (2018) $C(K)=2$ (K :alt. knot)のlist (cf. 市原-正井2016)

今回(2019) $C(K)=n$ (K :alt. knot)の決定

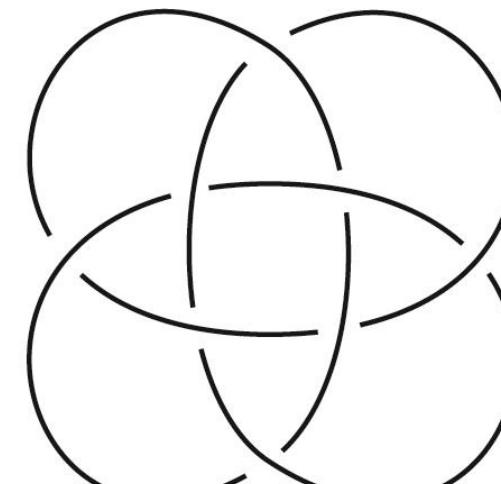
Definition

P : knot projection

$K^{alt}(P)$: P に交点の上下の情報を
alternate に与えて得られる knot

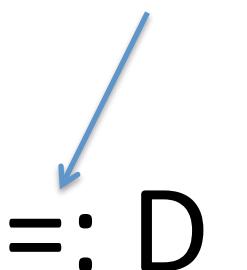


P

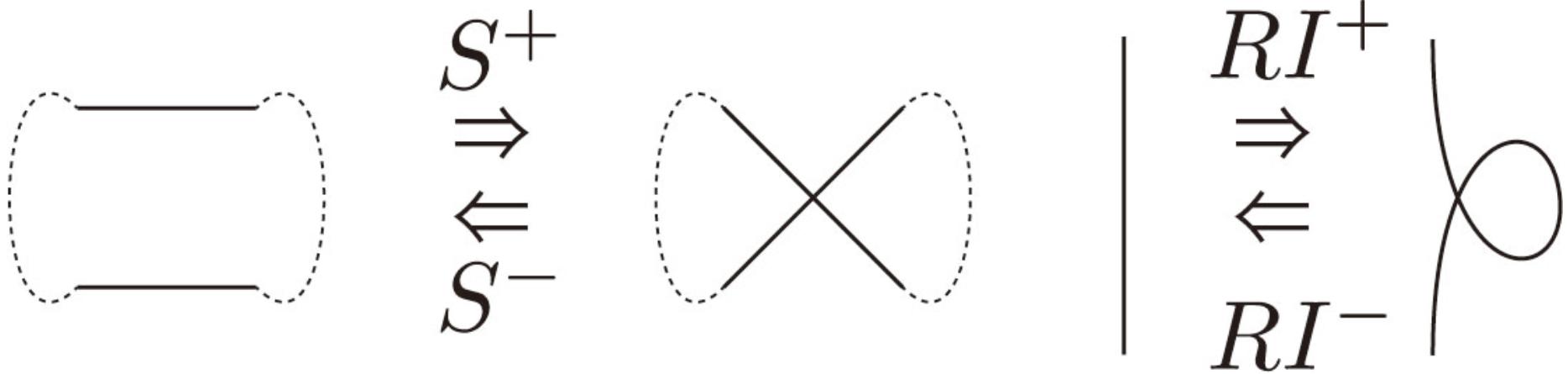


$K^{alt}(P) =: D$

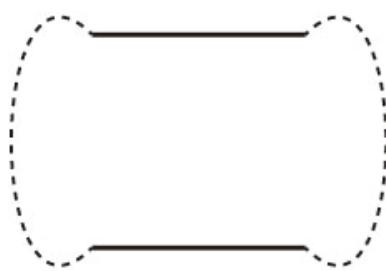
本日



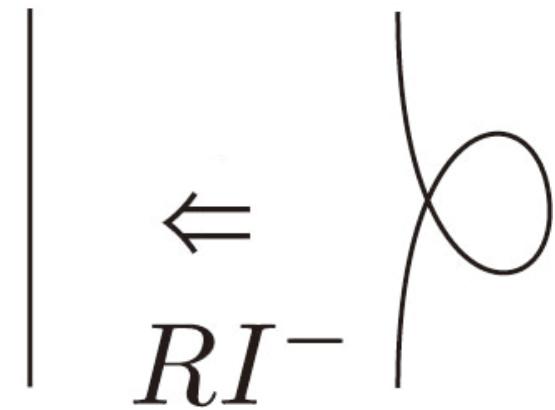
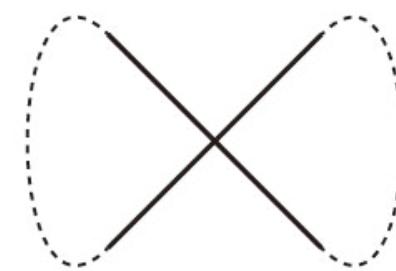
Definition ($u^-(D)$)



Definition ($u^-(D)$)

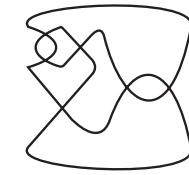
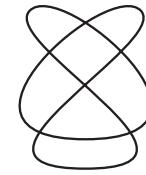
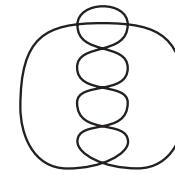
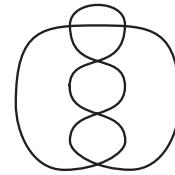
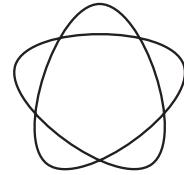
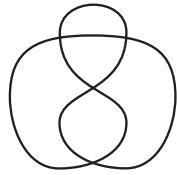
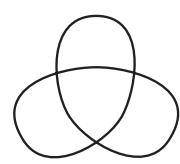


\leftarrow
 S^-



\leftarrow
 RI^-

$u^-(D)$ のようす



1

2

1

2

2

2

3

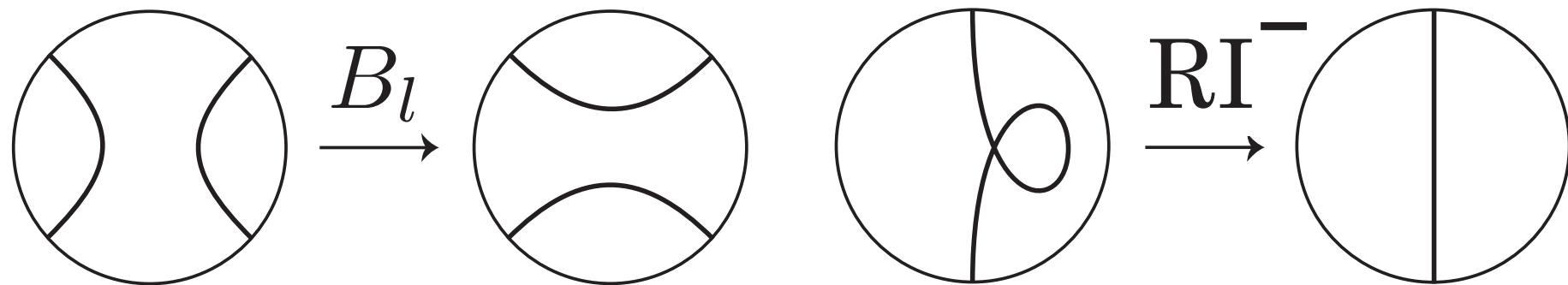
Definition ($u^-(D)$)

alternating diag. D を S^- , RI^- の列で
交点のない curve  にするために
必要な S^- の最小回数を $u^-(D)$ と表す.

昨年の結果の一つ: (Takimura-I., 2018, IJM)

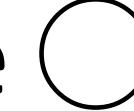
$$C(K) \leq u^-(K) = \min_{D \text{ of } K} u^-(D).$$

Definition (B(D))



本講演では、左のmoveを「B」と単に書くことにします。

Definition($B(D)$)

alternating diag. D を B, RI^- の列で
交点のない curve  にするために
必要な B の最小回数を $B(D)$ と表す.

交代結び目不变量 $B(K)$ の導入

K : alternating knot

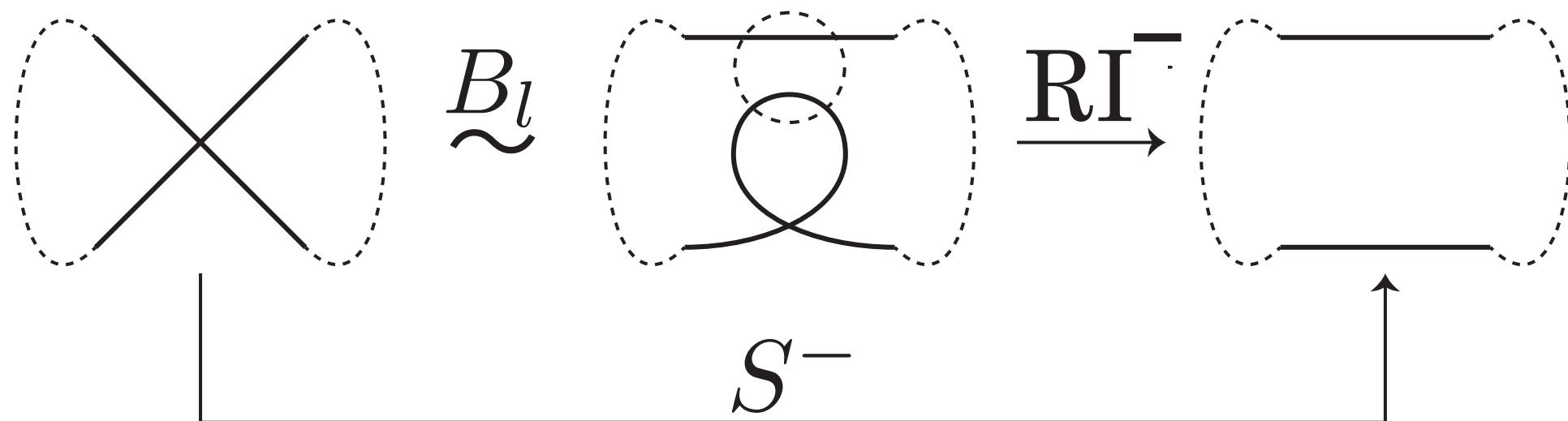
$Z(K)$: the set of alt. knot diag. of K

$$B(K) := \min_{D \in Z(K)} B(D).$$

$$\rightarrow \underline{B(K)} \leqq C(K) \leqq \bar{u}(K).$$

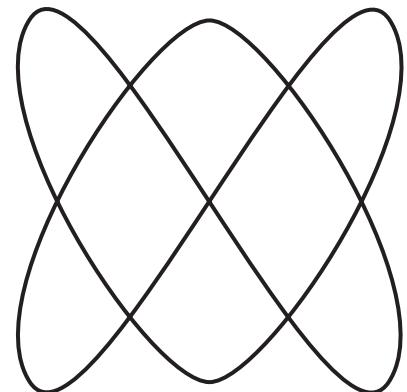
using [Adams-Kindred 2013], [Takimura-I. 2018].

$$B(K) \leq C(K)$$



$u^-(K)$ と $B(K)$ の違い

→ primeでは $C(K) = 2g(K) + 1$
のとき(例えば $\hat{7}_4$)



$$u^-(K) = 3$$

$$B(K) = 2$$

$\hat{7}_4$

Theorem 1 (Takimura-I., JKTR, 2019)

$C(K)$: crosscap number of alt. knot K

$$(1) C(K)=B(K) \Leftrightarrow C(K) \neq 2g(K) + 1.$$

$$(2) C(K) = B(K) + 1 \Leftrightarrow C(K) = 2g(K) + 1.$$

$$(3) B(K \# K') = B(K) + B(K').$$

Sketch of Proof: Case 1: $C(K) \neq 2g(K)+1$

$C(K)$

$$= b_1 (\text{Diagram})$$

The diagram shows four circles representing components of a link. Each circle contains a red curve that winds around the circle multiple times. The curves are interconnected between the circles, forming a complex link. Ellipses between the fourth and fifth circles indicate that this pattern continues.

$\leq \min \{ \# \text{ necessary bands to obtain a disk} \}$

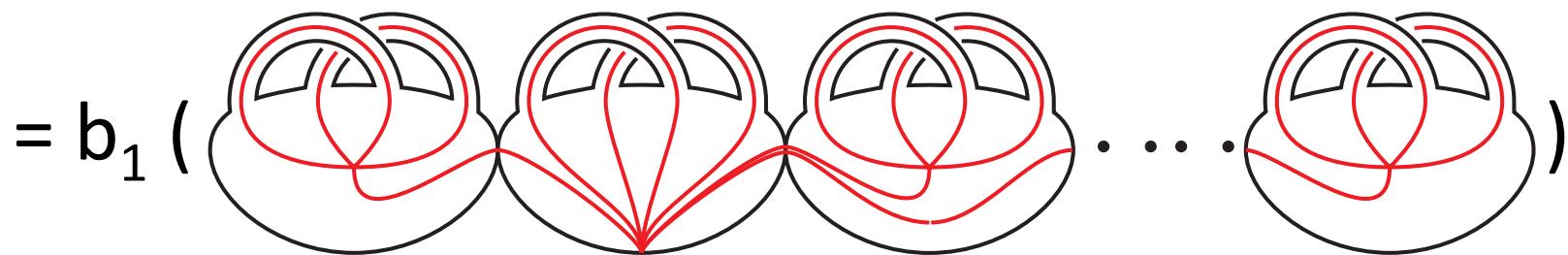
$\leq \min \{ \# \text{ necessary bands to obtain a disk}$

from “a” “a” state non-ori. surface of D }

$= B(K).$

Sketch of Proof: Case 2: $C(K) = 2g(K)+1$

$$2g(K)$$


$$\leq \min \{ \# \text{ necessary bands to obtain a disk} \}$$
$$\leq \min \{ \# \text{ necessary bands to obtain a disk}$$

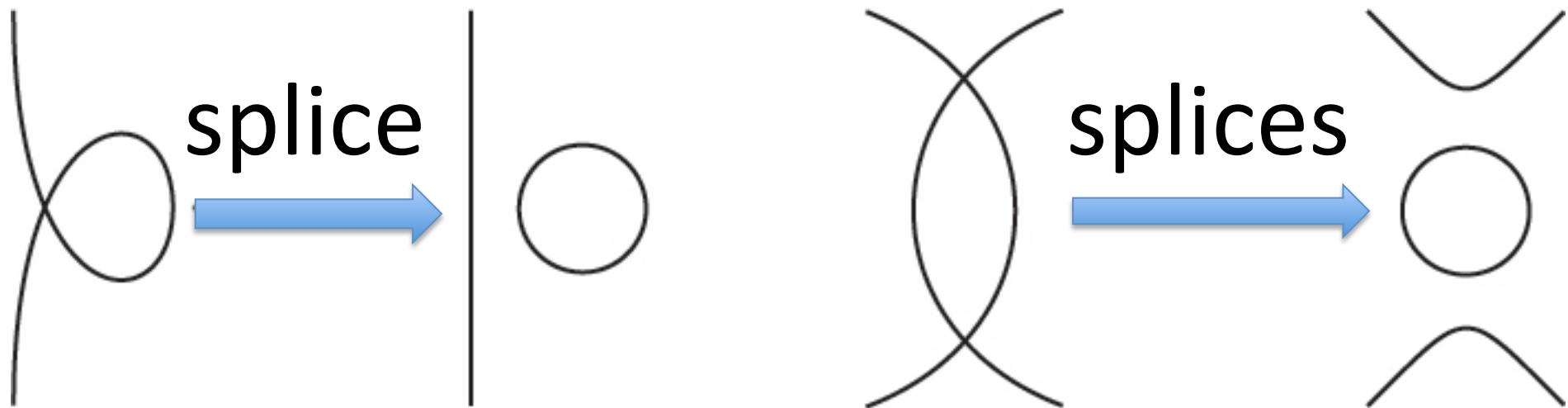
from “a” “a” state ori. surface of D }

$$= B(K).$$

Adams-Kindred の最大オイラー数

surfaceの候補集合 (AGT, 2013)

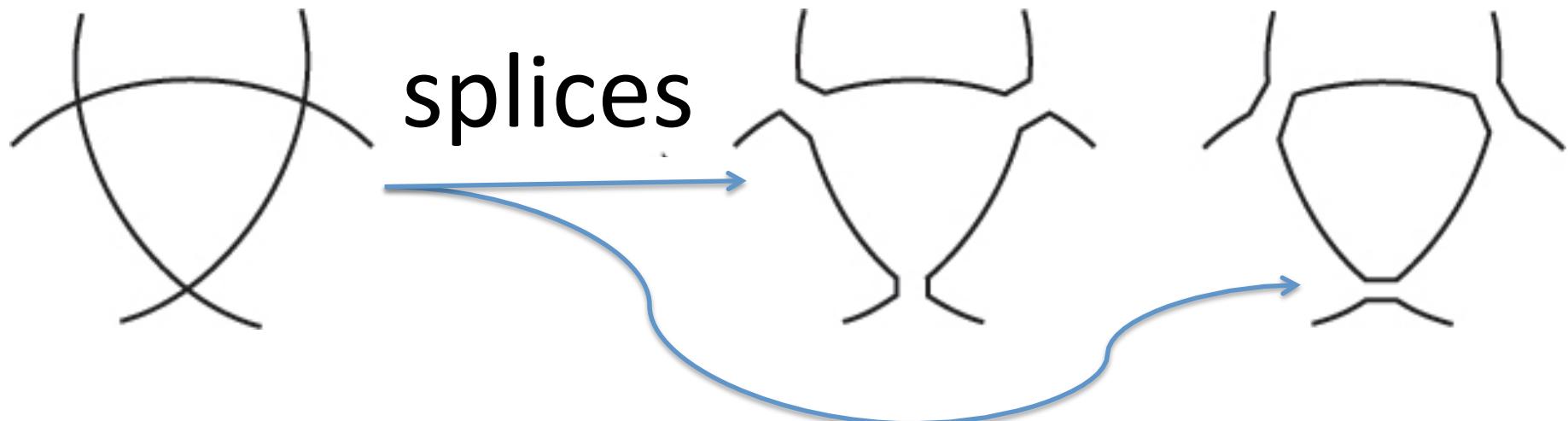
最小 m 辺形を見つける度に splicesを行う(下図).
[$m=1, 2$, or 3 . 1,2辺形がなければ3辺形はある]



Adams–Kindred の最大オイラー数

surfaceの候補集合 (AGT, 2013)

最小m辺形を見つける度に splicesを行う(下図).
[1辺形がなければ, 2辺形, 1,2辺形がなければ
3辺形は必ずある]

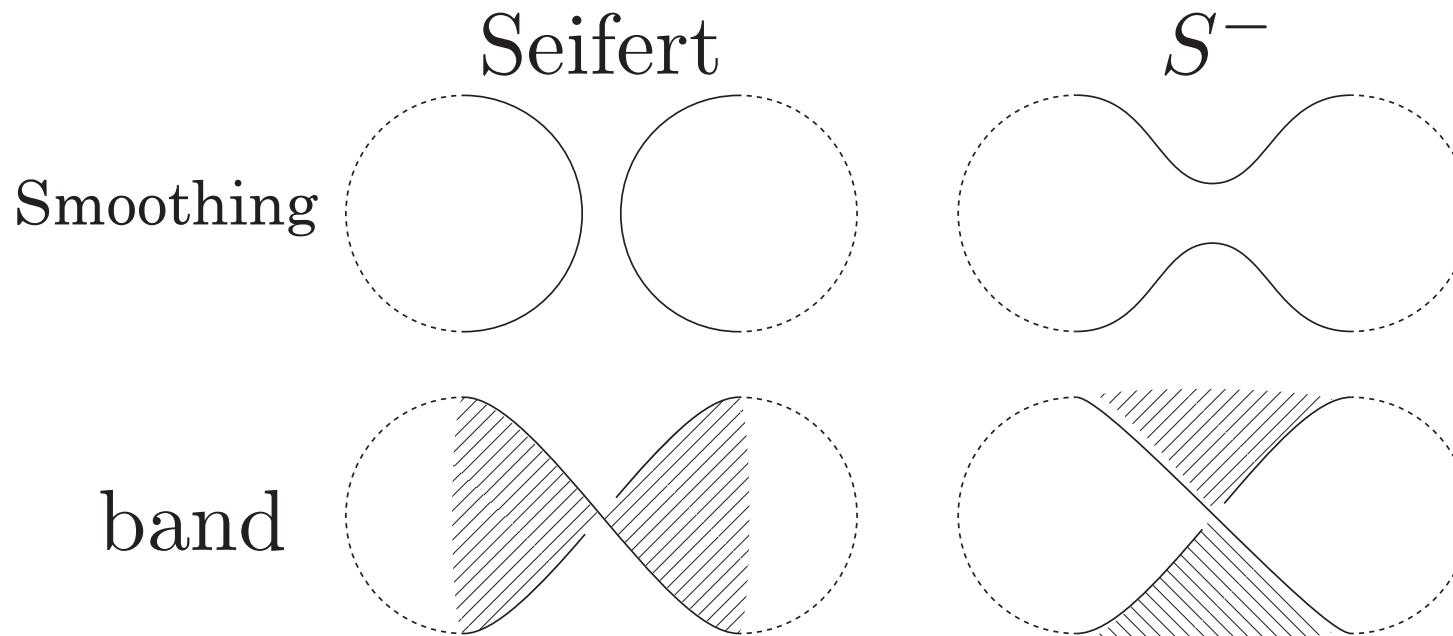


$C(K)$ (K : alt. knot)の計算方法

[Takimura-I. 2019]

Adams-Kindred アルゴリズム

→ $B(K)=B(D)$ なる alt. knot diag. D が見つかる
($C(K) \neq 2g(K)+1$ のときは直接, $C(K)=2g(K)+1$ のときは 1箇所 splice を置き換える: 下記図).

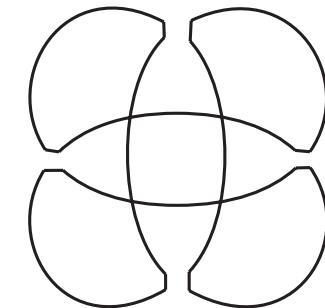


Case: $C(K) \neq 2g(K)+1$

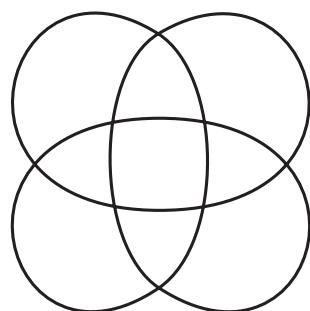
$$2 g(K) + 1 = 7 > 4.$$

$T(K)$ or $\text{span}/2 = 4$ from Jones poly.

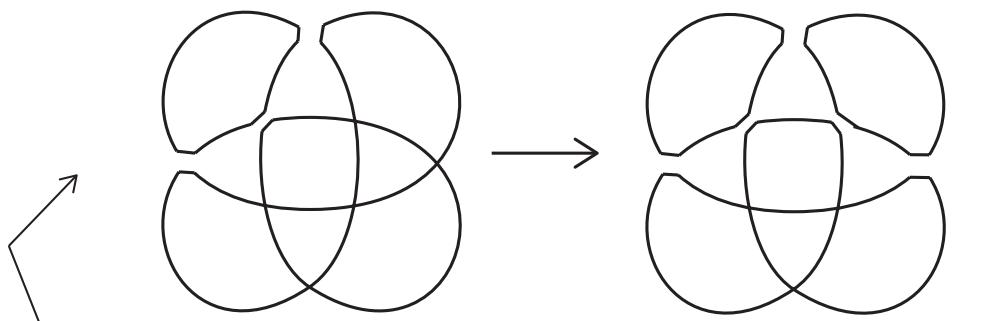
$B(K)$ founded in Adams-Kindred



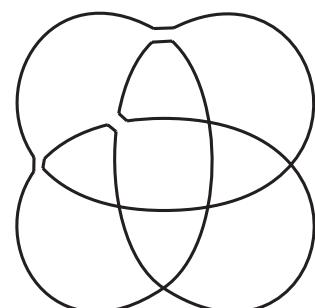
B: 4 times



8₁₈

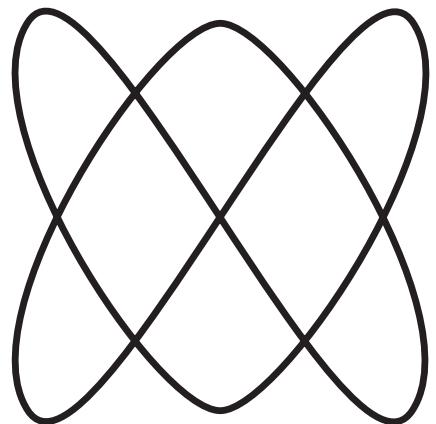


B: 4 times

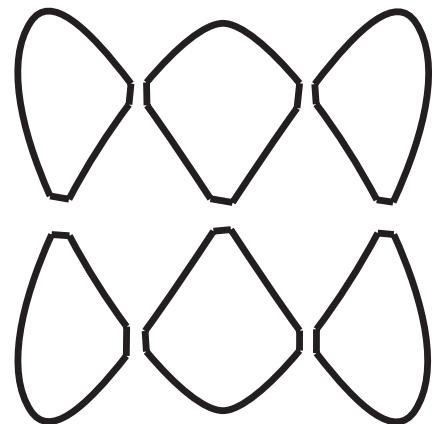


B: 4 times

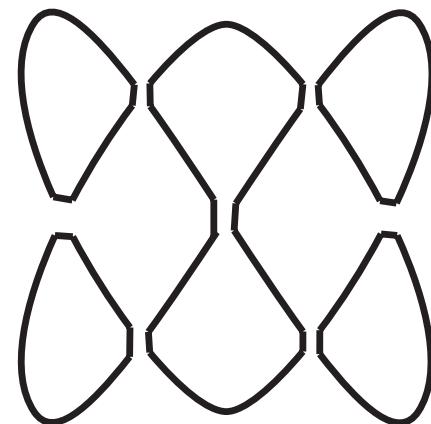
Case: $B(K) + 1 = C(K) = 2g(K) + 1$.



7_4



orientable



non-ori.

Prop. $B(K)=C(K) \leq Tw(K)$ if $C(K) \neq 2g(K)+1$

Proof. $|S| = \# \text{ state circles}$, $V(m\text{-gon}) = \# \text{ crossings of } n\text{-gons}$, $F(m\text{-gon}) = \# \text{ faces of } m\text{-gons}$. $Tw(K) = \text{twist number of } K$ (= the sum of absolute values of the 2nd coefficients of Jones polynomial [Dasbach-Lin])

$$\begin{aligned} B(K) &= C(K) = 1 - \chi(\Sigma) = 1 - |S| + \# \text{ crossings} \\ &= 1 + V(2\text{-gon}) - F(2\text{-gon}) + V(n\text{-gon}) - F(n\text{-gon}) \quad (n \neq 2) \\ &\leq 1 + Tw(K) - 1 \quad (\text{if } 2 \leq t) \end{aligned}$$

$$B(K)=C(K)=1= Tw(K) \quad (\text{if } t=1)$$

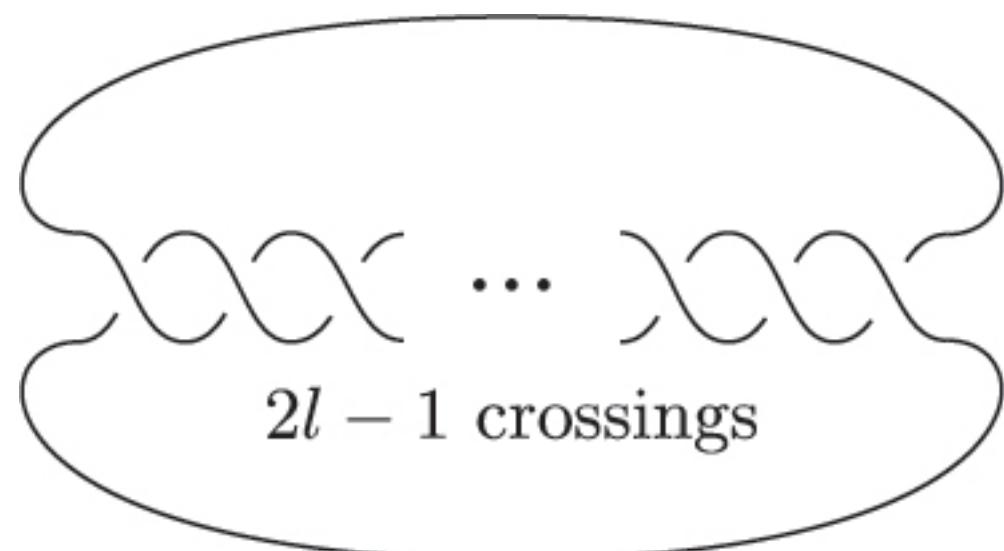
Prop. 1 (Takimura-I., JKTR, 2019)

K : alternating knot. (A), (B), (C)は同値.

(A) $K \in \mathcal{T}$

(B) $B(K) = 1$

(C) $C(K) = 1$



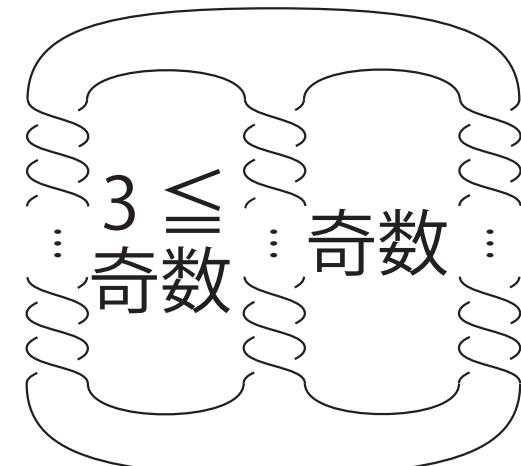
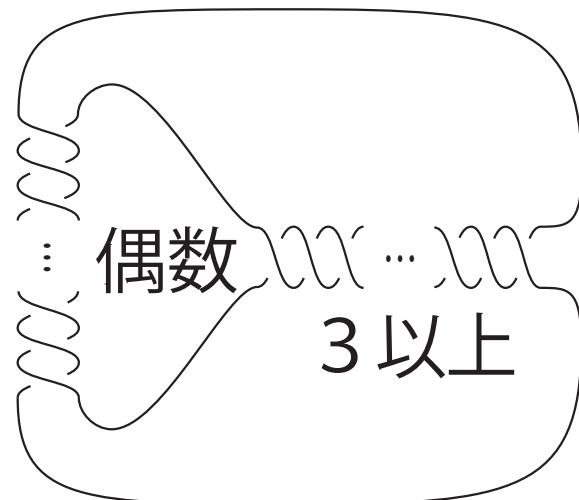
$(2, 2l - 1)$ -torus knot

Prop. 2 (Takimura-I., JKTR, 2019)

K: alternating knot. (A), (B)は同値.

$$(A) K \in \mathcal{T} \# \mathcal{T} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{P}$$

$$(B) B(K) = 2$$



今後の展開

$u^-(D)$ については、どこかで報告をします。

$$C(K) \leq \min_{P \text{ of } K} u^-(D).$$

P を S^- , RI^- の有限列で
simple closed curve にするために
必要な S^- の最小回数を $u^-(P)$ と表す

ご静聴ありがとうございました(下記, 敬称略)

Clark (1978) 定義の導入と $C(K)=1$ の決定

村上斉-安原 (1995) 加法性が成立する必要十分条件

別所 (1994, 修士論文) 村上斉-安原の結果の一部を拡張

寺垣内 (2004) torus knot のcrosscap number

寺垣内-平澤 (2006) 2-bridge knotのcrosscap number

市原-水嶋 (2006) pretzel knot のcrosscap number

小沢 (2011) “Essential state surfaces for knots and links”

Adams-Kindred (2013) alternating knotのcrosscap number

の理論的な決定

Kalfagianni-Lee (2016) (colored) Jones polynomialとの関係

我々 (2018) $C(K)=2$ (K :alt. knot)のlist (cf. 市原-正井2016)

今回(2019) $C(K)=n$ (K :alt. knot)の決定